§3 Die Baire-Eigenschaft und Metrisierbarkeit

1. Erinnerung. Sei X ein top. Raum. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt nirgends dicht, falls $\bar{N}$ leeres Inneres hat (es gibt keine offene Menge $U \neq \emptyset$ mit $U \subseteq \bar{N}$). Äquivalent: Es gibt eine offene dichte Menge $W \subseteq X$ mit $W \cap N = \emptyset$. Ist dann $M \subseteq N$, so ist M ebenfalls nirgends dicht.

Eine Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen heißt mager (oder in der alten Literatur: eine Menge 1. Kategorie)

M mager $\Leftrightarrow$ es gibt eine Familie $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ nirgends dichter Mengen N_k mit $M = \bigcup_{k \geq 1} N_k$

$\Leftrightarrow$ es gibt eine abzählbare Familie $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ offener dichter Mengen $W_k \subseteq X$ mit $M \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} W_k = \emptyset$

Man nennt X einen Baire-Raum, wenn für jede abzählbare Familie $(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$ offener dichter Mengen $W_k \subseteq X$ die Menge $\bigcap_{k=1}^{\infty} W_k$ dicht ist.

2. Lemma Sei X ein top. Raum. Dann sind äquivalent:

(i) X ist ein Baire-Raum

(ii) jede abzählbare Vereinigung abg. Teilm. $A_k \subseteq X$, $k \in \mathbb{N}$ mit leerem Inneren hat leeres Inneres

(iii) keine offene Menge $U \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ ist mager

(iv) Wenn $M \subseteq X$ mager ist, so ist $X - M$ dicht.

Beweis (i)$\Rightarrow$(ii): $U_k = X - A_k \rightsquigarrow U_k$ dicht

$\overset{(i)}{\rightsquigarrow} \bigcup_{k \geq 1} U_k$ dicht $\rightsquigarrow \bigcap_{k \geq 1} A_k$ hat leeres Innere.

(ii)$\Rightarrow$(iii): $M \subseteq X$ mager, $M = \bigcup_{k \geq 1} N_k$ N_k nirgends dicht

$\overset{(ii)}{\rightsquigarrow} M \subseteq \bigcup_{k \geq 1} \overline{N_k}$ hat leeres Inneres $\rightsquigarrow M$ nicht offen, wenn $M \neq \emptyset$.

(iii)$\Rightarrow$(iv): M mager $\rightsquigarrow$ das Innere W von M ist mager

$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} W = \emptyset \rightsquigarrow X - M$ dicht.

(iv)$\Rightarrow$(i): $(U_k)_{k \geq 1}$ abz. Familie offener dichter Mengen

$\rightsquigarrow M = X - \bigcap_{k \geq 1} U_k = \bigcap_{k \geq 1} (X - U_k)$ mager, also

$\bigcap_{k \geq 1} U_k$ dicht □

Baires Kategoriesatz sagt: jeder lokalkompakte Raum und jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire-Raum. Also ist $\mathbb{R}$ oder $[0,1]$ z.B. ein Baire-Raum. Dagegen ist $\mathbb{Q}$ kein Baire-Raum.

<u>Warnung</u>: in der Mengenlehre heißt

$X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ oft "<u>der Baire Raum</u>".

Wir benutzen diese Terminologie <u>nicht</u>. #

Aus §3.2(iii) folgt sofort: jede offene Teilmenge eines Baire-Raums ist wieder ein Baire-Raum. Das geht etwas allgemeiner.

3. <u>Erinnerung/Definition</u>. Sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt <u>G_δ-Menge</u> ($G \mathrel{\hat=}$ "Gebiet", $\delta \mathrel{\hat=}$ "Durchschnitt"), falls Y ein Durchschnitt von abzählbar vielen offenen Mengen ist, $Y = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$, $U_k \subseteq X$ offen.

<u>Lemma</u> Sei X ein Baire-Raum, sei $Y \subseteq X$ eine dichte G_δ-Menge. Dann ist Y ein Baire-Raum. Wenn $X \neq \emptyset$, so ist Y nicht mager in X.

<u>Beweis</u> Schreibe $Y = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$. Da Y dicht ist, ist jedes U_k dicht. Seien B_ℓ, $\ell \geq 1$ in Y offen in der Teilraumtopologie und dicht. ⇝ es gibt $W_k \subseteq X$ offen mit $B_\ell = Y \cap W_\ell$ ⇝ W_ℓ dicht in X. Weiter

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B_\ell = \bigcap_{k,\ell=1}^{\infty} W_k \cap U_\ell \rightsquigarrow \bigcap_{\ell=1}^{\infty} B_k \text{ dicht in } X, \text{ also}$$

auch dicht in Y ⇒ Y ist Baire-Raum

Weiter ist $X - Y = \bigcup_{k\geq 1}(X - U_k)$ mager. Wenn Y auch

mager ist in X, so ist X mager $\Rightarrow X = \emptyset$ $\square$

<u>Beispiele</u>: (i) $\mathbb{R}$ ist ein Baire-Raum.

(ii) $\mathbb{Q}$ ist <u>kein</u> Baire-Raum, denn $\mathbb{Q} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$.

(iii) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ist ein Baire-Raum, denn $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} \mathbb{R} - \{q\}$.

4. <u>Theorem</u> (Baires Kategoriesatz) Jeder lokal kompakte Raum und jeder vollständig metrisierbare top. Raum ist ein Baire-Raum.

<u>Beweis</u> (X, d) vollständig, $U_k, k \geq 1$ offen und dicht, $V \subseteq X$ offen und nicht leer. Z.z.: $V \cap \bigcap_{k\geq 1} U_k \neq \emptyset$.

Wähle offenen Ball $\overline{B}_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq V \cap B_1$ mit Radius $\varepsilon_1 < \frac{1}{2}$, dann

$\overline{B}_{\varepsilon_2}(x_2) \subseteq B_{\varepsilon_1}(x_1) \cap B_2$ mit Radius $\varepsilon_2 < \frac{1}{3}$ usw $\Rightarrow$

$(x_i)_{i=1}^{\infty}$ Cauchy-Folge mit Grenzwert $x \in \bigcap_{k\geq 1} \overline{B}_{\varepsilon_k}(x_k) \cap \bigcap_{k\geq 1} U_k \cap V$ $\triangleright$

X lokal kompakt: B_1 Umgebung von $x_1 \in V \cap U_1$ mit

$\overline{B}_1 \subseteq V \cap U_1$ kompakt, dann $x_2 \in \overline{B}_2 \subseteq B_1 \cap U_2 \Rightarrow$

$\emptyset \neq \bigcap_{k\geq 2} \overline{B}_k \subseteq \overline{B}_1$ $\square$

4. <u>Theorem</u> (Banachs Kategoriesatz). Sei X ein top. Raum, sei $\mathcal{U}$ eine Menge offener Mengen in X, sei $A \subseteq X$. Falls für jedes $U \in \mathcal{U}$ der Schnitt $A \cap U$ mager ist, so ist $A \cap \bigcup \mathcal{U}$ mager. Insbesondere ist jede Vereinigung offener magerer Mengen wieder mager.

