§1 Topologische Gruppen

1. **Def** Eine *topologische Gruppe* ist ein Tripel $(G, \cdot, \mathcal{T})$, wobei $(G, \cdot)$ eine Gruppe ist und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G so, dass die Abbildungen

$$m : G \times G \longrightarrow G, \qquad (x,y) \longmapsto x \cdot y$$

sowie

$$i : G \longrightarrow G, \qquad x \longmapsto x^{-1}$$

stetig sind.

Man kann beide Bedingungen in einer zusammenfassen: die Abbildung

$$\varkappa : G \times G \to G, \quad (x,y) \longmapsto x^{-1} \cdot y$$

soll stetig sein

⌜Denn: $x^{-1} = \varkappa(x,e)$ ($e \in G$ Neutralelement)

$$m(x,y) = \varkappa(\varkappa(x,e), y)$$ ⌟

Dann sind die *Linkstranslation*

$$\lambda_a : G \to G, \quad x \mapsto ax$$

und die *Rechtstranslation*

$$\rho_a : G \to G, \quad x \longmapsto xa$$

für jedes $a \in G$ Homöomorphismen.

Folgerung: ist $g \in G$ beliebig, so ist jede Umgebung V von g von der Form gU für eine Einsumgebung $U \subseteq G$ (= Umgebung von e), nämlich $U = g^{-1}V$, entsprechend auch $V = Wg$ mit $W = Vg^{-1}$.

Beachte. Wir verlangen (noch) nicht, dass die Topologie $\mathfrak{T}$ Hausdorffsch ist.

2. Def Seien G, K topologische Gruppen. Ein Morphismus $f: G \to K$ ist ein stetiger Gruppenhomomorphismus.

Gelegentlich haben wir mit Gruppenhomomorphismen zu tun, die nicht als stetig vorausgesetzt werden. Dann sprechen wir von "abstrakten Homomorphismen".

3. Lemma Seien G, K topologische Gruppen, sei $f: G \to K$ ein abstrakter Homomorphismus. Dann sind äquivalent:

(i) f ist stetig

(ii) f ist stetig in einem Punkt $a \in G$.

Beweis $(i) \Rightarrow (ii)$ trivial.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Wir zeigen, dass f in jedem $g \in G$ stetig ist. Sei W eine Umgebung von $f(g)$. Zu zeigen: es gibt eine Umgebung U von g mit $f(U) \subseteq W$. Nun ist $f(ag^{-1})W$ eine Umgebung von $f(a)$, also gibt es eine Umgebung V von a mit $f(V) \subseteq f(ag^{-1})W$. Setze $U = ga^{-1}V \Rightarrow f(U) = f(ga^{-1})f(V) \subseteq W$ und U ist Umgebung von g $\square$

4. Beispiele (a) die additiven Gruppen der Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p$ (p-adische Zahlen) sind topologische Gruppen. Die Exponentialfunktion ist ein Morphismus $\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}^\times$

(b) Die Kreisgruppe $\mathbb{S}^1 = U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ist eine kompakte topologische Gruppe und die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \quad t \mapsto \exp(2\pi i t)$$

ist ein Morphismus.

(c) jeder Morphismus $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist von der Form $f(t) = at$ für ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}$ (ÜA)

(d) Als $\mathbb{Q}$-Vektorraum hat $\mathbb{R}$ unendliche Dimension. Daher gibt es unendlich viele $\underbrace{\text{abstrakte}}_{\text{(Gruppen-)}}$ Homomorphismen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(e) Sei $H = \mathbb{R}$, versehen mit der diskreten Topologie (d.h. jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist offen).

Dann ist $id: H \to \mathbb{R}$ stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.

(f) Erinnerung an LA: ist g eine $n \times n$-Matrix über einem Körper F, so ist die Adjunkte $g^{\#}$ definiert durch $(g^{\#})_{ij} = (-1)^{i+j} \det(g'(j,i))$

$g'(j,i) \in F^{(n-1)\times(n-1)}$ durch Streichen von Zeile j, Spalte i

$\Rightarrow$ $g \cdot g^{\#} = \det(g)$. Ist also $\det(g) \neq 0$, so ist

$$g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} g^{\#}$$

Ist also F ein topologischer Körper, etwa $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}_p, \dots$ so ist

$$GL_n(F) = \{ g \in F^{n \times n} \mid \det(g) \neq 0 \}$$

eine topologische Gruppe bzgl. der Topologie auf $F^{n \times n}$, die durch F bestimmt ist.

