§5. Der Satz von Peter-Weyl

1. **Def** Ein topologischer Vektorraum (über $\mathbb{R}$) ist ein reeller Vektorraum E mit einer Hausdorff-Topologie so, dass gilt:

(i) $(E,+)$ ist top. Gruppe

(ii) die Skalarmultiplikation $\mathbb{R}\times E \to E$ ist stetig

Analoge Definition von TVR über $\mathbb{C}$.

Beispiele (a) $E = \mathbb{R}^m$ mit euklid. Topologie ist TVR

(b) jeder Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ist ein TVR

Insbesondere: X kompakter top. Raum, $E = C(X,\mathbb{R})$ mit Supremums-Norm = Norm der gleichmäßigen Konvergenz $\|\cdot\|_\infty$

$$\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in X\} = \max\{|\varphi(x)| \mid x \in X\}$$

ist Banachraum.

(c) $H=\mathbb{R}$ mit diskreter Topologie ist kein TVR, da die Skalarmultiplikation $\mathbb{R}\times H \to H$ nicht stetig ist.

(d) L beliebiger reeller Vektorraum, versehen mit diskreter Topologie; $\mathbb{R}^L$ in k-o-Topologie = Topologie der punktweisen Konvergenz ist ein TVR (ein Produkt von TVR ist wieder ein TVR) und

$E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L,\mathbb{R}) = L^\vee$ ist ein abgeschlossener Untervektorraum, denn

$$E = \{\xi \in \mathbb{R}^L \mid \forall u,v\in L, s\in\mathbb{R}\quad \xi(su+v) = s\xi(u) + \xi(v)\}$$

2. Def Sei E ein reeller Vektorraum. Eine Teilmenge $K \subseteq E$ heißt konvex, falls für alle $x, y \in K$, $s \in [0,1]$ gilt $sx + (1-s)y \in K$. Beliebige Durchschnitte von konvexen Mengen sind konvex. Ist $X \subseteq E$ beliebig, so ist

$$\operatorname{conv}(X) = \left\{ s_0 x_0 + \ldots + s_m x_m \;\middle|\; \begin{array}{l} x_0, \ldots, x_m \in X,\ s_0, \ldots, s_m \in [0,1], \\ s_0 + \ldots + s_m = 1,\ m \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

die kleinste konvexe Menge, die X enthält – die konvexe Hülle von X.

Lemma Sei E ein TVR, sei $K \subseteq E$ konvex. Dann ist auch $\overline{K} \subseteq E$ konvex.

Bew. Für $s \in [0,1]$ setze $f_s(u,v) = su + (1-s)v$

$\Rightarrow f_s(K \times K) \subseteq K \Rightarrow f_s(\overline{K \times K}) = f_s(\overline{K} \times \overline{K}) \subseteq \overline{K}$ $\square$

3. Def Ein TVR E heißt lokal konvex, wenn $0 \in E$ eine Umgebungsbasis aus konvexen Mengen hat.

Bsp (a) Jeder normierte VR ist lokal konvex.

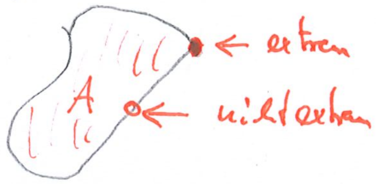
(b) Unterräume von lokal konvexen TVR sind lokal konvex

(c) Produkte von lokal konvexen TVR sind lokal konvex

Insbesondere ist der TVR $E = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(L, \mathbb{R})$ aus §5.1 (d) lokal konvex in der Topologie der punktweisen Konvergenz.

4. Def Sei E ein reeller Vektorraum, sei $A \subseteq X$.

Ein Punkt $a \in A$ heißt Extrempunkt in A, falls gilt: ist $x, y \in A$, $t \in [0,1]$ mit $sx + (1-s)y = a$, so ist $x = a$ oder $y = a$.



Theorem (Krein-Milman)

Sei E ein lokal konvexer TVR, sei $A \subseteq E$ kompakt, sei $B \subseteq A$ die Menge der extremen Punkte von A. Dann gilt

$$\overline{\mathrm{conv}(B)} \supseteq A.$$

(→ Rudin, Functional Analysis 3.22)

(insbesondere $B \neq \emptyset$ wenn $A \neq \emptyset$)

5. Def Sei G eine kompakte Gruppe. Dann wirkt G von links auf $C(G, \mathbb{R})$ durch

$$\begin{aligned} G \times C(G, \mathbb{R}) &\longrightarrow C(G, \mathbb{R}) \\ (g, \varphi) &\longmapsto g\varphi = [x \longmapsto \varphi(g^{-1}x)] \end{aligned}$$

Eine lineare Abbildung $J : C(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ heißt (Radon-) Integral, falls gilt: $\varphi \geq 0 \Rightarrow J(\varphi) \geq 0$.

J heißt normiert, falls $J(1) = 1$ gilt.

Bsp: $g \in G \rightsquigarrow J(\varphi) = \varphi(g)$ ist normiertes Integral.

Das Integral J heißt invariant, falls für alle $g \in G$, $\varphi \in C(G, \mathbb{R})$ gilt $J(g\varphi) = J(\varphi)$

Unser erstes Ziel ist zu zeigen, dass es genau ein normiertes invariantes Integral auf G gibt, das Haar-Integral

#

29.6.