<u>Beweis</u> OE $\mathcal{U} \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{C}$ die Menge, deren Elemente $\mathcal{W}$ Mengen von offenen Teilmengen von X sind mit:

- $W_1, W_2 \in \mathcal{W} \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \emptyset$ oder $W_1 = W_2$
- $W \in \mathcal{W} \Rightarrow$ es gibt $U \in \mathcal{U}$ mit $W \subseteq U$.

Die Menge $(\mathcal{C}, \subseteq)$ ist induktiv geordnet durch Inklusion.

Sei $\mathcal{W} \in \mathcal{C}$ ein "$\subseteq$"-maximales Element ($\to$ Zorns Lemma).

Setze $M = \overline{\bigcup \mathcal{U}} - \bigcup \mathcal{W} \rightsquigarrow M$ abg in X.

<u>Beh</u>: M hat leeres Inneres.

<u>Denn</u>: $\emptyset \neq V \subseteq M$ offen $\rightsquigarrow \exists\, U \in \mathcal{U}$ mit $V \cap U \neq \emptyset$

$\rightsquigarrow \mathcal{W} \cup \{V \cap U\} \in \mathcal{C}$ ↯ weil $\mathcal{W}$ maximal war. ▷

Folglich ist M nirgends dicht und damit <u>mager</u>.

Für jedes $W \in \mathcal{W}$ ist $A \cap W$ mager $\Rightarrow$ es gibt nirgends dichte Mengen $N_{W,n} \subseteq W$, $n \geq 1$, mit $A \cap W = \bigcup_{n \geq 1} N_{W,n}$. Sei $N_n = \bigcup \{ N_{W,n} \mid W \in \mathcal{W} \}$.

<u>Beh</u>: N_n ist nirgends dicht.

<u>Denn</u> wäre $\emptyset \neq V \subseteq \overline{N_n}$ offen $\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{W}$ mit

$V \cap W \neq \emptyset$. ... $\overline{N_n} \cap W \subseteq \overline{N_{W,n}} \Rightarrow \underbrace{V \cap W}_{\neq \emptyset} \subseteq \overline{N_{W,n}}$ ↯ $\triangleright$

Nun $A \cap \bigcup \mathcal{W} = \bigcup_{n \geq 1} N_n$ mager $\Rightarrow$

$A \cap \bigcup \mathcal{U} \subseteq M \cup \bigcup_{n \geq 1} N_n$ auch mager. □

Nun wenden wir das auf topologische Gruppen an.

5. <u>Satz</u> Sei G eine topologische Gruppe. Dann sind äquivalent:

(i) G ist ein Baire-Raum

(ii) G ist nicht mager

(iii) G enthält eine nicht-magere Teilmenge.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii), weil $G \neq \emptyset$ und (ii) $\Rightarrow$ (iii).

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(iii): sei $U \subseteq G$ offen, mager, nicht leer.

Dann ist $G = \bigcup \{ gU \mid g \in G \}$ mager nach Banachs Kategoriesatz §3.4., also auch jede Teilmenge von G. □

Erinnerung: ein Hausdorffraum X heißt <u>σ-kompakt</u>, wenn X Vereinigung von abzählbar vielen kompakten Teilmengen ist.

Bsp: $\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k+1]$ $\quad \mathbb{Q} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$ sind σ-kompakt. !

6. Theorem (Der Satz von der offenen Abbildung I)

Sei $f: G \to K$ ein Morphismus von Hausdorffschen topologischen Gruppen. Falls G σ-kompakt ist und falls $f(G) \subseteq K$ nicht mager ist, so ist f offen und K ist lokalkompakt.

Insbesondere ist jede Hausdorffsche top. Gruppe, die σ-kompakt und ein Baire-Raum ist, lokalkompakt.

Beweis Fall 1 f ist zusätzlich injektiv.

Schreibe $G = \bigcup_{k \geq 1} A_k$, jedes A_k kompakt. Für jedes $k \geq 1$ ist dann die Einschränkung $A_k \xrightarrow{f} f(A_k)$ ein Homöomorphismus. Da $f(A_k)$ kompakt ist und $f(G) = \bigcup_{k \geq 1} f(A_k)$ nicht mager ist, gibt es ein $m \geq 1$ so, dass $f(A_k)$ nichtleeres Inneres V hat. Insbesondere ist $f(G)$ offen nach §1.12. und damit auch abg. Setze $U = f^{-1}(V)$. Dann ist U offen und $U \xrightarrow{f} V$ ist ein Homöomorphismus. Nach §1.3 hat die Einschränkung $f: G \to f(G)$ eine stetige Inverse. Damit ist f offen, weil $G \cong f(G) \subseteq K$ ist lokalkompakt und offen $\Rightarrow$ K ist lokalkompakt.

Fall 2 f nicht notwendig injektiv

Setze $N = \ker(f)$ $\rightsquigarrow$ G/N ist σ-kompakt, betrachte

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & K \\ G/N \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Nach Fall 1 ist $\bar{f}$ offen und K ist lokal kompakt. Damit ist $f = \bar{f} \circ p$ auch offen.

$\square$

7. Korollar (Der Satz vom abgeschlossenen Graphen. I)

Seien G, K Hausdorffsche und σ-kompakte top. Gruppen, sei G ein Baire Raum, sei

$$f : G \to K \text{ ein abstrakter Homomorphismus.}$$

Dann sind äquivalent: (i) f ist stetig.

(ii) der Graph von f in $G \times K$ ist abg.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) gilt immer, wenn G, K Hausdorffsch sind.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $H = \{(g, f(g)) \mid g \in G\} \subseteq G \times K$ ist abg. Untergruppe, also σ-kompakt. Die Abbildung

$$h : H \to G \qquad (g, f(g)) \longmapsto g \quad \text{ist}$$

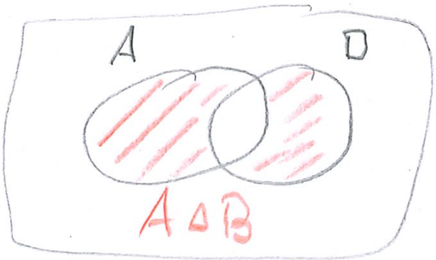
stetig und bijektiv, also nach § 3.6 ein Isomorphismus von top. Gruppen. Damit ist auch $g \mapsto (g, f(g))$ stetig, also ist f stetig.

$\square$

#

8. <u>Erinnerung.</u> Die <u>symmetrische Differenz</u> zweier Mengen A, B ist

$$A \,\Delta\, B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$$



<u>Def</u> Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes X heißt <u>Baire-messbar</u>, falls es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, so dass $U \,\Delta\, A = M$ mager ist. Man sagt auch, A ist <u>fast offen</u> oder <u>A hat die Baire-Eigenschaft</u> (Vorsicht!)

9. <u>Theorem</u> (Pettis' Lemma) Sei G eine top. Gruppe, sei $A \subseteq G$ Baire-messbar. Wenn A nicht mager ist, so ist $A^{-1} A$ eine Einsumgebung.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq G$ offen mit $M = A \,\Delta\, U$ mager.

Wenn A nicht mager ist, so ist U nicht mager (sonst $A \subseteq M \cup U$ mager). Sei $g \in U$, sei V offene Einsumgebung mit $gV^{-1} V \subseteq U$. <u>Beh</u>: $V \subseteq A^{-1} A$.