Insbesondere sind $GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{Q})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $GL_n(\mathbb{Q}_p)$ topologische Gruppen.

<u>Denn</u>:
- Matrizenmultiplikation ist stetig auf $F^{n \times n}$
- Matrixinversion ist stetig auf $GL_n(F)$ nach obiger Bemerkung. #

5. <u>Erinnerung</u> Sei $(X_j)_{j \in J}$ eine Familie von topologischen Räumen, sei $X = \prod_{j \in J} X_j$. Die <u>Produkttopologie</u> auf X hat als Basis die offenen Mengen $U = \prod_{j \in J} U_j$, wobei $U_j \subseteq X_j$ offen ist und für fast alle $j \in J$ gilt $X_j = U_j$ (nur endlich viele $U_j \neq X_j$)

Die Produkttopologie hat folgende universelle Eigenschaft. Sei $pr_i : \prod_{j\in J} X_j \to X_i$ Projektion auf den i-ten Faktor.

(*) Gegeben ein topologischer Raum Y und stetige Abbildungen $f_j : Y \to X_j$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f: Y \to \prod_{j\in J} X_j$ mit

$f_j = pr_j \circ f$

$$\begin{tikzcd} & \prod_{j\in J} X_j \arrow[d, "pr_i"] \\ Y \arrow[ur, "\exists! f"] \arrow[r, "f_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Es gilt $f(y) = (f_j(y))_{j\in J}$

Weitere wichtige Eigenschaften, falls alle $X_i \neq \emptyset \neq J$

(1) X ist kompakt $\Leftrightarrow$ alle X_i sind kompakt (Satz von Tychonov)

(2) X Hausdorff $\Leftrightarrow$ alle X_i sind Hausdorff

(3) Jedes $pr_i : X \to X_i$ ist eine offene Abbildung.

Theorem Sei $(G_j)_{j\in J}$ eine Familie von topologischen Gruppen, $J \neq \emptyset$. Dann ist $G = \prod_{j\in J} G_j$ eine topologische Gruppe (bezüglich der Produkttopologie).

Jedes $pr_j : G \to G_j$ ist ein offener Morphismus.

Ist H eine topologische Gruppe mit Morphismen $f_j : H \to G_j$ für alle $j \in J$, so gibt es genau ein Morphismus $f : H \to G$ mit $f_j = pr_j \circ f$ für alle $j \in J$.

<u>Beweis</u> Wir müssen nur zeigen, dass die Abbildung $\alpha : G \times G \to G$, $(x,y) \longmapsto x^{-1} y$ stetig ist. Der Rest folgt aus den vorigen Bemerkungen.

Sei $\alpha_j : G_j \times G_j \to G_j$, $(x,y) \longmapsto x^{-1} y$, betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "pr_j \times pr_j"'] \arrow[dr, "\alpha"] & G \arrow[d, "pr_j"] \\ G_j \times G_j \arrow[r, "\alpha_j"] & G_j \end{tikzcd}$$

Aus der universellen Eigenschaft der Produkttopologie, angewandt auf $G \times G \xrightarrow{\alpha} G_j$ folgt, dass α stetig ist. $\square$

6. Lemma Eine topologische Gruppe G ist genau dann Hausdorffsch, wenn es ein $a \in G$ gibt, so dass $\{a\} \subseteq G$ abgeschlossen ist.

Beweis In einem Hausdorff-Raum ist jede endliche Teilmenge abgeschlossen.

Angenommen, $\{a\} \subseteq G$ ist abgeschlossen. Betrachte die stetige Abbildung $h : G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto x^{-1} y a$. Es gilt $h^{-1}(\{a\}) = \{(g,g) \mid g \in G\} \subseteq G \times G$, d.h. die Diagonale in $G \times G$ ist abgeschlossen. Damit ist G Hausdorffsch. $\square$

Wir betrachten als nächstes Untergruppen.

7. Satz Sei G eine topologische Gruppe und sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann ist H bezüglich der Teilraumtopologie eine topologische Gruppe. Weiter ist der Abschluss $\overline{H} \subseteq G$ eine Untergruppe. Falls $H \trianglelefteq G$ normal ist, so ist auch $\overline{H} \trianglelefteq G$.