6. <u>Lemma</u> Sei G eine kompakte Gruppe, sei $\varphi : G \to \mathbb{R}$ stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass $|\varphi(g) - \varphi(h)| < \varepsilon$ für alle $g, h \in G$ mit $g^{-1}h \in V$ gilt (φ ist <u>gleichmässig</u> stetig)

<u>Beweis</u> Für jedes $a \in G$ gibt es eine Einsumgebung $W_a \subseteq G$ so, dass für alle $x \in aW_a$ gilt $|\varphi(x) - \varphi(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wähle Einsumgebung $U_a \subseteq G$ so, dass $U_a U_a \subseteq W_a$ gilt. Da G kompakt ist, gibt es $a_1, \ldots, a_m \in G$ mit $G = \bigcup_{k=1}^{m} a_k U_{a_k}$.

Wähle Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass $V^{-1}V \subseteq U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_m}$.

Ist $gV \cap a_j U_{a_j} \neq \emptyset \Rightarrow gV \subseteq a_j U_{a_j} V^{-1} V \subseteq a_j W_{a_j}$.

Ist also $h \in gV$, so $|\varphi(h) - \varphi(a_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow |\varphi(h) - \varphi(g)| < \varepsilon$ $\square$

<u>Korollar</u> Die Linkswirkung

$$G \times C(G, \mathbb{R}) \longrightarrow C(G, \mathbb{R})$$
$$(g, \varphi) \longmapsto g\varphi = [x \mapsto \varphi(g^{-1}x)]$$

ist stetig (und linear).

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$ und $\varphi : G \to \mathbb{R}$ stetig. Wähle Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass

$|\varphi(g) - \varphi(h)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $g^{-1}h \in V$. Ist $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$,

so folgt $|\varphi(g) - \psi(h)| \leq |\varphi(g) - \varphi(h)| + |\varphi(h) - \psi(h)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \|g\varphi - h\psi\|_\infty < \varepsilon$ für $g^{-1}h \in V$, $\|\varphi - \psi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Beweis: Sei $\varphi : G \to \mathbb{R}$ stetig, sei $\varepsilon > 0$.

Wähle Einsumgebung $V \subseteq G$ so, dass

$$|\varphi(g^{-1}) - \varphi(h^{-1})| < \frac{\varepsilon}{2}$$ für alle $g^{-1}h \in V$ gilt.

Für $x \in G$ und $\psi : G \to \mathbb{R}$ stetig mit $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ folgt

$$|\varphi(g^{-1}x) - \psi(h^{-1}x)| \leq \underbrace{|\varphi(g^{-1}x) - \varphi(h^{-1}x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\varphi(h^{-1}x) - \psi(h^{-1}x)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}$$

$$\Rightarrow \|g\varphi - h\psi\|_\infty < \varepsilon$$

7. <u>Satz</u> Sei $(E, \|.\|)$ ein Banachraum, sei $C \subseteq E$ kompakt. Dann ist $\overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq E$ kompakt.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon > 0$. Da C kompakt ist, gibt es eine endliche Menge $A \subseteq C$ mit $C \subseteq A + B_{\varepsilon/3}(0)$. Da A endlich ist, ist $L = \mathrm{conv}(A)$ kompakt. Also gibt es $B \subseteq L$ endlich mit $L \subseteq B + B_{\varepsilon/3}(x)$. Die Menge

$L + \overline{B}_{\varepsilon/3}(0)$ ist abg (§1.17) und <u>konvex</u>.

Jetzt $$C \subseteq A + B_{\varepsilon/3}(0) \subseteq \underbrace{L + \overline{B}_{\varepsilon/3}(0)}_{\text{convex + abg}} \subseteq B + \overline{B}_{\varepsilon/3}(0) + \overline{B}_{\varepsilon/3}(0) \subseteq B + B_{\varepsilon}(0)$$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}(C) \subseteq B + B_{\varepsilon}(0) \Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}(C)$ total beschränkt

$\Rightarrow \mathrm{conv}(C)$ kompakt, da E vollständig. $\square$

8. <u>Satz</u> (Kakutanis Fixpunktsatz) Sei E ein lokalkonvexer TVR, sei $A \subseteq E$ kompakt und konvex. Sei G eine kompakte Gruppe, die linear und stetig auf E wirkt. Falls A G-invariant ist ($\forall g \in G \ \ g(A) \subseteq A$) so hat G einen <u>Fixpunkt</u> $a \in A$, d.h. $g(a) = a$ für alle $g \in G$.

<u>Beweis</u> Sei $P = \{ B \subseteq A \mid B \text{ kompakt, konvex, } G\text{-invariant} \}$. Dann ist $(P, \supseteq)$ induktiv geordnet, also gibt es nach Zorns Lemma ein minimales $B \in P$. Sei $u, v \in B$, $w = \frac{1}{2}(u+v) \Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}(G(w)) \subseteq B \Rightarrow \overline{\mathrm{conv}}(G(w)) = B$. Nach Krein-Milman § 5.4 gibt es ein extremales $g(w) \in B$, aber $g(w) = g(u) + g(v) \Rightarrow w = u$ oder $w = v \Rightarrow u = v$

$\Rightarrow B = \{w\}$. $\square$

9. <u>Theorem</u> (<u>Haar</u>) Sei G eine kompakte Gruppe. Dann gibt es genau ein invariantes normiertes Integral J auf G, das <u>Haar-Integral</u>.