<u>Denn</u>: $h \in V \Rightarrow g \in U \cap Uh$ (weil $gh^{-1} \in U$)
$\Rightarrow U \cap Uh \neq \emptyset$. Weiter ist

$$(A \cap Ah) \,\Delta\, (U \cap Uh) \subseteq (A \,\Delta\, U) \cup (Ah \,\Delta\, Uh)$$
$$= (A \,\Delta\, U) \cup (A \,\Delta\, U)h \quad \underline{\text{mager}}$$

⌈ $a \in (A \cap Ah) - (U \cap Uh)$ $\quad a \in U \Rightarrow a \notin Uh$ also $a \in Ah \triangle Uh$ … ⌋

Wäre $A \cap Ah = \emptyset$, so wäre $U \cap Uh \neq \emptyset$ mager + offen, aber G ist Baire-Raum ↯. Also $A \cap Ah \neq \emptyset$, d.h. $h \in A^{-1}A$ □

~~Beispiel~~ ~~$A = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ist Baire-messbar, denn~~
~~$A \triangle \mathbb{R} = \mathbb{Q}$ ist mager, $A = -A \Rightarrow A + A$ enthält~~
~~0-Umgebung. Da $q + A = A$ für alle $q \in \mathbb{Q}$ folgt sogar $A + A = \mathbb{R}$,~~
~~jede reelle Zahl ist Summe von zwei irrationalen Zahlen.~~

10. Erinnerung Eine Menge $\mathcal{S}$ von Teilmengen einer Menge X heißt σ-Algebra, wenn gilt: $\emptyset \in \mathcal{S}$, $S \in \mathcal{S} \Rightarrow X - S \in \mathcal{S}$ ($\Rightarrow X \in \mathcal{S}$) und $S_k \in \mathcal{S}$, $k = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{S}$ ($\Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \in \mathcal{S}$). Ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, so heißt die von $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{B}$ (= der Durchschnitt aller σ-Algebren auf X, die $\mathcal{T}$ enthalten) die σ-Algebra der Borelmengen von X.

Satz Die Baire-messbaren Teilmengen eines top. Raums bilden eine σ-Algebra $\mathcal{A}$, die alle offenen Mengen enthält. Insbesondere enthält $\mathcal{A}$ alle Borelmengen und alle mageren Mengen in X.

Beweis U offen $\Rightarrow$ $U \Delta U = \emptyset$, M mager $M \Delta \emptyset = M$, also $U, M \in \mathcal{A}$.

Angenommen, $A \in \mathcal{A}$. Beh: $B = X - A \in \mathcal{A}$. Denn: es gibt $U \subseteq X$ offen mit $A \Delta U$ mager. Setze $\underset{\text{offen}}{V = X - \overline{U}}$, $\underset{\substack{\text{nirgends dicht}\\ \Rightarrow \text{mager}}}{M = \overline{U} - U}$

$V \Delta B = \overline{U} \Delta A \subseteq (U \Delta A) \cup M$ mager $\Rightarrow B \in \mathcal{A}$.

Angenommen, $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \ldots$ $\Rightarrow$ U_k offen, $M_k = A_k \Delta U_k$ mager

$M = \bigcup_{k \geq 1} M_k$, $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$ $U = \bigcup_{k \geq 1} U_k$

$A_k - U \subseteq A_k - U_k \subseteq M_k \Rightarrow A - U \subseteq M$ genauso $U - A \subseteq M$

$\Rightarrow U \Delta A \subseteq M \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ $\square$

Korollar A Sei G eine top. Gruppe, sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wenn H eine nicht magere Borelmenge enthält, so ist H offen.

Beweis $H = H^{-1} \cdot H$ ist offen nach § 3.9. $\square$

Korollar B Sei G eine top. Gruppe, die ein Baire-Raum ist, sei $H \subseteq G$ dichte Untergruppe. Wenn H eine G_δ-Menge ist, dann ist $H = G$.

Beweis Nach § 3.3 ist H nicht mager und H ist Borelmenge $\Rightarrow$ H offen $\Rightarrow$ H abg $\Rightarrow$ $H = G$.

11. <u>Def</u> Seien X, Y top. Räume, sei $f: X \to Y$ eine nicht notwendig stetige Abbildung. Wir nennen f <u>Baire-messbar</u> (bzw. <u>Borel-messbar</u>) wenn für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ Baire-messbar (bzw. eine Borelmenge) ist.

Äquivalent: das Urbild jeder Borelmenge ist Baire-messbar (bzw. Borelmenge). Stetige Funktionen haben diese Eigenschaften.

<u>Achtung</u>! Die Bezeichnungen in der Literatur sind hier <u>nicht</u> einheitlich!

<u>Erinnerung</u> Ein top. Raum heißt <u>Lindelöf-Raum</u> wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung hat.

- jeder kompakte Raum ist ein L.-Raum
- jeder σ-kompakte Raum ist ein L.-Raum (z.B. $\mathbb{R}$)
- jeder top. Raum, der eine abz. Basis hat, ist ein L.-Raum.

12. <u>Satz</u> Seien G, K top. Gruppen, sei $f: G \to K$ ein abstrakter Homomorphismus, sei G Baire-Raum und sei K Lindelöf-Raum. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig, also ein Morphismus

(ii) f ist Borel-messbar

(iii) f ist Baire-messbar

(iv) In K gibt es beliebig kleine Einsumgebungen, deren Urbilder Baire-messbar sind.

Bew. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) klar.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Die Untergruppe $\overline{f(G)} \subseteq K$ ist Lindelöf-Raum.

Also OE $K = \overline{f(G)}$. Sei $V \subseteq K$ Einsumgebung.

Beh. Es gibt eine Einsumgebung $W \subseteq G$ mit $f(W) \subseteq V$.

Denn: Wähle Einsumgebung $U \subseteq K$ so, dass $U^{-1}U \subseteq V$ und so, dass $E = f^{-1}(U)$ Baire-messbar ist. Da $\overline{f(G)} = K$ folgt $K = \bigcup_{g \in G} f(g)U \Rightarrow K = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(g_k)U$, $g_k \in G$, $k = 1, \dots$

$\Rightarrow G = \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k E$. Da G nicht mager ist, ist E nicht mager $\underset{\text{Pettis}}{\Rightarrow}$ $E^{-1}E \subseteq G$ ist Einsumgebung und $f(E^{-1}E)$

$\subseteq U^{-1}U \subseteq V$ $\square$

Folglich ist f stetig am Einselement in G und damit nach §1.3 stetig. $\square$

13. Beispiel Sei $F = \mathbb{Z}/p$, p Primzahl,

$G = F^{\mathbb{N}}$ ist kompakt und total unzusammenh. (= profinite) Gruppe.

$H = \bigoplus_{k=0}^{\infty} F \subseteq G$ alle Folgen in F, die fast immer 0 sind.