<u>Beweis</u> Die Teilraumtopologie von $H\times H \subseteq G\times G$ stimmt mit der Produkttopologie der Teilraumtopologie überein, also ist die Einschränkung von $\varkappa : G\times G \to G$, $(x,y) \mapsto x^{-1}y$ eine stetige Abbildung $H\times H \to H$.

Damit ist H eine topologische Gruppe. Weiter gilt wegen der Stetigkeit von $\varkappa$

$$\varkappa(\overline{H\times H}) = \varkappa(\overline{H}\times\overline{H}) \subseteq \overline{\varkappa(H\times H)} = \overline{H},$$

also ist $\overline{H}$ ebenfalls eine Untergruppe.

Angenommen, $H \trianglelefteq G$. Sei $a\in G$ beliebig, betrachte $\gamma_a : G\to G$, $x\mapsto axa^{-1}$. Da γ_a stetig ist, folgt

$$\gamma_a(\overline{H}) \subseteq \overline{\gamma_a(H)}, \text{ d.h. } a\overline{H}a^{-1} \subseteq \overline{aHa^{-1}} = \overline{H} \qquad \square$$

8. <u>Lemma</u> Sei G eine topologische Gruppe und sei $A\subseteq G$ abg. Teilmenge. Dann ist der <u>Normalisator</u>

$$\mathrm{Nor}_G(A) = \{g\in G \mid gAg^{-1} = A\}$$

eine abg. Untergruppe.

<u>Beweis</u> Klar: $\mathrm{Nor}_G(A)\subseteq G$ ist Untergruppe. Sei $a\in G$. Setze $c_a : G\to G$, $g\mapsto gag^{-1}$. Dann ist

$$c_a^{-1}(A) = \{g\in G \mid gag^{-1}\in A\}$$ abgeschlossen,

also auch
$$S = \bigcap\{c_a^{-1}(A) \mid a\in A\} = \{g\in G \mid gAg^{-1}\subseteq A\}$$ abg.

Nun gilt $Nor_G(A) = S \cap S^{-1}$ $\square$

9. <u>Lemma</u> Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei $X \subseteq G$ beliebige Teilmenge. Dann ist der <u>Zentralisator</u> von X

$[u,v] = uvu^{-1}v^{-1}$ <u>Kommutator</u>

$$\begin{aligned} Cen_G(X) &= \{ g \in G \mid \text{für alle } x \in X \text{ ist } gx = xg \} \\ &= \{ g \in G \mid \text{für alle } x \in X \text{ ist } [g,x] = e \} \end{aligned}$$

eine abg. Untergruppe in G. Insbesondere ist das <u>Zentrum</u> von G $Cen(G) = Cen_G(G)$ abg. in G.

<u>Beweis</u> Die Abbildung $G \to G$, $g \mapsto [g,x]$ ist stetig. Wenn also $\{e\} \subseteq G$ abg. ist ($\to$ Hausdorff), so ist $\{ g \in G \mid [g,x] = e \} \subseteq G$ abg. und damit auch $\bigcap_{x \in X} \{ g \in G \mid [g,x] = e \} = Cen_G(X)$ $\square$

10. <u>Lemma</u> Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, sei $A \subseteq G$ eine abelsche Untergruppe. Dann ist auch $\overline{A} \subseteq G$ abelsch.

<u>Beweis</u> Die Abbildung $G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto [x,y]$ ist konstant auf $A \times A$ also auch auf $\overline{A \times A} = \overline{A} \times \overline{A}$

$\square$

11. **Bemerkung** Die beiden letzten Lemmata benötigen die Hausdorff-Voraussetzung.

Bsp $G = \mathrm{Alt}(5) \leq \mathrm{Sym}(5)$, versehen mit der indiskreten Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, G\}$. Es gilt

$G = \overline{\{e\}}$ und $G \neq \{e\}$ ist nicht abelsch.

11. **Lemma** Seien X, U Teilmengen der topologischen Gruppe G. Dann sind XU und UX offene Teilmengen. Insbesondere sind die Abbildungen

$$G \times G \to G, \quad (x,y) \longmapsto x \cdot y$$
$$G \times G \to G \quad (x,y) \longmapsto x^{-1} y \qquad \text{offen.}$$

Beweis $XU = \bigcup_{x \in X} \underbrace{xU}_{\text{offen}}$ $\square$

12. **Satz** Sei G eine top. Gruppe und sei $H \leq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

(i) $H \leq G$ ist offen gdw H eine offene Teilmenge $U \subseteq G$ enthält

(ii) Wenn H offen ist, so ist H auch abg. in G.