<u>Beweis</u> Sei $P = \{ J : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \mid J \text{ ist normiertes Integral} \}$.
Für $J \in P$ gilt wegen $|\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty$, dass J stetig ist ($\|\varphi - \psi\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow |J(\varphi) - J(\psi)| < \varepsilon$). Sei
$E = \{ f : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear + stetig} \} \Rightarrow P \subseteq E$.
Wir versehen E mit der Topologie der punktweisen Konvergenz, $E \subseteq \mathbb{R}^{C(G,\mathbb{R})}$. Für $J \in P$ gilt

$$J \in \Big(\prod_{\varphi \in C(G,\mathbb{R})} [-\|\varphi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty] \Big) \cap E \Rightarrow P \ \underline{\text{kompakt}}.$$

Weiter $P \neq \emptyset$, denn z.B. $J(\varphi) = \varphi(g)$ ist normiertes Integral.
Die Wirkung $E \times G \to E$, $(f,g) \longmapsto (f \circ g)$ ist stetig, denn: $\varphi \in C(G,\mathbb{R}) \rightsquigarrow$

$$(f,g) \xmapsto[\text{stetig}]{} (f, g\varphi) \xmapsto[\text{auswerten}]{} f(g\varphi) \quad \text{stetig} \quad (\text{k-o-Topologie!})$$

Nach § 5.8 hat G einen Fixpunkt in P, denn:
$J \in P \Rightarrow J \circ g \in P$ weil für $\underline{1}$ gilt $g\underline{1} = \underline{1}$.

Sei J dieser Fixpunkt. Dann ist J ein invariantes normiertes Integral.

Zur Eindeutigkeit. Sei $\varphi : G \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig. Dann ist $G(\varphi) = \{ g\varphi \mid g \in G \} \subseteq C(G, \mathbb{R})$ kompakt (weil G kompakt ist), also ist $A = \overline{\mathrm{conv}}(G(\varphi))$ kompakt nach § 5.7 und G-invariant (weil $G(\varphi)$ G-invariant ist). Folglich hat G einen Fixpunkt ψ in $\overline{\mathrm{conv}}(G(\varphi))$. Es folgt $\psi = \mathrm{const}$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $a_1, \dots, a_m \in [0,1]$, $\sum a_j = 1$, $g_1, \dots, g_m \in G$ mit $\| \sum_{j=1}^{m} a_j g_j \varphi - \psi \|_\infty < \varepsilon$. Nun gilt

$$J\Big(\sum_{j=1}^{m} a_j g_j \varphi\Big) = J(\varphi) \quad \Rightarrow J(\varphi) = J(\psi) = \|\psi\|_\infty$$

Die rechte Seite ist unabhängig von J. Also ist J eindeutig auf $\{ \varphi : G \xrightarrow[\text{stetig}]{} \mathbb{R} \mid \varphi \geq 0 \}$. Aber zu $\varphi : G \to \mathbb{R}$ stetig setze $\varphi^+ = \max\{\varphi, 0\}$, $\varphi^- = \min\{\varphi, 0\}$

$\Rightarrow \varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, $\varphi^+, -\varphi^- \geq 0$ $\square$

Konvention Sei G eine kompakte Gruppe. Für das Haar-Integral J auf G schreiben wir formal

$$J(\varphi) = \int_G \varphi(g)\, dg$$

10. <u>Eigenschaft des Haar-Integrals</u> Sei G eine kompakte Gruppe mit ihrem Haar-Integral. Dann gilt für $\varphi \in C(G,\mathbb{R})$

$$\int_G \varphi(g)\,dg = \int_G \varphi(g^{-1})\,dg$$

Für $a \in G$ ist $\int_G \varphi(ag)\,dg = \int_G \varphi(ga)\,dg$.

Ist $\varphi > 0$, so ist $\int_G \varphi(g)\,dg > 0$.

<u>Bew.:</u> Sei $a \in G$. Nach Voraussetzung gilt

$$\int_G \varphi(ag)\,dg = \int_G (a^{-1}\varphi)(g)\,dg = \int_G \varphi(g)\,dg.$$ Setze

$J(\varphi) = \int_G \varphi(ga)\,dg$. Für $b \in G$ gilt dann mit $\psi(x) = \varphi(xa)$

$$J(b\varphi) = \int_G \varphi(b^{-1}ga)\,dg = \int_G \psi(b^{-1}g)\,dg = \int_G \psi(g)\,dg = J(\varphi)$$

sowie $J(1) = 1 \Rightarrow J(\varphi) = \int_G \varphi(g)\,dg$. $\left(\Rightarrow \int_G \varphi(g^{-1})\,dg = \int_G \varphi(g)\,dg \right)$

Ist $\varphi > 0$ so gibt es $\varepsilon > 0$ und $U \neq \emptyset$ offen mit $\varphi(x) \geq \varepsilon$ für alle $x \in U$. Weiter gibt es $g_1, \dots, g_m \in G$ mit $G = \bigcup_{j=1}^m g_j U$. Für $\psi = \sum_{j=1}^m g_j^{-1}\varphi$ folgt $\psi \geq \varepsilon$

$\Rightarrow \int \psi(g)\,dg \geq \varepsilon \Rightarrow \int \varphi(g)\,dg > 0$ $\square$

11. <u>Erinnerung</u> Ein Prä-Hilbertraum (über $\mathbb{R}$) ist ein reeller Vektorraum E mit einer symmetrischen positiv definiten Bilinearform $\langle\,|\,\rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ ($\langle u|v\rangle = \langle v|u\rangle$, $\langle u|u\rangle > 0$ für $u \neq 0$). Dann ist $\|u\|_2 = \sqrt{\langle u,u\rangle}$ eine Norm auf E (CSU) und $(E, \|.\|_2)$ ist ein (lokal konvexer) TVR. Weiter gilt

$2\langle u|v\rangle = \|u+v\|_2^2 - \|u\|_2^2 - \|v\|_2^2$, d.h. $\|.\|_2$ bestimmt $\langle\,|\,\rangle$.

