

11. Übungszettel zur Vorlesung „Zahlen und Zahlentheorie“

SoSe 2018
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Dr. Cora Welsch
Nils Leder

Aufgabe 11.1

Bestimmen Sie alle Primzahlen p mit folgenden Eigenschaften und geben Sie Beispiele solcher Primzahlen an.

- (a) $p \geq 3$ und 128 ist quadratisches Residuum modulo p .
- (b) $p \geq 5$ und -3 ist quadratisches Residuum modulo p .

Aufgabe 11.2

Sei $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv 3 \pmod{4}$. Zeigen Sie: wenn $a \in \mathbb{Z}$ quadratisches Residuum modulo p ist, so ist $-a$ kein quadratisches Residuum modulo p .

Aufgabe 11.3

Bestimmen Sie alle Primzahlen p , für die das Polynom $X^4 - 4$ vier verschiedene Nullstellen in \mathbb{Z}/p hat.

Aufgabe 11.4

Sei $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$, $p \geq 3$. Zeigen Sie: wenn $p \mid n^2 + 1$, so gilt $p \equiv 1 \pmod{4}$.

*Aufgabe

Es gibt unendlich viele Primzahlen p mit $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Hinweis: Angenommen, es gibt nur endlich viele solcher Primzahlen, $p_1 = 5 < p_2 < \dots < p_s$. Betrachten Sie die Zahl $m = 4p_1^2 p_2^2 \cdots p_s^2 + 1$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 5.7.2018, 8 Uhr