(iii) H ist abg. in G gdw es eine offene Menge $U \subseteq G$ gibt so, dass $U \cap H \neq \emptyset$ abg. in U ist.

<u>Beweis</u> (i) "$\Rightarrow$": klar

"$\Leftarrow$": ist $U \subseteq H$ offen in G, so ist $H = UH$ offen in G nach Lemma § 1.11.

(ii) Sei H offen. Dann ist $G - H = \bigcup \{\underbrace{aH}_{\text{offen}} \mid a \in G - H\}$ offen in G

(iii) "$\Rightarrow$": Klar mit $U = G$

"$\Leftarrow$": $U \cap H$ abg in $U \Rightarrow U \cap H$ abg in $U \cap \overline{H}$.

Wir dürfen also OE G ersetzen durch $\overline{H}$, d.h. wir dürfen zusätzlich annehmen, dass $\overline{H} = G$ gilt.

Nun ist $\underbrace{U - (U \cap H)}_{= U - H}$ offen in U, also offen in $G = \overline{H}$

$\Rightarrow U - H = \emptyset \Rightarrow U \subseteq H \overset{(i)}{\Rightarrow} H$ offen $\overset{(ii)}{\Rightarrow} H$ abg. $\square$

13. <u>Korollar</u> (G Hausdorffsch und) Ist $H \leq G$ lokal kompakt in der Teilraumtopologie, so ist $H \leq G$ abg. Insbesondere ist jede diskrete Untergruppe $H \leq G$ abg.

<u>Beweis</u> $H \leq G$ lokal kompakt $\Rightarrow$ es gibt $C \subseteq H$ kompakt und C ist in H eine Einsumgebung.

Also gibt es $U \subseteq G$ offene Einsumgebung mit

$U \cap H \subseteq C \Rightarrow U \cap H = U \cap C$ ist abg in U, denn C ist abg in G (weil kompakt) $\square$

14. Lemma Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine diskrete Untergruppe. Dann gibt es ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $A = a \cdot \mathbb{Z}$

Beweis (ÜA) $\square$

15. Lemma Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ eine nicht diskrete Untergruppe. Dann ist A dicht in $\mathbb{R}$.

Bew. A nicht diskret $\Rightarrow$ A hat einen Häufungspunkt $\Rightarrow$ A hat 0 als Häufungspunkt $\Rightarrow$ für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ gibt es $a_n \in A$ mit $0 < a_n < \frac{1}{n}$.

Sei $r \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_1$ ein $k_n \in \mathbb{Z}$ mit $|a_n \cdot k_n - r| \leq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $r \in \bar{A}$ $\square$

Korollar Die abgeschlossenen Untergruppen $A \subsetneq \mathbb{R}$ sind alle von der Form $A = a\mathbb{Z}$ für ein eindeutiges $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Bsp $A = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, $B = a\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$, a irrational.

Dann ist $A + B$ nicht von der Form $c \cdot \mathbb{Z}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, also dicht in $\mathbb{R}$
(z.B. $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ dicht)

Folgerung Ist G eine top. Gruppe und sind $A, B \subseteq G$ abg. Teilmengen, so ist $A \cdot B \subseteq G$ nicht notwendig abg. in G !

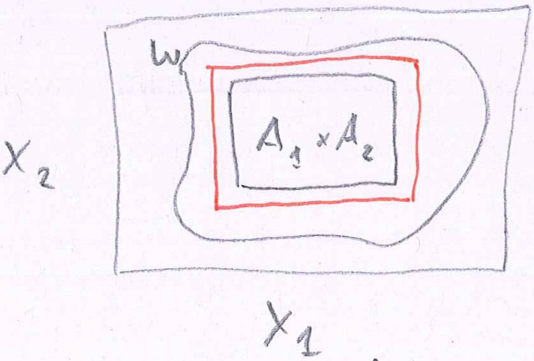
#

Wir benötigen ein Hilfsmittel aus der Topologie.

16. Satz (Wallace' Lemma)

Seien $X_1, \dots, X_m$ Hausdorffräume, sei $A_j \subseteq X_j$ kompakt für $j = 1, \dots, m$, sei $W \subseteq X_1 \times \dots \times X_m$ offen mit $A_1 \times \dots \times A_m \subseteq W$. Dann gibt es offene Mengen $U_j \subseteq X_j$ mit $A_j \subseteq U_j$ und

$$A_1 \times \dots \times A_m \subseteq U_1 \times \dots \times U_m \subseteq W$$



Beweis mit Induktion nach m $\to$ (ÜA!) $\square$

17. Lemma

Sei G eine Hausdorffsche top. Gruppe, seien $A, B \subseteq G$ abg. Teilmengen. Wenn A oder B kompakt ist, dann ist $A \cdot B \subseteq G$ abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen, dass $G - A \cdot B$ offen ist, wenn A kompakt ist.