Falls $(E, \|.\|_2)$ vollständig ist, so heißt E <u>Hilbertraum</u>.

Ist $\hat{E}$ die metrische Vervollständigung des Prä-Hilbertraum E, so ist $\hat{E}$ ein Hilbertraum, mit $\langle u|v\rangle = \frac{1}{2}(\|u+v\|_2^2 - \|u\|_2^2 - \|v\|_2^2)$

12. <u>Lemma</u> Sei G eine kompakte Gruppe. Dann ist $C(G,\mathbb{R})$ ein Prä-Hilbertraum bzgl

$$\langle \varphi|\psi\rangle = \int_G \varphi(g)\psi(g)\,dg$$

<u>Beweis</u> Klar: $\langle\,|\,\rangle$ ist bilinear (weil $\int_G dg$ linear ist)

$\langle\varphi|\varphi\rangle = \int_G \underbrace{\varphi(g)\varphi(g)}_{\geq 0}\,dg \geq 0$ und $\langle\varphi|\varphi\rangle > 0$ für $\varphi > 0$,

da dann auch $\varphi^2 > 0$. $\square$

Die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $C(G,\mathbb{R})$ bezüglich der Norm $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_G \varphi^2(g)\,dg}$

bezeichnen wir mit $L^2(G,\mathbb{R})$ – den Raum der quadratintegrablen Funktionen auf G.

Beachte den Unterschied zwischen $\|\varphi\|_2 = \sqrt{\int_G \varphi^2(x)\,dx}$ und $\|\varphi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)| \mid x\in G\}$. Für $\varphi,\psi \in C(G,\mathbb{R})$ gilt stets

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_G \varphi(x)\psi(x)\,dx \le \int_G |\varphi(x)|\cdot|\psi(x)|\,dx \le \int_G \|\varphi\|_\infty\cdot\|\psi\|_\infty\,dx$$
$$= \|\varphi\|_\infty\cdot\|\psi\|_\infty.$$

Insbesondere gilt $\|\varphi\|_2 \le \|\varphi\|_\infty$. #

13. Def Sei E ein (reeller) Prä-Hilbertraum. Eine bijektive lineare Abbildung $T: E \to E$ heißt orthogonal, falls $\langle Tu|Tv\rangle = \langle u|v\rangle$ für alle $u,v\in E$ gilt.

Sei G eine topologische Gruppe und sei E ein Hilbertraum. Eine stetige lineare Wirkung

$$G\times E \to E$$

heißt orthogonale Darstellung, falls für alle $g\in G$, $u,v\in E$ gilt $\langle gu|gv\rangle = \langle u|v\rangle$. Wir nennen E dann einen (reellen) Hilbert-G-Modul

14. **Satz** Sei G eine kompakte Gruppe. Dann ist $L^2(G,\mathbb{R})$ ein Hilbert-G-Modul. Die Wirkung von G ist treu, d.h. $gu = u$ für alle $u \in E \Rightarrow g = e$.

Beweis Ist $\varphi \in C(G,\mathbb{R})$, so gilt $\|g\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$, da das Haar-Integral invariant ist. Damit erhalten wir für jedes $g \in G$ eine eindeutige orthogonale Abbildung

$$g : L^2(G,\mathbb{R}) \to L^2(G,\mathbb{R}), \quad u \mapsto gu.$$

Wir zeigen, dass $G \times L^2(G,\mathbb{R}) \to L^2(G,\mathbb{R})$ stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$, sei $g \in G$ und sei $u \in L^2(G,\mathbb{R})$. Wir wählen $\varphi \in C(G,\mathbb{R})$ mit $\|\varphi - u\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Sei $V \subseteq G$ eine Einsumgebung mit $\|\varphi - a\varphi\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $a \in V$. Es folgt $\|\varphi - a\varphi\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $a \in V$. Ist $w \in L^2(G,\mathbb{R})$ mit $\|u - w\|_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ und $h \in gV$, so folgt

$$\begin{aligned}\|gu - hw\|_2 &\le \|gu - g\varphi\|_2 + \|g\varphi - h\varphi\|_2 + \|h\varphi - hu\|_2 + \|hu - hw\|_2 \\ &\le \|u - \varphi\|_2 + \|\varphi - g^{-1}h\varphi\|_2 + \|\varphi - u\|_2 + \|u - w\|_2 < \varepsilon.\end{aligned}$$

Sei $g \in G - \{e\}$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : G \to [0,1]$ mit $\varphi(e) = 0$, $\varphi(g) = 1$. Es folgt $g\varphi \neq \varphi$. $\square$

15. <u>Lemma</u> Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume, sei $T: E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

(i) T ist stetig

(ii) T ist Lipschitz-stetig

(iii) es gibt $r \geq 0$ so, dass $\|Tu\|_F \leq r$ für alle $u \in E$ mit $\|u\|_E \leq 1$.

<u>Beweis</u>: (iii) $\Rightarrow$ (ii): $\|Tu - Tv\|_F = \|T(u-v)\|_F$

$\leq r \cdot \|u-v\|_E$. (ii) $\Rightarrow$ (i) ist klar.