Homomorphismus $h: H \to F$, $(c_k)_{k=0}^{\infty} \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k$ ist

Homomorphismus. Da G ein F-Vektorraum ist, hat die Linearform h eine Fortsetzung $\tilde{h}: G \to F$

(z.B.: $E \subseteq G$ UVR, $G = E \oplus H$ existiert nach

Zorns Lemma). Dann ist $\tilde{h}$ unstetig, denn

$\ker(\tilde{h})$ ist dicht in G:

$g = (g_k)_{k \in \mathbb{N}} \in G$, $U \subseteq G$ Umgebung von g ⇝ $\exists J \subseteq \mathbb{N}$ endlich

⇝ $h \in U$, falls $h_j = g_j$ für alle $j \in J$. Wähle $k \in \mathbb{N} - J$ und setze

$$h_i := \begin{cases} g_j & \text{falls } i \in J \\ -\sum_{j \in J} g_j & \text{falls } i = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

⇝ $h \in U$, $h \in \ker(\tilde{h})$

Folgerung: $\ker(\tilde{h})$ ist nicht Baire-messbar und keine Borelmenge. Beachte: $\ker(\tilde{h})$ hat endlichen Index p in G!

Die Voraussetzungen an G und K in §3.12 sind insbesondere erfüllt, wenn G lokalkompakt oder vollständig metrisierbar ist und wenn K eine abzählbare Basis hat.

Wir betrachten jetzt Metriken und Längenfunktionen auf Gruppen

14. **Erinnerung / Def** Eine Pseudometrik d auf einer Menge X ist eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ mit

(i) $d(x,y) = d(y,x) \geq 0$
(ii) $d(x,x) = 0$
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

für alle $x,y,z \in X$

Falls gilt (iv) $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$, so heißt d Metrik.

Für $\varepsilon > 0$ sei $B_\varepsilon(x) = \{ z \in X \mid d(x,z) < \varepsilon \}$. Dann ist $\{ B_\varepsilon(x) \mid x \in X, \varepsilon > 0 \}$ eine (Sub)Basis, die eine Topologie $\mathcal{T}_d$ auf X erzeugt: $U \in \mathcal{T}_d$ gdw

$\forall x \in U \, \exists \varepsilon > 0 \quad B_\varepsilon(x) \subseteq U$

Dann ist d stetig.
Diese Topologie $\mathcal{T}_d$ ist Hausdorffsch gdw d eine Metrik ist.

Lemma Seien d, d' Pseudometriken auf X mit $d \leq d'$.

Dann gilt: (i) d ist stetig bzgl $\mathcal{T}_{d'}$ und $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d'}$

(ii) falls d' stetig ist bzgl $\mathcal{T}_d$, so ist $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$

(iii) falls $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X ist, so gilt $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ gdw $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$ und d stetig bzgl $\mathcal{T}$

Beweis: Selber überlegen! $\square$

#

15. **Def** Sei G eine Gruppe. Eine (Pseudo-) Metrik d auf G heißt *linksinvariant* (bzw *rechtsinvariant*) falls für alle $x, y, a \in G$ gilt $d(x,y) = d(ax, ay)$ (bzw $d(xa, ya) = d(x,y)$). Sie heißt *biinvariant*, falls sie rechts- und linksinvariant ist.

16. **Beispiel** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ..\}$ versehen mit der diskreten Topologie, $C(\mathbb{N}, \mathbb{N}) = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit der k-o-Topologie = Topologie der punktweisen Konvergenz, $G = \mathrm{Homeo}(\mathbb{N})$ ist nach §2.15 eine top. Gruppe in der k-o-Topologie.

Sei $\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m \neq n \\ 0 & m = n \end{cases}$ diskrete Metrik auf $\mathbb{N}$.

Dann ist $d(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} \cdot \delta_{x_i, y_i}$ eine Metrik auf $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, die die k-o-Topologie induziert (→ Ü1).

Diese Metrik ist linksinvariant auf G, denn:

$a, x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$ $\quad (a \circ x)(k) = a_{x_k}$

$$d(a \circ x, a \circ y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{a_{x_k}, a_{y_k}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \cdot \delta_{x_k, y_k} = d(x,y)$$

In dieser Metrik ist G *nicht* vollständig:

Für $l \in \mathbb{N}$ sei $x(l)_k = \begin{cases} k+1 & 0 \le k \le l \\ 0 & k = l+1 \\ k & k \ge l+2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ die Folge $(x(l))_{l \in \mathbb{N}}$ in G konvergiert punktweise gegen die Folge $z = (z_k)_{k=0}^{\infty}$ $z_k = k+1$, $z \notin G$.

Weiter ist $d(x(l), x(m)) \le \sum_{k=l}^{m} 2^{-k}$ für $l \le m$

$\Rightarrow$ $(x(l))_{l \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. $\square$

17. Def Sei G eine Gruppe. Eine Längenfunktion (eine Norm in der älteren Literatur) ist eine Abbildung $l : G \to \mathbb{R}$ mit: (i) $l(e) = 0$ (ii) $\forall g \in G$ $l(g) = l(g^{-1}) \ge 0$

(iii) $\forall g, h \in G$ $l(gh) \le l(g) + l(h)$.

Es folgt: $H = \{ g \in G \mid l(g) = 0 \}$ ist Untergruppe in G.

Beobachtung: • Ist l eine Längenfunktion, so ist $d(x,y) = l(x^{-1}y)$ eine linksinvariante Pseudometrik, mit Metrik gdw $H = \{e\}$.

• Ist d eine linksinvariante Pseudometrik, so ist $l(x) = d(e,x)$ eine Längenfunktion

[entsprechend ist $d'(x,y) = l(xy^{-1})$ eine rechtsinvariante Pseudometrik...]

Wir haben eine natürliche Bijektion

$\{$ linksinv. Pseudometrik $\} \longleftrightarrow \{$ Längenfunktion $\} \longleftrightarrow \{$ rechtsinv. Pseudometriken $\}$

Unser nächstes Ziel ist der Metrisationssatz von Birkhoff-Kakutani.

18. Lemma Sei G eine top. Gruppe und sei $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Familie von Einsumgebungen mit

$$K_n = K_n^{-1} \quad \text{und} \quad K_n\cdot K_n\cdot K_n \subseteq K_{n+1}$$

sowie $G = \langle \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} K_n \rangle$

Dann gibt es eine stetige Längenfunktion $l: G \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\forall n\in\mathbb{Z} \quad \{g\in G \mid l(g) < 2^{-n}\} \subseteq K_n \subseteq \{g\in G \mid l(g) \leq 2^{-n}\}$$

Insbesondere gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n = \{g\in G \mid l(g) = 0\}$.

(Ist Γ eine Gruppe von Automorphismen von G mit $\gamma(K_n) = K_n$ für alle $\gamma\in\Gamma$, $n\in\mathbb{Z}$, so kann l Γ-invariant gewählt werden.)

Beweis Für jedes $g\in G$ gibt es $n_1,\dots,n_k$ mit $g\in K_{n_1}\cdots K_{n_k}$.
Wir definieren

$$l(g) = \inf\{t \geq 0 \mid n_1,\dots,n_k\in\mathbb{Z},\ t = 2^{n_1}+\dots+2^{n_k},\ g\in K_{n_1}\cdots K_{n_k}\}.$$

Es folgt $l(g) = l(g^{-1})$, $l(e) = 0$,

$$g\in K_{n_1}\cdots K_{n_k} \quad h\in K_{m_1}\cdots K_{m_l} \Rightarrow gh\in K_{n_1}\cdots K_{n_k}K_{m_1}\cdots K_{m_l}$$

$\Rightarrow l(gh) \leq l(g) + l(h)$ (und l ist γ-invariant für alle $\gamma\in\Gamma$). Weiter gilt: $g\in K_n \Rightarrow l(g) \leq 2^n$.