Sei $g \in G - A \cdot B$. Dann ist $(A^{-1} g) \cap B = \emptyset$.

Für $\varkappa(x,y) = x^{-1} y$ haben wir $\varkappa(A \times \{g\}) \subseteq G - B$

Nach Wallace' Lemma §1.16. gibt es eine offene Umgebung U von g mit $\varkappa(A \times U) \subseteq G - B$, also $(A^{-1}U) \cap B = \phi \Rightarrow U \cap (AB) = \phi$ $\square$

18 Wir betrachten jetzt Quotienten G/H.

18. <u>Def</u> Sei G eine topologische Gruppe, sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe und sei $p: G \to G/H$ die Abbildung $p(g) = gH$. Wir versehen G/H mit der <u>Quotiententopologie</u>, d.h. $W \subseteq G/H$ ist offen $\overset{DEF}{\Leftrightarrow}$ $p^{-1}(W) \subseteq G$ ist offen.

<u>Lemma</u> Die Abbildung $p: G \to G/H$ ist offen.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq G$ offen. Dann ist $p^{-1}(p(U)) = UH \subseteq G$ offen nach §1.12, also ist $p(U)$ offen in G/H. $\square$

19. <u>Satz</u> Sei G eine top. Gruppe, sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:

(i) G/H ist Hausdorffsch gdw $H \subseteq G$ abg. ist.

(ii) G/H ist diskret gdw $H \subseteq G$ offen ist.

<u>Beweis</u> (i) "$\Rightarrow$": G/H Hausdorff $\Rightarrow$ $\{H\} \subseteq G/H$ abg $\Rightarrow$ $p^{-1}(\{H\}) = H$ abg.

"$\Leftarrow$": Sei $H \subseteq G$ abg. Die Abbildung
$$p \times p : G \times G \to G/H \times G/H$$ ist offen (weil p offen ist),
$$W = \{(x,y) \in G \times G \mid x^{-1}y \in G - H\} \subseteq G \times G$$ ist offen $\Rightarrow$
$$(p\times p)(W) = \{(xH, yH) \mid \underset{x,y \in G}{xH \neq yH}\} \subseteq G/H \times G/H$$ offen
$\Rightarrow$ $\{(xH, xH) \mid x \in G\}$ abg $\Rightarrow$ G/H Hausdorffsch. $\square$

(ii) "$\Rightarrow$": G/H diskret $\Rightarrow$ $\{H\} \subseteq G/H$ offen $\Rightarrow$ $p^{-1}(\{H\}) = H \subseteq G$ offen.

"$\Leftarrow$": H offen $\Rightarrow$ gH offen $\Rightarrow$ $p(gH) = \{gH\}$ offen für jedes $g \in G$ $\Rightarrow$ G/H diskret. $\square$

20. <u>Satz</u> Sei G eine topologische Gruppe, sei $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Dann ist G/N bzgl. der Quotiententopologie eine top. Gruppe. Die Abbildung $p : G \to G/N$, $g \mapsto gN$ ist ein offener Morphismus. Der Quotient G/N ist genau dann Hausdorffsch, wenn $N \subseteq G$ abg. ist.
Insbesondere ist $G/\overline{N}$ eine Hausdorffsche topologische Gruppe.

<u>Beweis</u> Nach §1.19 und §1.7 müssen wir nur noch zeigen, dass G/N eine topologische Gruppe ist. Setze $\bar{\varkappa}(gN, hN) = g^{-1}hN$, $\varkappa(g,h) = g^{-1}h$ und betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G \times G \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[d, "p \times p"'] \arrow[dr, "\text{stetig}"] & G \arrow[d, "p"] \\
G/N \times G/N \arrow[r, "\bar{\varkappa}"] & G/N
\end{tikzcd}$$

offen, also Quotientenabb!