(i) $\Rightarrow$ (iii): es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass gilt:

$\|u\|_E \leq \varepsilon \Rightarrow \|Tu\|_F \leq 1$. Setze $r = \frac{1}{\varepsilon}$ $\square$

16. Def Man nennt T <u>beschränkt</u>, wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind. Lineare Abbildungen heißen in der Funktionalanalysis auch <u>Operatoren</u>.

Die <u>Norm</u> eines beschränkten Operators $T: E \to F$ ist als $\|T\| = \sup \{ \|Tu\|_F \mid u \in E, \|u\|_E \leq 1 \}$.

Man zeigt leicht:

$$L(E,F) = \{ T: E \to F \mid T \text{ beschränkter Operator} \}$$

ist ein normierter Vektorraum bezüglich der Operatornorm. Ist F vollständig, so ist auch $L(E,F)$ vollständig.

Sei E ein Prä-Hilbertraum. Ein Operator $T: E \to E$ heißt <u>selbstadjungiert</u>, wenn für alle $u, v \in E$ gilt
$\langle Tu | v \rangle = \langle u | Tv \rangle$.

17. <u>Satz</u> Sei E ein (Prä) Hilbertraum, sei $T: E \to E$ beschränkt und selbstadjungiert. Dann gilt

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tu | u \rangle| \mid u \in E, \|u\| \leq 1 \}$$

<u>Beweis</u> Sei $\tau = \sup \{ |\langle Tu | u \rangle| \mid u \in E, \|u\| \leq 1 \}$.
Nach der CSU $[\, |\langle v | w \rangle| \leq \|v\|_2 \cdot \|w\|_2 \,]$ gilt

$|\langle Tu | u \rangle| \leq \|Tu\|_2 \cdot \|u\|_2$. Es folgt $\tau \leq \|T\|$.

Weiter gilt $\langle Tu | u \rangle \leq \tau \cdot \|u\|_2^2$, sowie

$$\langle T(x+y) | x+y \rangle - \langle T(x-y) | x-y \rangle = 4 \langle Tx | y \rangle$$
$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Wir erhalten mit $x = su$, $y = \frac{1}{s} Tu$, $s > 0$

$$4 \|Tu\|_2^2 \leq \tau \cdot \left(\|su + \tfrac{1}{s} Tu\|_2^2 + \|su - \tfrac{1}{s} Tu\|_2^2 \right)$$
$$= 2 \cdot \tau \left(s^2 \|u\|_2^2 + \tfrac{1}{s^2} \|Tu\|_2^2 \right)$$

Ist $Tu \neq 0$ setze $s = \sqrt{\frac{\|Tu\|_2}{\|u\|_2}}$ $\Rightarrow 4 \|Tu\|_2^2 \leq 2 \cdot \tau \cdot 2 \|Tu\|_2 \cdot \|u\|$

$\Rightarrow \|Tu\|_2 \leq \tau \cdot \|u\|_2$. Das gilt auch für $Tu = 0$

$\Rightarrow \|T\| \leq \tau$. $\square$

18. **Def** Sei E ein Hilbertraum. Ein Operator $T: E \to E$ heißt kompakt, wenn

$$\overline{\{Tu \mid \|u\|_2 \leq 1\}} \subseteq E \text{ kompakt ist.}$$

Dann ist T insbesondere beschränkt.

Beispiel $w \in E$, $w \neq 0$. Jedes $u \in E$ hat eindeutige orthogonale Zerlegung $u = \underbrace{sw}_{=Tu} + v$, $s \in \mathbb{R}$, $v \perp w$.

Dann ist T kompakt.

Theorem (Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren)

Sei E ein reeller Hilbertraum, sei $T: E \to E$ kompakt und selbstadjungiert. Sei $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der Eigenwerte von T. Für $s \in \sigma(T)$ sei E_s der Eigenraum zum Eigenwert s. Dann gilt:

(i) Sind s, t verschiedene Eigenwerte, so ist $E_s \perp E_t$

(ii) $\|T\| \in \sigma(T)$ oder $-\|T\| \in \sigma(T)$

(iii) $\bigoplus_{s \in \sigma(T)} E_s \subseteq E$ ist dicht.

(iv) $\sigma(T)$ ist abzählbar (ev. endlich). Falls r ein Häufungspunkt von $\sigma(T)$ ist, so ist $r = 0$.

(v) Ist $s \in \sigma(T)$, $s \neq 0$, so ist $\dim E_s < \infty$.

Beweis (i) $u \in E_s$, $v \in E_t$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \langle Tu \mid v \rangle &= s\langle u \mid v \rangle \\ = \langle u \mid Tv \rangle &= t\langle u, v \rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \langle u \mid v \rangle = 0$$

Sei OE $T \neq 0$ (sonst stimmt alles).

(ii): Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Vektoren mit $\|u_n\|_2 \le 1$ und $\|T\| = \lim_n |\langle Tu_n | u_n\rangle|$. Da T kompakt ist, dürfen wir OE annehmen, dass $\lim_n Tu_n = v$ existiert und dass $\lim_n \langle Tu_n | u_n\rangle = t$ existiert. Nun gilt

$$0 \le \|Tu_n - tu_n\|^2 = \|Tu_n\|_2^2 + t^2\|u_n\|_2^2 - 2\cdot t\,\langle Tu_n | u_n\rangle$$
$$\le 2\cdot\|T\| - 2\cdot t\cdot\langle Tu_n | u_n\rangle \xrightarrow[n]{} 0$$

$\Rightarrow$ $v = \lim_n t\cdot u_n = t\cdot\lim_n u_n$ existiert $\Rightarrow$ $\lim_n u_n = u = \frac{1}{t}v$

$\Rightarrow$ $Tu = tu$ $\Rightarrow$ $E_t \neq 0$, $|t| = \|T\| > 0$.