Beh l ist stetig

Denn: $g \in G$, $\varepsilon > 0$ wähle n so, dass $2^{n} < \varepsilon$. Dann $l(a) \le 2^{n}$ für alle $a \in K_n \Rightarrow |l(g) - l(h)| \le 2^{n} < \varepsilon$ für alle $h \in gK_n \Rightarrow l$ stetig in g. □

Bleibt zu zeigen: $l(g) < 2^{n} \Rightarrow g \in K_n$.

Denn: $l(g) < 2^{n} \Rightarrow g \in K_{n_1} \cdots K_{n_k}$, $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^{n}$

Beh Wenn $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^{n}$, dann $K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_n$

Beweis der Beh. $n_j < n$ $j = 1, \dots, k$

$\Rightarrow K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_{n-1} \cdots K_{n-1} \Rightarrow$ Beh korrekt für $k = 1, 2, 3$.

Weiter mit Induktion nach k, $k \ge 4$

(a) $2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^{n-1} \Rightarrow K_{n_1} \cdots K_{n_{k-1}} \subseteq K_{n-1}$ und

$K_{n_k} \subseteq K_{n-1} \Rightarrow K_{n_1} \cdots K_{n_k} \subseteq K_n$

(b) $2^{n-1} \le 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} < 2^{n}$ wähle r minimal mit

$2^{n-1} \le 2^{n_1} + \dots + 2^{n_r} \Rightarrow 2^{n-1} > 2^{n_1} + \dots + 2^{n_{r-1}}$

$2^{n-1} > 2^{n_{r+1}} + \dots + 2^{n_k}$

$$\Rightarrow \underbrace{K_{n_1} \cdots K_{n_{r-1}}} \cdot K_{n_r} \cdot \underbrace{K_{n_{r+1}} \cdots K_{n_k}} \subseteq K_{n-1} \cdot K_{n_r} \cdot K_{n-1}$$

$$\subseteq K_{n-1} \cdot K_{n-1} \cdot K_{n-1}$$ □

□

<u>Erinnerung:</u> Ein Punkt $x \in X$ hat eine <u>abzählbare Umgebungsbasis</u> gdw $\exists$ Umgebungen U_k von x, $k \in \mathbb{N}$, so dass es für jede Umgebung W von x ein k gibt mit $U_k \subseteq W$.

19. <u>Theorem</u> <u>(Birkhoff – Kakutani)</u> Sei G eine Hausdorff'sche top. Gruppe. Dann sind äquivalent:

(i) G ist metrisierbar durch eine linksinvariante Metrik

(ii) G ist metrisierbar durch eine rechtsinvariante Metrik

(iii) G ist metrisierbar

(iv) G hat eine offene metrisierbare Teilmenge $U \neq \emptyset$

(v) $e \in G$ hat eine abz. Umgebungsbasis.

(Falls eine Gruppe Γ durch Automorphismen auf G operiert und falls die abz. Umgebungsbasis in (v) Γ-invariant ist, so kann die Metrik d linksinvariant <u>und</u> Γ-invariant gewählt werden)

<u>Beweis</u> Es gilt (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ (v)

(*) [$U \neq \emptyset$ offen, $g \in U \Rightarrow g^{-1}U$ Einsumgebung, metrisierbar $\Rightarrow$ (v) gilt.]

(v)$\Rightarrow$(i): Sei $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine abz. Umgebungsbasis von e.

Setze $W_n = V_n \cap V_n^{-1}$, $K_n = G$ für $n \geq 0$

$K_{-1} = W_1$. Weiter mit Induktion. Wenn K_{-n} schon konstruiert ist, sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $W_m \cdot W_m \cdot W_m \subseteq K_{-n} \cap V_{n+1}$

Und setze $K_{-(n+1)} = W_n$. Es folgt

$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} K_n = \{e\}$, weil $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{e\}$.

Sei ℓ die resultierende stetige Längenfunktion aus §3.18.

Die entsprechende linksinvariante Metrik d ist dann <u>stetig</u> (Metrik weil $\ell(g)=0 \Rightarrow g=e$).

Ist $U \subseteq G$ offen, $g \in U$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit

$gV_n \subseteq U \Rightarrow \{h \in G \mid d(g,h) < 2^{-n}\} \subseteq gK_{n-1} \subseteq gV_n \subseteq U$

$\Rightarrow U$ ist offen bzgl. d-Topologie $\Rightarrow d$ metrisiert G. $\square$

(Alle Beweisschritte sind ggf. Γ-invariant.)

20. <u>Korollar</u> Sei G eine metrisierbare top. Gruppe, sei $K \subseteq G$ eine kompakte Untergruppe. Dann existiert eine Metrik d auf G so, dass für alle $x,y,z \in G$, $a \in K$ gilt

$$d(x,y) = d(zxa, zya)$$

Insbesondere erlaubt jede metrisierbare kompakte Gruppe eine bi-invariante vollständige Metrik.

<u>Beweis</u> Wir wenden Birkhoff-Kakutani an mit

$\Gamma = K$, $\gamma(x) = \gamma x \gamma^{-1}$. Wenn d linksinvariant und Γ-invariant, so $d(x,y) = d(zaxa^{-1}, zaya^{-1})$ für alle $z \in G$, $a \in K \Rightarrow$ Beh. $\square$

3.21. Satz Sei ℓ eine Längenfunktion auf einer Gruppe G, sei H eine Untergruppe. Dann ist $d(x,y) = \ell(xy^{-1})$ eine rechtsinvariante (Pseudo) Metrik auf G und

$$d_H(xH, yH) = \inf(xHy^{-1}) = \inf d(x, yH) = \inf\{d(xh_1, yh_2) \mid h_1, h_2 \in H\}$$

ist eine Pseudometrik auf G/H.
Wenn G eine top. Gruppe ist und wenn ℓ stetig ist, so ist auch d_H stetig auf G/H.

Beweis Klar: d ist rechtsinvariante Metrik, $d_H \geq 0$, d_H ist symmetrisch. Zur Dreiecksungleichung: für $x, y, z \in G$, $h, h' \in H$ gilt

$$\begin{aligned} d_H(xH, zH) \leq d(x, zh') &\leq d(x, yh) + d(yh, zh') \\ &= d(x, yh) + d(y, zh'h^{-1}) \\ &\leq d_H(xH, yH) + d_H(yH, zH). \end{aligned}$$

Wenn ℓ stetig ist, so ist d auch stetig. Setze $d'(x,y) = d_H(xH, yH) \Rightarrow d' \leq d \Rightarrow d'$ ist stetige Pseudometrik auf G. Betrachte

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "d'"] \arrow[d, swap, "\text{pr}\times\text{pr}"] & \mathbb{R}_{\geq 0} \\ G/H \times G/H \arrow[ur, swap, "d_H"] & \end{tikzcd} \Rightarrow d_H \text{ stetig.}$$

offen

$\square$

Der Satz von Birkhoff-Kakutani (genauer: Lemma §3.18) hat weitere wichtige Konsequenzen.