Da $p \times p$ offen ist, trägt $G/N \times G/N$ die Quotiententopologie bzgl. $p \times p$ und damit ist $\bar{\varkappa}$ stetig. $\square$

21. <u>Korollar</u> (<u>Der Homomorphiesatz für top. Gruppen</u>)

Seien G, K top. Gruppen und sei $f: G \to K$ ein Morphismus. Setze $N = \ker(f)$. Dann faktorisiert $\underbrace{f,}_{\text{eindeutig}}$ durch $p \circ \bar{f}$,

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & K \\
G/N \arrow[ur, "\bar{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wenn f offen ist, so ist $\bar{f}$ offen.

<u>Beweis</u> Nach dem Homomorphiesatz aus der Algebra existiert der abstrakte Homomorphismus $\bar{f}$ eindeutig.
Da p eine Quotientenabbildung ist, ist $\bar{f}$ stetig, also ein Morphismus.
Wenn f offen ist und wenn $W \subseteq G/N$ offen ist, so ist $\bar{f}(W) = f(p^{-1}(W))$ offen. $\square$

22. <u>Beispiel</u> (a) $G = \mathbb{R}$, $K = U(1)$ Kreisgruppe,

$f : G \to K$, $f(t) = \exp(2\pi i t)$ Morphismus

$\ker(f) = \mathbb{Z}$. Dann ist $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ kompakt
(weil $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = p([0,1])$, $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt),
also ist $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to U(1)$ ein <u>Isomorphismus</u> von topologischen Gruppen.

(b) $G = \mathbb{R}$ mit der <u>diskreten Topologie</u>,
$f(t) = \exp(2\pi i t)$ ist wieder Morphismus,

$\bar{f} : \underbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Z}}_{\text{diskrete Topologie!}} \to U(1)$ ist bijektiver Morphismus aber <u>kein</u> Isomorphismus von top. Gruppen $\triangleright$

<u>Bemerkung</u> Ist G eine lokal kompakte (eine kompakt) top. Gruppe und ist $H \subseteq G$ abg., so ist G/H lokal kompakt (kompakt) $\to$ $\boxed{\text{ÜA}}$.

Jetzt betrachten wir Zusammenhangskomponenten.

23. <u>Erinnerung</u>: Ein top. Raum X ist <u>zush.</u> gdw X und $\emptyset$ die <u>einzigen</u> offenen abg. Mengen in X sind.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist zush., wenn A in der Teilraumtopologie zush. ist.

Wenn $A \subseteq X$ zush. ist, so ist auch $\bar{A}$ zush.

Sind $(A_i)_{i \in I}$ zush. Teilmenge von X und ist $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i$ zush.

Insbesondere ist für jedes $x \in X$ die <u>Zusammenhangskomponente</u> $C(x) = \bigcup \{A \subseteq X \mid x \in A,\ A \text{ zush}\}$ abgeschlossen und zush.

Ist $f: X \to Y$ stetig und ist $A \subseteq X$ zush., so ist $f(A) \subseteq Y$ auch zush.

Insbesondere ist $f(C(x)) \subseteq C(f(x))$.

24. **Def** Ist G eine topologische Gruppe mit Neutralelement $e \in G$, so heißt $C(e) = G^0$ die Einskomponente von G.

Lemma Sei G eine topologische Gruppe. Dann ist $G^0 \subseteq G$ ein abgeschlossener Normalteiler.

Beweis Betrachte $\varkappa(x,y) = x^{-1}y$. Da $G^0 \times G^0$ zush. ist, ist auch $\varkappa(G^0 \times G^0) \subseteq G$ zush., also $\varkappa(G^0 \times G^0) \subseteq G^0 \Rightarrow G^0$ ist Untergruppe.

Nach §1.23 ist $G^0 = C(e)$ abgeschlossen.

Ist $a \in G$ beliebig, so ist aG^0a^{-1} zush., also

$$aG^0a^{-1} \subseteq G^0 \Rightarrow G^0 \trianglelefteq G. \qquad \square$$

25. **Def** Ein topologischer Raum X heißt total unzusammenhängend, wenn für jedes $x \in X$ gilt $C(x) = \{x\}$.

Bsp (a) $\mathbb{Q}$ ist total unzush.

(b) $\prod_{\mathbb{N}} \underbrace{\{0,1\}}_{\text{diskrete Topologie}}$ ist kompakt ($\to$ Tychonov) und total unzush.

($\to$ Cantormenge)

<u>Satz</u> Sei G eine top. Gruppe. Dann ist $G/_{G^0}$ eine total unzush. Hausdorffsche top. Gruppe.