(iii): Ist $D \subseteq E$ ein T-invarianter Teilraum, so ist auch $D^\perp$ T-invariant. Setze $F = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(T)} E_\lambda$. Dann gilt $T(F)\subseteq F \Rightarrow T(\overline{F}) \subseteq \overline{F}$. Weiter ist $D = \overline{F}^\perp$ T-invariant, $S = T|_D^D : D \to D$ ist kompakt $\Rightarrow$ S hat Eigenraum in D oder $D = 0$ $\Rightarrow$ $D = 0$, $\overline{F}^\perp = 0 \Rightarrow \overline{F} = E$. (*)

(iv): Für $\varepsilon > 0$ sei $\Lambda_\varepsilon = \{\lambda\in\sigma(T) \mid |\lambda| \ge \varepsilon\}$.

<u>Beh</u>: $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_\varepsilon} E_\lambda = L$ hat <u>endliche Dimension</u>.

Sonst gäbe es in L eine unendliche Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise orthogonaler Eigenvektoren der Länge 1, $Tv_n = t_n v_n$

$\Rightarrow$ $\|Tv_n - Tv_m\|^2 \ge 2\varepsilon$ für $m \neq n$ ↯ weil T kompakt ist. □

Damit ist Δ_ε endlich und jedes E_ε endlichdimensional, wenn $t \in \sigma(T) - \{0\}$. Es folgt (iv) und (v) $\square$

(*) Ist E ein Hilbertraum, D ein abg. UVR, so ist $E = D \oplus D^\perp$. [Rudin, 12.4], o.ä. #

19. __Lemma__ Sei E ein Prä-Hilbertraum, sei $K \subseteq E$ konvex und vollständig. Dann gibt es zu jedem u genau ein $p(u) \in K$ mit minimalem Abstand zu u.

__Beweis__ Sei $r = \inf\{\|u-v\|_2 \mid v \in K\}$. Für $v, w \in K$ gilt

$$\|(v-u)-(w-u)\|_2^2 + \|(v-u)+(w-u)\|_2^2 = 2\|v-u\|_2^2 + 2\|w-u\|_2^2,$$

also

$$\|v-w\|_2^2 = 2\|v-u\|_2^2 + 2\|w-u\|_2^2 - 4\|u - \tfrac{1}{2}(v+w)\|_2^2 \le 2\|v-u\|_2^2 + 2\cdot\|w-u\|_2^2 - 4r^2.$$

Ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $\lim_n \|v_n - u\|_2 = r$, so ist dies eine Cauchy-Folge, mit Grenzwert v, $\|v-u\|_2^2 = r^2$.
Ist $\|u-v\|_2 = \|u-w\|_2 = r$ (für $v, w \in K$), so folgt $\|v-w\|_2 = 0$. $\square$

__Korollar__ Ist E ein Hilbertraum und $D \subseteq E$ ein abg. linearer Teilraum, so gilt $E = D \oplus D^\perp$.

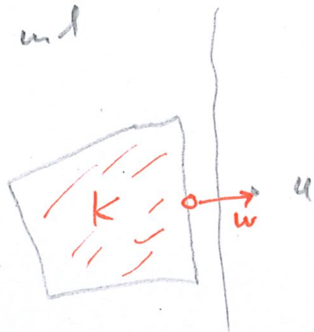
__Beweis__ Für $u \in E$ setze $u_1 = p(u)$, $p: E \to D$ wie oben, $u_2 = u - u_1$. __Beh: $u_2 \in D^\perp$.__ Für $w \in D - \{0\}$ ist ($s \in \mathbb{R}$)

$$\|u_2\|_2^2 \le \|u_2 + s\cdot w\|_2^2 = \|u_2\|_2^2 + s^2\|w\|_2^2 + 2s\langle u_2 | w\rangle.$$

Mit $s = \frac{-1}{\|w\|_2^2}\langle w | u_2\rangle \Rightarrow 0 \le \frac{-1}{\|w\|_2^2}\langle w|u_2\rangle^2 \Rightarrow \langle w|u_2\rangle = 0$

Also $u_2 \in D^\perp \Rightarrow E = D + D^\perp$. Da $D \cap D^\perp = \{0\}$ (weil $\langle\,|\,\rangle$ positiv definit) folgt $E = D \oplus D^\perp$ □

20. <u>Lemma</u> Sei E ein Hilbertraum, sei $K \subseteq E$ abg. und konvex, sei $u \in E - K$. Dann gibt es $w \in E$, $s \in \mathbb{R}$ so, dass $\langle w|u\rangle > s$ und $\langle w|v\rangle \leq s$ für alle $v \in K$.



<u>Beweis</u> Sei $w = u - p(u) \neq 0$, und

$$s = \langle p(u)|w\rangle \Rightarrow \underbrace{\langle w|w\rangle}_{>0} = \langle w|u\rangle - s.$$

Für $v \in E$ mit $\langle w|v\rangle > s$ betrachte die Abbildung

$$t \mapsto \|(1-t)p(u) + tv - u\|_2^2 = \|w\|_2^2 + 2t\langle p(u) - v|w\rangle + t^2\|v - p(u)\|_2^2$$

Die Ableitung in $t = 0$ ist

$$2s - 2\langle w|v\rangle < 0$$

also gibt es $t \in [0,1]$ mit $\|(1-t)p(u) + tv - u\|_2^2 < \|p(u) - u\|_2^2 = \|w\|_2^2$

$\Rightarrow v \notin K$. □

21. <u>Lemma</u> Sei E ein Hilbertraum, sei $\lambda : E \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Dann gibt es genau ein $w \in E$ so, dass

$$\lambda = \langle w|-\rangle.$$

<u>Beweis</u> Das ist klar, wenn $\lambda = 0$. Für $\lambda \neq 0$ sehe

$F = \ker(\lambda) \Rightarrow E = F \oplus F^\perp$ und $\dim F^\perp = 1$.

