3. Übungszettel zur Vorlesung „Topologische Gruppen“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Daniel Keppeler
Philip Möller

Aufgabe 3.1
Zeige: Jeder Morphismus $h : U(1) \to U(1)$ ist von der Form $z \mapsto z^k$ für ein eindeutiges $k \in \mathbb{Z}$.
Hinweis: Betrachte die Abbildung $p : \mathbb{R} \to U(1)$, $t \mapsto exp(2\pi it)$ und $ker(h \circ p)$ und benutze Korollar 1.15.

Definition: Sei G eine Gruppe. Eine Metrik d auf G heißt *links-invariant*, falls $d(ag, ah) = d(g, h)$ für alle $a, g, h \in G$.

Aufgabe 3.2
Sei $G = \mathbb{Z}$ und p prim. Wir definieren die *p-adische Metrik* d_p durch

$$d_p(n, m) := \inf\{2^{-k} \mid k \in \mathbb{N} \text{ mit } p^k | (n - m)\}.$$

Zeige:

a) d_p definiert eine links-invariante Metrik auf $\mathbb{Z}$.

b) $(\mathbb{Z}, d_p)$ ist eine nicht-diskrete, total-unzusammenhängende topologische Gruppe.

Aufgabe 3.3
Sei G eine Hausdorff'sche topologische Gruppe und G° offen in G. Sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler in G mit $N \cap G^\circ = \{e\}$ und $G^\circ N = G$. Zeige:

a) Für jede Zusammenhangskomponente C von G enthält $N \cap C$ genau ein Element.

b) N ist abgeschlossen in G und der Quotient G/N ist zusammenhängend.

Bitte wenden.

Aufgabe 3.4
Sei X ein vollständig regulärer Raum. Sei $L = [0,1]^{C(X;[0,1])}$ die Menge der Abbildungen von $C(X;[0,1])$ nach $[0,1]$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Betrachte die Abbildung $i : X \to L$, $p \mapsto [\varphi \mapsto \varphi(p)]$. Zeige:

a) i ist injektiv.

b) i ist stetig.

c) i ist eine topologische Einbettung.

d) Setzte $\beta(X) = \overline{i(X)}$. Zeige die folgende universelle Eigenschaft:
Jedes $\varphi \in C(X;[0,1])$ hat eindeutige Fortsetzung $\overline{\varphi} \in C(\beta(X);[0,1])$ mit $\overline{\varphi} \circ i = \varphi$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 14.05.2020, 8 Uhr online im Learnwebkurs