3.22 <u>Theorem</u> Sei G eine top. Gruppe, sei $H \subseteq G$ eine abg. Untergruppe. Dann ist $G/_H$ vollständig regulär. Insbesondere ist jede Hausdorffsche top. Gruppe G vollständig regulär (setze $H = \{e\}$).

<u>Beweis</u> $G/_H$ ist Hausdorffsch nach §1.19, setze $p: G \to G/_H$, $p(g) = gH$. Sei $W \subseteq G/_H$ eine Umgebung von $x = aH \in G/_H$. Da p stetig ist, gibt es eine symmetrische Einsumgebung $K_0 \subseteq G$ mit $p(K_0 a) \subseteq W$. Setze $K_n = G$ für $n \geq 1$, wähle induktiv sym. Einsumgebungen $K_{-n} \subseteq G$ mit $K_{-n} \cdot K_{-n} \cdot K_{-n} \subseteq K_{-n+1}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Sei ℓ die stetige Längenfunktion aus Lemma §3.18. Sei d_H die stetige Pseudometrik auf $G/_H$ nach Satz §3.21. Setze

$$\varphi(gH) = \max\{d_H(aH, gH), 1\} \leadsto \varphi(aH) = 0.$$

Für $gH \notin p(K_0 a)$ (d.h. $g \notin K_0 aH$) ist $d_H(aH, gH) \geq 2^0 = 1 \Rightarrow \varphi(gH) = 1$ $\square$

3.23 Satz Sei G eine metrisierbare top. Gruppe, sei $H \leq G$ abg. Untergruppe. Dann ist auch G/H metrisierbar.

Beweis Sei d eine rechtsinvariante Metrik auf G, die G metrisiert (als top. Gruppe), vgl. §3.19.
Die Pseudometrik d_H aus §3.21 ist stetig auf G/H.
Sei $W \subseteq G/H$ offen, sei $aH \in W$. Da $p: G \to G/H$ stetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass die Menge $B_\varepsilon(a)$ nach W abgebildet wird, $p(B_\varepsilon(a)) \subseteq W$. $\Rightarrow p(B_\varepsilon(a)H) \subseteq W$. Es folgt $\{xH \mid d_H(xH, aH) < \varepsilon\} \subseteq W$ $\Rightarrow$ d_H metrisiert G/H. Da G/H Hausdorffsch ist, ist d_H eine Metrik $\square$

Jetzt betrachten wir Vervollständigung von Metriken auf top. Gruppen. Das ist etwas subtil, weil Multiplikation und Inversion nicht unbedingt gleichmässig stetig sind.

Die Menge aller Folgen in einer Gruppe G ist die Gruppe $G^{\mathbb{N}}$ (als abstrakte Gruppe).

3.24. <u>Def</u> Sei G eine metrisierbare top. Gruppe. Eine Folge $x \in G^{\mathbb{N}}$ heißt <u>Links-Cauchyfolge</u>, falls es zu jeder Einsumgebung $V \subseteq G$ ein $n \geq 0$ gibt so, dass $x_k^{-1} x_l \in V$ für alle $k, l \geq n$.

[Analog definiert man Rechts-Cauchyfolge durch: $x_k x_l^{-1} \in V$ für alle $k, l \geq n$]

Ist G abelsch, so ist Links-Cauchy dasselbe wie Rechts-Cauchy!

Konvergenz $\Rightarrow$ Links-Cauchy (klar)

<u>Lemma</u> Sei d eine linksinvariante Metrik, die die top. Gruppe G metrisiert, sei $x \in G^{\mathbb{N}}$. Dann ist x eine Cauchyfolge bzgl. d gdw x eine Links-Cauchyfolge ist.

<u>Bew.</u> x Cauchyfolge für $d \iff d(x_k, x_l) \leq \varepsilon \quad \forall k, l \geq n_\varepsilon$

$\iff d(e, x_k^{-1} x_l) \leq \varepsilon \quad \forall k, l \geq n_\varepsilon$

$\iff$ für jede Einsumgebung $V \subseteq G$ ist $x_k^{-1} x_l \in V$ für alle $k, l \geq n_V$ $\square$

<u>Satz</u> Sei G eine metrisierbare top. Gruppe. Dann sind äquivalent: (i) jede Links-Cauchyfolge konvergiert,

(ii) eine linksinvariante Metrik, die G metrisiert, ist vollständig.

(iii) jede " " " " " "

(iv) jede Rechts-Cauchyfolge konvergiert.

(v) eine rechtsinv. Metrik, die G metrisiert, ist vollständig.

(vi) jede " " " " " " " .

Beweis (i) ⇔ (ii) und (i) ⇔ (iii) nach Lemma.

Wenn $x \in G^{\mathbb{N}}$ Rechts-Cauchyfolge ist, so ist

$x^{-1} = (x_k^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Links-Cauchyfolge. Ist also

$\lim_k x_k^{-1} = z$, so ist $\lim_k x_k = z^{-1}$ ⇒ (i) ⇒ (iv). □

Genauso (iv) ⇒ (i)

Eine top. Gruppe, die diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, heißt <u>Weil-vollständig</u>.
$Sym(\mathbb{N})$ ist also <u>nicht</u> Weil-vollst.

3.25 Lemma A Sei G eine metrisierbare top. Gruppe,

sei $L \subseteq G^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Links-Cauchyfolgen,

sei $Z \subseteq G^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen, die gegen e konvergieren.

Dann ist $L \subseteq G^{\mathbb{N}}$ ein Monoid und $Z \subseteq G^{\mathbb{N}}$ ist

eine Untergruppe (mit $Z \subseteq L$).

Beweis Sei $x, y \in L$, zz: $x \cdot y \in L$. Sei $U \subseteq G$

Einsumgebung, sei $W \subseteq G$ Einsumgebung mit $W^3 \subseteq U$.

Es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $y_k \in y_l W$ $\forall k, l \geq n$. Setze

$V = y_n W y_n^{-1}$, es folgt

$$(xy)_l^{-1}(xy)_k = y_l^{-1} x_l^{-1} x_k y_k \in y_l^{-1} x_l^{-1} x_k y_n W \subseteq W y_n^{-1} x_l^{-1} x_k y_n W.$$

für $k, l \geq n$.

Weiter gibt es $m \geq n$ so, dass $x_k^{-1} x_l \in V$ $\forall k, l \geq m$.

Dann $(xy)_l^{-1}(xy)_k \in WWW \subseteq U$.

Klar: Z ist Untergruppe, weil Multiplikation und

Inversion in G stetig sind. □

Lemma B Sei G metr. top. Gruppe. Dann ist $L \subseteq G^{\mathbb{N}}$ invariant unter der Rechtswirkung $L \times Z \to L$, $(a,z) \mapsto az$. Der Bahnenraum $L/_Z = \{aZ \mid a \in L\}$ ist ein Monoid bezüglich der Multiplikation $(aZ, bZ) \mapsto abZ$, die Abbildung $L \to L/_Z$, $a \mapsto aZ$ ist ein Monoid-Homomorphismus.

