6. Übungszettel zur Vorlesung „Topologische Gruppen“

SoSe 2020 Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster Daniel Keppeler
Philip Möller

Aufgabe 6.1
Sei $E = C([0,1], \mathbb{R})$, versehen mit der kompakt-offenen-Topologie (also der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz nach Aufgabe 4.1). Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

a) E ist ein Baire-Raum.

b) E ist lokalkompakt.

c) E ist σ-kompakt.

d) E ist ein Lindelöf-Raum.

Aufgabe 6.2
Es sei $X = \mathbb{N}$, versehen mit der diskreten Topologie, und $G = Homeo(\mathbb{N}) = Sym(\mathbb{N})$, versehen mit der kompakt-offenen-Topologie. Wir definieren eine Metrik auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ durch $d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta_{x_k, y_k}$ für $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
Zeige:

a) Die Metrik d induziert die Topologie der punktweisen Konvergenz.

b) G ist eine total unzusammenhängende topologische Gruppe.

c) G ist nicht lokalkompakt.

d) G ist separabel.

Bitte wenden.

Aufgabe 6.3
Fortsetzung von Aufgabe 6.2:
Wie in der Vorlesung setzen wir $x(\ell) = (1, 2, ..., \ell, 0, \ell + 1, ...)$ für $\ell \in \mathbb{N}$.
Zeige:

a) In jeder linksinvarianten Metrik bildet die Folge $(x(\ell))_{\ell\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Folgere, dass es auf G keine vollständige linksinvariante Metrik gibt, welche die kompakt-offene-Topologie induziert.

b) Es gibt (mindestens) eine vollständige Metrik auf G, welche die kompakt-offene-Topologie induziert.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ *vollständig ist und benutze Aufgabe 4.4.*

Aufgabe 6.4
Es sei p eine Primzahl. Weiter sei $U(1)$ die Kreisgruppe. Sei $G = U(1)^{\mathbb{N}}$ und $S_p \subseteq G$ sei die Untergruppe aller Folgen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $z_{k+1}^p = z_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Zeige:

a) S_p ist eine kompakte zusammenhängende topologische Gruppe.

b) S_p ist nicht lokal zusammenhängend.

[Man nennt S_p das p-adische Solenoid.]

Abgabe bis: Donnerstag, den 11.06.2020, 8 Uhr online im Learnwebkurs