<u>Beweis</u> Da $G^0 \trianglelefteq G$ abg. ist, ist $G/_{G^0}$ eine Hausdorffsche top. Gruppe, vgl. §1.20. Bleibt zu zeigen: $G/_{G^0}$ ist total unzush.

Sei $H = \left(G/_{G^0}\right)^0$ und $N = p^{-1}(H) \subseteq G$.
Dann ist $N \trianglelefteq G$ abg und $G^0 \subseteq N$. Zz: $N = G^0$

<u>Beh: $N = G^0$</u>

Die Einschränkung $p: N \to H$ ist offen (weil $p: G \to G/_{G^0}$ offen ist) und folglich eine Quotientenabbildung. Sei $V \subseteq N$ abg und <u>offen in N</u> mit $e \in V$. Es folgt $vG^0 \subseteq V$ für jedes $v \in V$ $\Rightarrow$ $V = p^{-1}(p(V))$ $\Rightarrow$ $p(V)$ ist offen und abg in H. Da H zush ist, folgt $p(V) = H$ $\Rightarrow$ $V = N$
$\Rightarrow$ N ist zush $\Rightarrow$ $N \subseteq G^0$ $\square$

Folglich ist $H = p(G^0) = \{G^0\} \subseteq G/_{G^0}$ $\square$

<u>Korollar</u> Sind G, K top. Gruppen, $f: G \to K$ ein Morphismus und ist K total unzush., so gilt $G^\circ \subseteq \ker(f)$.

<u>Beweis</u> $f(G^\circ) \subseteq K$ ist zush., also einelementig. $\square$

\#

Jetzt betrachten wir lokalkompakte total unzush. Gruppen.

26. <u>Lemma</u> Sei G eine lokalkompakte topologische Gruppe, sei $V \subseteq G$ eine offene und kompakte Einsumgebung. Dann enthält V eine offene Untergruppe $H \subseteq G$.

<u>Beweis</u> Betrachte die Abbildung $m: G \times G \to G$, $(x,y) \mapsto xy$. Da $m(V \times \{e\}) \subseteq V$ gilt, gibt es nach Wallace' Lemma §1.16 eine offene Einsumgebung $U \subseteq V$ mit $m(V \times U) \subseteq V$, d.h.: $VU \subseteq V$. OE gilt $U = U^{-1} \subseteq V$ (sonst ersetze U durch $U \cap U^{-1}$). Mit Induktion folgt

$\underbrace{VU \cdots U}_{k \text{ mal}} \subseteq V \Rightarrow H = \langle U \rangle \subseteq V$ $\square$

Jetzt brauchen wir eine topologische Überlegung.

27. **Def** Ein Hausdorffraum X ist *0-dimensional* wenn jeder Punkt $x \in X$ beliebig kleine offen abg. Umgebungen hat. Jeder 0-dimensionale Raum ist total unzush., aber die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.

Lemma A Sei X kompakt, sei $x \in X$ und sei

$$Q(x) = \bigcap \{ D \subseteq X \mid x \in D \text{ und } D \text{ ist abg und offen} \}.$$

Dann ist $Q(x)$ zusammenhängend.

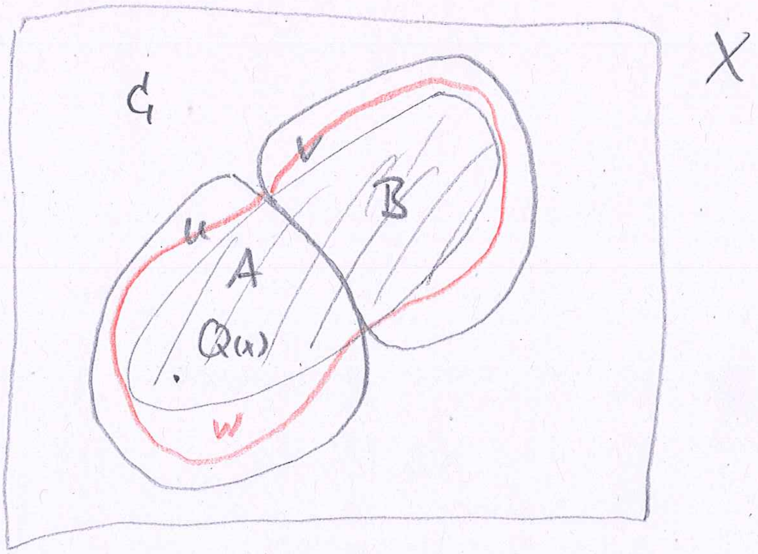
(Man nennt $Q(x)$ die *Quasikomponente* von x)

Beweis Klar: $x \in Q(x)$ und $Q(x)$ ist abgeschlossen.