Beweis Sei $a \in L$, $z \in Z$, z.z.: $az \in L$. Sei $U \subseteq G$ Einsumgebung, sei $W \subseteq G$ Einsumgebung mit $W^{\cdot 3} \subseteq U$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $z_k^{-1} z_l \in W$ für alle $k, l \geq n$ (weil $Z \subseteq L$). Wir setzen $V = z_n W z_n^{-1}$. Dann gilt

$(za)_k^{-1} (za)_l = a_k^{-1} z_k^{-1} z_l a_l \in W z_n^{-1} a_k^{-1} a_l z_n W$ für $k, l \geq n$. Es gibt $m \geq n$ so, dass $a_k^{-1} a_l \in V$ für alle $k, l \geq m$. Dann

$(za_k)^{-1} (za)_l \in WWW \subseteq U \Rightarrow az \in L$; $LZ \subseteq L$ □

Beh Für $b \in L$, $z \in Z$ gilt $b^{-1} z b \in Z$.

Denn: Sei $U \subseteq G$ Einsumgebung, sei $W \subseteq G$ Einsumgebung mit $W^{\cdot 3} \subseteq U$. Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $b_k^{-1} b_l \in V$ für alle $k, l \geq n$. Setze $V = b_n W b_n^{-1}$. Dann

$b_k^{-1} z_k b_k \in W b_n^{-1} z_k b_n W$ für $k, l \geq n$.

Weiter gibt es $m \geq n$ so, dass $z_k \in V$ für alle $k \geq m \Rightarrow z_k^{-1} b_k z_k \in W \cdot W \cdot W \subseteq U$ für $k \geq m$.

$\Rightarrow z^{-1} b z \in L$. $\square$

Für $a, b \in L$, $z \in Z$ folgt

$$a z b Z = a b \underbrace{b^{-1} z b}_{\in Z} Z = a b Z,$$ damit ist

die Verknüpfung $(aZ, bZ) \longmapsto abZ$ wohldefiniert.

Sie ist assoziativ, da L ein Monoid ist, mit

Neutralelement $Z \in L/_Z$ $\square$ #

Für $g \in G$ sei $\delta(g) = (g, g, g, \ldots) \in G^{\mathbb{N}}$ (konstante Folge).

Dann ist die Abbildung

$$i_G : G \to L/_Z, \quad g \mapsto \delta(g) Z$$ ein

injektiver Monoid-Homomorphismus.

Korrektur – Lemma 6 war falsch.

3.26 Theorem (Weil) Sei G eine metrisierbare top. Gruppe. Dann gibt es eine metrisierbare Topologie auf $L/_Z = WC(G)$ so, dass $WC(G)$ ein top. Monoid ist. Die Abbildung $i_G : G \to L/_Z$ ist eine Einbettung mit dichtem Bild. Ist d eine linksinvariante Metrik die G metrisiert, so existiert eine vollständige Metrik $\bar{d}$ auf $WC(G)$ die $WC(G)$ metrisiert, so dass $i_G : G \to WC(G)$ eine isometrische Einbettung ist.

Man nennt $WC(G)$ die (linke) Weil-Vervollständigung von G.

Beweis Sei d eine linksinv. Metrik, die G metrisiert ($\to$ Birkhoff-Kakutani). Dann können wir $L/_Z$ mit der Vervollständigung von (G,d) identifizieren, mit der Metrik $\bar{d}(aZ, bZ) = \lim_k d(a_k, b_k)$, denn:

$$\lim_k d(a_k, b_k) = 0 \iff \lim_k d(e, a_k^{-1} b_k) = 0 \iff aZ = bZ$$

Damit ist $j_G : G \to L/_Z,\ g \mapsto (g,g,g,\dots)Z$ eine isometrische Einbettung mit dichtem Bild und ein Monoid-Homomorphismus. Beh: die Multiplikation ist stetig auf L/Z. Sei $a,b\in L$, sei $\varepsilon>0$.

Es gibt $n\in\mathbb{N}$ so, dass $d(a_k,b_n), d(b_k,b_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $k\geq n$. Wähle $\delta>0$ so, dass

$$d(b_n, z b_n) < \frac{\varepsilon}{4} \text{ für alle } z\in G \text{ mit } d(z,e)<\delta.$$

OE $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$. Sei $x,y\in L$ mit $\bar{d}(xZ,aZ), \bar{d}(yZ,bZ)<\delta$.

Dann gilt $d(x_ky_k, a_kb_k) = d(y_k, x_k^{-1}a_kb_k)$

$$\leq d(y_k,b_k)+d(b_k,b_n)+d(b_n,x_k^{-1}a_kb_k)$$
$$\leq d(y_k,b_k)+d(b_k,b_n)+d(a_k^{-1}x_kb_n,b_n)+d(b_n,b_k).$$

Für alle $k\gg 0$ ist $d(a_k^{-1}x_k,e)=d(x_k,a_k)<\delta$,

damit $\bar{d}(xyZ, abZ)\leq\varepsilon$ ⇝ Multiplikation ist stetig in $(aZ,bZ)\in L/Z\times L/Z$.

Die Topologie $\mathfrak{T}_{\bar{d}}$ lässt sich ohne Verwendung von d beschreiben:

Ist $a\in L$, $V\subseteq G$ Einsumgebung, so setze

$V(a)=\{bZ\in L/Z \mid b_k\in a_kV \text{ für fast alle } k\in\mathbb{N}\}$.

Ist $B_\varepsilon(e)\subseteq V$, so ist $B_\varepsilon(aZ)\subseteq V(a)$ ⇝ $V(a)$ ist Umgebung von aZ. Ist $V=B_\varepsilon(e)$, so ist

$V(a)=\{bZ\in L/Z \mid \bar{d}(aZ,bZ)\leq\varepsilon\}$ ⇝ die $V(a)$ bilden eine Umgebungsbasis von aZ. Nun ist $W\subseteq L/Z$ $\bar{d}$-offen genau wenn es zu jedem

Korrektur

$aZ \in W$ eine Einsumgebung $V \subseteq G$ gibt mit $V(a) \subseteq W$. $\square$

Die Konstruktion von $WC(G)$ ist elegant, hat aber einen Nachteil: $WC(G)$ ist im allgemeinen keine top. Gruppe, sondern ein top. Monoid. (→ Beispiel §3.29).

Wir verbessern die Konstruktion jetzt. Seien $R, L \subseteq G^{\mathbb{N}}$ die Menge der Rechts- bzw. Links-Cauchy-Folgen. Die Elemente von $T = R \cap L$ heißen beidseitige Cauchyfolgen. Dann ist T eine Gruppe, denn:

$a \in L \Leftrightarrow a^{-1} \in R$, $\quad a, b \in L \Rightarrow ab \in L$ (Lemma §3.25A)

$\qquad a, b \in R \Rightarrow ab \in R$

Weiter ist $Z \trianglelefteq T$ $\quad (Z = \{x \in G^{\mathbb{N}} \mid \lim_k x_k = e\})$, denn

$a \in L \Rightarrow a^{-1} Z a \subseteq Z$ (Lemma §3.25B, Beweis)

Wir definieren $RC(G) = T/Z$. Das ist eine Gruppe.

3.27. Lemma Sei G eine metrisierbare Gruppe, sei d eine linksinv. Metrik, die G metrisiert. Dann metrisiert auch die Metrik $d_T(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1})$ die Gruppe G,

Korrektur

und die Cauchyfolgen von d_T sind genau die beidseitigen Cauchyfolgen.

