2. Übungszettel zur Vorlesung „Topologische Gruppen“

SoSe 2020
WWU Münster

Prof. Dr. Linus Kramer
Daniel Keppeler
Philip Möller

Aufgabe 2.1
Sei G eine lokalkompakte Gruppe und $H \subset G$ eine abgeschlossene Untergruppe. Zeige, dass G/H lokalkompakt ist.

Aufgabe 2.2

a) Zeige, dass die topologische Gruppe $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1\}$ (versehen mit der Standarttopologie) zusammenhängend ist.

b) Sei $G = GL_n(\mathbb{R})$. Bestimme die Einskomponente G° und den Quotienten G/G°.

Hinweis: Verwende für a), dass $SL_n(\mathbb{R})$ von den Elementarmatrizen $E_{ij}(r)$, $r \in \mathbb{R}$ erzeugt wird (wobei die Elementarmatrix $E_{ij}(r)$ die Matrix sei, deren Einträge auf der Hauptdiagonalen alle 1 sind, und deren einziger weitere von 0 verschiedener Eintrag sich an der Stelle (i, j), $i \neq j$, befindet und den Wert r annimmt) und zeige, dass diese in der Einskomponente liegen.

Aufgabe 2.3
Sei G eine lokalkompakte Gruppe. Zeige: G° ist der Durchschnitt aller offenen Untergruppen von G.
Hinweis: Wende van Dantzigs Theorem auf G/G° an.

Aufgabe 2.4
Beweise das Lemma von Wallace:
Seien $X_1, ..., X_m$ Hausdorff'sche topologische Räume, sei $A_j \subset X_j$ kompakt für $j = 1, ..., m$, sei $W \subset X_1 \times ... \times X_m$ offen mit $A_1 \times ... \times A_m \subset W$. Dann gibt es offene Mengen $U_j \subset X_j$ mit $A_j \subset U_j$ und $A_1 \times ... \times A_m \subset U_1 \times ... \times U_m \subset W$.

Abgabe bis: Donnerstag, den 07.05.2020, 8 Uhr online im Learnwebkurs