Wähle $v \in F^\perp - \{0\} \Rightarrow \lambda(v) = s \neq 0$. Für $w = \frac{s}{\|v\|_2^2} v$

gilt $\lambda(w) = \frac{s^2}{\|v\|_2^2} = \langle w | w \rangle$. Für $u = u_1 + u_2$, $u_1 \in \ker(\lambda)$, $u_2 \in F^\perp$

folgt $\lambda(u) = \lambda(u_2) = \lambda(r \cdot w) = r \langle w | w \rangle = \langle w | u \rangle$ $\qquad u_2 = r \cdot w$

Ist $\langle w | - \rangle = \langle \tilde{w} | - \rangle$, so $w - \tilde{w} \in E^\perp = \{0\}$.

□

22. Korollar Sei E ein Hilbertraum, sei $b : E \times E \to \mathbb{R}$ bilinear. Dann sind äquivalent:

(i) b ist stetig

(ii) es gibt $r \geq 0$ so, dass $|b(u,v)| \leq r \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$ für alle u, v

(iii) es gibt einen beschränkten Operator $T : E \to E$ so, dass

$$b(u,v) = \langle Tu | v \rangle \quad \text{für alle } u, v \in E.$$

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): es gibt $\varepsilon > 0$ so, dass $|b(u,v)| \leq 1$ für alle $u, v \in E$ mit $\|u\|_2, \|v\|_2 \leq \varepsilon$. Setze $r = \frac{1}{\varepsilon}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Für jedes $u \in E$ ist $b(u,-)$ linear + stetig $\Rightarrow$ es gibt es genau ein $Tu \in E$ mit $b(u,-) = \langle Tu | - \rangle$.

Die Bilinearität von b zeigt: T ist linear. Weiter gilt für

$\|u\|_2 \leq 1$ $\quad \underbrace{|\langle Tu | Tu \rangle|}_{\|Tu\|_2^2} = |b(u, Tu)| \leq r \cdot \|Tu\|_2 \Rightarrow \|Tu\|_2 \leq r$.

□

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist klar.

23. <u>Theorem</u> Sei G eine kompakte Gruppe, sei E ein Hilbert-G-Modul, sei $T: E \to E$ ein beschränkter Operator. Dann gibt es genau einen beschränkten Operator $\tilde{T}: E \to E$ mit $\langle \tilde{T}u | v \rangle = \int_G \langle T g^{-1} u | g^{-1} v \rangle \, dg$, ($\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$).
Für alle $g \in G$ gilt $g\tilde{T} = \tilde{T}g$.
Wenn T kompakt (bzw selbstadjungiert) ist, so auch $\tilde{T}$.

<u>Beweis</u>. Die Abbildung $g \mapsto \langle T g^{-1} u | g^{-1} v \rangle$ ist stetig.
Weiter ist $b(u,v) = \int_G \langle T g^{-1} u | g^{-1} v \rangle \, dg$ bilinear und

$$|\langle T g^{-1} u | g^{-1} v \rangle| \leq \|T\| \cdot \|g^{-1} u\|_2 \cdot \|g^{-1} v\|_2 = \|T\| \cdot \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$$

$\Rightarrow |b(u,v)| \leq \|T\| \cdot \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$. Nach §5.22 ist $\tilde{T}$ eindeutig bestimmt, und wegen

$$\|\langle \tilde{T}u | v \rangle\| \leq \|T\| \cdot \|u\|_2 \cdot \|v\|_2$$

gilt $\|\tilde{T}u\|_2^2 \leq \|T\|_2 \cdot \|u\|_2 \cdot \|Tu\|_2 \Rightarrow \|\tilde{T}\| \leq \|T\|$.

Für $g \in G$ gilt

$$\langle g\tilde{T}g^{-1}u | v \rangle = \langle \tilde{T} g^{-1} u | g^{-1} v \rangle = \int_G \langle T x^{-1} g^{-1} u | x^{-1} g^{-1} v \rangle \, dx$$

$$= \int_G \langle T x^{-1} u | x^{-1} v \rangle \, dx = \langle \tilde{T} u | v \rangle \Rightarrow g \tilde{T} g^{-1} = \tilde{T}.$$

Wenn T selbstadjungiert ist, so ist $\langle T - | - \rangle$ symmetrisch $\Rightarrow \langle \tilde{T} - | - \rangle$ ist symmetrisch $\Rightarrow \tilde{T}$ ist selbstadjungiert.

Wenn T kompakt ist, so ist $A = \{ Tu \mid \|u\|_2 \le 1 \} \subseteq E$ kompakt $\Rightarrow$ $GA = \bigcup \{ ga \mid g \in G, a \in A \} \subseteq E$ kompakt $\Rightarrow$ $K = \overline{\mathrm{conv}}(GA)$ ist kompakt (vgl §5.7) und G-invariant. Beh: $\underline{\|v\|_2 \le 1 \Rightarrow \tilde{T}v \in K}$.