<u>Beweis</u>: ÜA $\square$

3.28 <u>Theorem</u> (Raikov) Sei G eine metrisierbare top. Gruppe, sei $RC(G) = T/_{\sim}$ und $j_G : G \to T/_{\sim}$, $j_G(g) = (g, g, \ldots)_{\sim}$. Dann existiert eine Topologie auf $RC(G)$ so, dass j eine Einbettung mit dichtem Bild ist und $RC(G)$ ist eine top. metrische Gruppe. Ist d eine links inv. Metrik, die G metrisiert, und ist

$$d_T(x,y) = d(x,y) + d(x^{-1}, y^{-1})$$

so existiert eine vollständige Metrik $\bar{d}_T$ auf $RC(G)$, (die $RC(G)$ metrisiert) so, dass j eine Isometrie aufs Bild ist.

Im Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "j_G"'] \arrow[dr, "i_G"] & \\ RC(G) \arrow[r, hook] & WC(G) \end{tikzcd}$$

$RC(G) = T/_{\sim}$, $WC(G) = L/_{\sim}$

sind alle Pfeile stetige Monoid-Homomorphismen, $RC(G) \subseteq WC(G)$ ist dicht und genau die Menge der invertierbaren Elemente.

Korrektur

Bew. Sei d eine linksinvariante Metrik, die G metrisiert und sei $d_T(x,y) := d(x,y) + d(x^{-1},y^{-1})$. Dann ist T/Z die Vervollständigung von (G, d_T) mit der Metrik $\overline{d_T}(aZ, bZ) = \lim_k d_T(a_k, b_k)$, denn die Cauchyfolgen bzgl d_T sind genau die Elemente von T (→ Lemma §3.27). Ist $V \subseteq G$ Einsumgebung, so ist $V_T(a) = \{ bZ \mid b_k \in a_k V \text{ für fast alle } k \in \mathbb{N} \}$ Umgebung von aZ, und diese Menge bildet eine Umgebungsbasis von aZ (vgl. Bew. von Weils Theorem §3.26). Es gilt also $V_T(a) = V(a) \cap (T/Z)$ $\Rightarrow$ $R/Z \subseteq L/Z$ trägt die Teilraumtopologie $\Rightarrow$ R/Z ist top. Monoid, Topologie ist unabhängig von der Wahl von d.

Für $a, b \in G$ ist $d_T(a,b) = d_T(a^{-1}, b^{-1})$ d.h. $g \mapsto g^{-1}$ ist eine Isometrie von (G, d_T). Dann hat die Abbildung $g \mapsto g^{-1}$ eine eindeutige Fortsetzung $\iota : RC(G) \to RC(G)$.

Für alle $g \in G$ ist $\iota(j_G(g))\, j_G(g) = j_G(e)$ $\Rightarrow$

Für alle $aZ \in T/Z$ ist $\iota(aZ) = a^{-1}Z$. $\Rightarrow$

$RC(G)$ ist eine top. Gruppe (denn ι ist stetig).

Ist $aZ \in WC(G)$ invertierbar, so gibt es $b \in L$ mit $ab = z \in Z$ $\Rightarrow$ $a = z b^{-1} \in R$ $\Rightarrow$ $aZ \in RC(G)$ $\square$

Wir betrachten jetzt ein Beispiel.

3.29. Beispiel Betrachte $Sym(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ in der k-o-Topologie = Topologie der punktweisen Konvergenz.

Die Elemente von $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ schreiben wir als Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Die k-o-Topologie wird metrisiert durch

$$d(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \delta_{a_k, b_k}$$

und die Metrik d ist vollständig, denn: $(a(l))_{l\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \forall s \exists n: d(a(l), a(n)) < 2^{-s}$ $(\forall l \geq n)$

$\Rightarrow a(l)_j = a(n)_j$ für $j \leq s \Rightarrow b_j = \lim_l a(l)_j$ existiert und

$b = \lim_l a(l)$. $\Rightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d)$ vollständig.

Da d linksinvariant auf $Sym(\mathbb{N})$ ist (vgl §3.16)

folgt: $WC(Sym(\mathbb{N})) = M = \overline{Sym(\mathbb{N})} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

__Beh__ $M = \{a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a \text{ ist injektiv}\}$.

__Denn__ a injektiv, $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich $\Rightarrow$ setze

$B = \{a_k \mid k \in A\} \Rightarrow$ es gibt eine Permutation σ der endlichen Menge $A \cup B$, so dass $\sigma(j) = a_j$ für alle $j \in A$ gilt. Setze $g_j = \begin{cases} j & j \notin A\cup B \\ \sigma(j) & j \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow g \in Sym(\mathbb{N})$

$g|_A = a|_A \Rightarrow a \in M$

Ist $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ __nicht__ injektiv, so gibt es $i \neq j$ mit

$b_i = b_j$. Die Menge $U = \{c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid c_i = b_i = b_j = c_j\}$

ist offen und disjunkt zu $Sym(\mathbb{N}) \Rightarrow b \notin M$.

Die invertierbaren Elemente in M sind genau die Elemente von $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Damit ist gezeigt:

$$WC(\mathrm{Sym}(\mathbb{N})) \cong \{ a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid a \text{ injektiv} \}$$

$$RC(\mathrm{Sym}(\mathbb{N})) = \mathrm{Sym}(\mathbb{N}).$$

<u>Bew</u> Sind G, K metrisierbare top. Gruppen und ist $f: G \to K$ ein Morphismus, so ist das f-Bild einer Links/Rechts-Cauchyfolge eine LCF / RCF. Wir erhalten so einen Morphismus

$$WC(f): WC(G) \longrightarrow WC(K)$$

$$RC(f): RC(G) \longrightarrow RC(K)$$

und die Diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ WC(G) \arrow[r, "WC(f)"] & WC(K) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\ RC(G) \arrow[r, "RC(f)"] & RC(K) \end{tikzcd}$$

kommutieren — WC und RC sind Funktoren. #

Wir nennen eine metrisierbare top. Gruppe G <u>Raikov-vollständig</u>, falls jede Folge $x \in T$ konvergiert.

Äquivalent dazu: $j_G : G \to RC(G)$ ist ein Isomorphismus.

3.30 Theorem Jede metrisierbare lokalkompakte top. Gruppe G ist Weil-vollständig und Raikov-vollständig.

Beweis (ÜA) [Zeige direkt: $a \in L \Rightarrow \lim_k a_k = y$ existiert].

3.31 Theorem Sei K eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei $G \subseteq K$ eine metrisierbare Untergruppe. Falls G Raikov-vollständig ist, so ist $G \subseteq K$ abgeschlossen.

Beweis Die Gruppe $\overline{G} \subseteq K$ ist metrisierbar nach ÜA 7.3. Sei $g \in \overline{G}$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in G mit $\lim_k x_k = g$. Damit ist $x \in T$, also auch $g \in G$. □

Vgl. auch § 1.13! Solche Gruppen nennt man auch "absolut abgeschlossen". Ein nicht lokalkompaktes Beispiel ist $Sym(\mathbb{N})$. Jeder Banach-Raum ist (als top. Gruppe) Raikov-vollständig.