Sei $u \in E - K$. Dann gibt es $w \in E$, $s \in \mathbb{R}$ mit $\langle w | u \rangle > s$, $\langle w | v \rangle \le s \;\forall v \in K$ vgl. §5.20

Für $\|v\|_2 \le 1$, $g \in G$ gilt $gTg^{-1}v \in GA \subseteq K$, also

$$\langle \tilde{T}v | w \rangle = \int_G \langle Tg^{-1}v | g^{-1}w \rangle \, dg = \int_G \underbrace{\langle gTg^{-1}v | w \rangle}_{\le s} \, dg \le s$$

Es folgt $\tilde{T}v \in K$ für $\|v\|_2 \le 1 \Rightarrow \tilde{T}$ ist kompakt. $\square$

24. <u>Def</u> Ein Hilbert-G-Modul E heißt <u>irreduzibel</u>, wenn $0, E$ die einzigen abg. G-invarianten UVR sind.

<u>Lemma</u> Sei G eine kompakte Gruppe, sei $E \neq 0$ ein Hilbert-G-Modul. Dann enthält E ein <u>endlich dim.</u> irreduzibles Hilbert-G-Modul $F \subseteq E$.

<u>Bew.</u> Sei $w \in E$, $w \neq 0$, $Tu = w \langle u | w \rangle$.

Dann ist T kompakt und selbstadjungiert $\Rightarrow$ $\tilde{T}$ ist kompakt und selbstadjungiert. Weiter ist $\tilde{T} \neq 0$, denn die Abbildung

$$g \longmapsto \langle Tg^{-1}w | g^{-1}w \rangle = \langle w \langle g^{-1}w | w \rangle | g^{-1}w \rangle = |\langle g^{-1}w | w \rangle|^2$$

ist $\neq 0 \Rightarrow \langle \tilde{T}w | w \rangle > 0$

Nach dem Spektralsatz §5.18 hat $\tilde{T}$ einen endlich dimensionalen Eigenraum $F = E_s$, $s \neq 0$. Für $v \in E_s$ gilt $\tilde{T}(gv) = g\tilde{T}v = s\,gv \Rightarrow E_s$ ist G-invariant. Wähle $0 \neq F \subseteq E_s$ minimal G-invariant.
$\Rightarrow F$ ist endlich dim. irred. Teilraum. $\square$

<u>Theorem</u> Sei G eine kompakte Gruppe, sei E ein Hilbert-G-Modul. Dann gibt es eine Familie $(F_i)_{i \in I}$ von paarweise orthogonalen irreduziblen Hilbert-G-Moduln F_i endlicher Dimension mit $E = \overline{\bigoplus_{i \in I} F_i}$.

<u>Beweis</u> Mit Zorns Lemma folgt: es gibt eine maximale Familie von paarweise orthogonalen irreduziblen Hilbert-G-Moduln $(F_i)_{i \in I}$. Sei $F = \overline{\bigoplus_{i \in I} F_i} \Rightarrow$ $E = F \oplus F^\perp$. Nach dem Lemma gibt es in $F^\perp$ einen irreduziblen Teilmodul, falls $F^\perp \neq 0$. $\lightning$ Also ist $F = E$.

$\square$

25. Theorem (Peter–Weyl) Sei G eine kompakte Gruppe, sei $g \in G$, $g \neq e$. Dann existiert ein endlichdimensionaler Hilbert-G-Modul $E \cong \mathbb{R}^m$ so, dass g nicht-trivial auf E wirkt.

Beweis: Nach § 5.24 gilt $L^2(G,\mathbb{R}) = \overline{\bigoplus_{i\in I} E_i}$,

$E_i \cong \mathbb{R}^{m_i}$ endlich dim. Hilbert-G-Modul. Nach § 5.14 gibt es $w \in L^2(G,\mathbb{R})$ mit $gw \neq w$. $\Rightarrow$ es gibt $w \in \bigoplus_{i\in I} E_i$ mit $gw \neq w$ $\Rightarrow$ es gibt $i \in I$, $w \in E_i$ mit $gw \neq w$. $\square$

Korollar: Sei G eine kompakte Gruppe. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$O(m) = \{ h \in GL_m\mathbb{R} \mid h^T h = \mathbb{1}_m \}$ die orthogonale Gruppe.

Dann gibt es $m_i \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, $i \in I$ und einen injektiven, abg. Morphismus

$$\rho : G \to \prod_{i\in I} O(m_i)$$

I Indexmenge (ev. unendlich!)

d.h. jede kompakte Gruppe G ist isomorph zu einer abg. Untergruppe eines direkten Produktes von orthogonalen Gruppen.

Vgl. auch Thm § 1.31!

Beweis Schreibe $L^2(G) = \overline{\bigoplus_{i \in I} E_i}$, $E_i \cong \mathbb{R}^{n_i}$

Hilbert-G-Modul $\Rightarrow$ $(E_i, \langle \, | \, \rangle) \cong (\mathbb{R}^{n_i}, b)$

$b(u,v) = \sum u_i v_i$ Standard-Skalarprodukt

$\Rightarrow$ $\rho_i : G \to O(n_i)$, $g \longmapsto g|_{E_i}$ Morphismus.

Da $L^2(G, \mathbb{R})$ treuer G-Modul ist, ist die Abbildung $\rho : g \longmapsto (\rho_i(g))_{i \in I}$ injektiv. Da G kompakt ist, ist sie abgeschlossen. $\square$