Angenommen, $Q(x) = A \,\dot\cup\, B$, A, B abg, $x \in A$

Zz: $B = \emptyset$. Nach Wallace Lemma gibt es offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$.

Sei $C = X - (U \cup V) \Rightarrow Q(x) \cap C = \emptyset$, C kompakt.



Für jedes $c \in C$ gibt es eine offen abg. Menge W_c mit $x \in W_c$, $c \notin W_c$ (weil $c \notin Q(x)$). Also gibt es $c_1, \dots, c_m \in C$ mit $C \subseteq (X - W_{c_1}) \cup \dots \cup (X - W_{c_m})$.

Damit ist C disjunkt zur offen abg. Menge

$W = W_{c_1} \cap \dots \cap W_{c_m} \Rightarrow Q(x) \subseteq W$. Da $W \cap C = \emptyset$ ist $W \subseteq U \cup V$.

Nun ist $Y = U \cup (X - W)$ offen $\quad Y \cap Z = \emptyset$

$Z = V \cap W$ offen $\quad X = Y \cup Z$

$x \in Y$, Y abg + offen $\Rightarrow Q(x) \subseteq Y \Rightarrow B = \emptyset$ $\square$

<u>Lemma B</u> Sei X lokal kompakt und total unzush.

Dann ist X 0-dimensional.

<u>Beweis</u> Sei $x \in X$ und sei V eine Umgebg von x.

Zz: es gibt eine abg. und offene Umgebg U von x mit $U \subseteq V$.

OE ist V offen und $\bar{V}$ kompakt (sonst verkleinere V).

Sei $A = \bar{V} - V$. Falls $A = \emptyset$ fertig mit $U = V$.

Sonst: $Q(x) = \{x\}$ (weil X total unzush)

nach Lemma A. Für jedes $a \in A$ gibt es eine kompakt Umgebg U_a von x mit $U_a \subseteq \bar{V}$ und $a \notin U_a$, die offen ist in $\bar{V}$.

Da $\bigcap \{U_a \mid a \in A\} \cap A = \emptyset$ folgt: es gibt $a_1, \dots, a_e \in A$ mit $U_{a_1} \cap \dots \cap U_{a_e} \cap A = \emptyset$

Dann ist $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_\ell}$ abg und offen in $\overline{V}$ mit $U \subseteq V$ => U ist offen in U => U ist offen in X. $\square$

28. Theorem (Satz von van Dantzig)
Sei G eine lokal kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent: (i) G ist total unzush.
(ii) G ist 0-dimensional
(iii) jede Einsumgebung $W \subseteq G$ enthält eine offene Untergruppe $H \subseteq G$.

Beweis (i) => (ii) nach § 1.27
(ii) => (iii): nach § 1.27 gibt es eine kompakte offene Einsumgebung $V \subseteq W$. Nach § 1.26 enthält V eine offene Untergruppe H.
(iii) => (i): sei $g \in G$, $g \neq e$. Dann gibt es nach (iii) eine offene Untergruppe $H \subseteq G - \{g\}$
=> $g \notin CG^0$ $\square$

Für kompakte Gruppen gilt eine stärkere Aussage.

29. <u>Theorem</u> (Van Dantzig)

Sei G eine kompakte Gruppe. Dann sind äquivalent: (i) G ist total unzush.

(ii) G ist 0-dimensional

(iii) jede Einsumgebung $W \subseteq G$ enthält eine offene normale Untergruppe $N \trianglelefteq G$.

<u>Beweis</u> Wir müssen nur zeigen, dass (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Nach § 1.28 gibt es $H \leq G$ offen mit $H \subseteq W$.

Da $G = \bigcup\{gH \mid g \in G\}$ kompakt ist, folgt $[G:H] < \infty$. Setze $X = G/H$. Dann wirkt G von links auf der endlichen Menge X. Sei $N \trianglelefteq G$ der Kern dieser Wirkung. Dann ist

$G/N \leq \mathrm{Sym}(X)$ endlich,

$N = \bigcap\{aHa^{-1} \mid a \in G\}$ ist abg

$\Rightarrow G/N$ diskret $\Rightarrow N$ offen $\square$

30. <u>Def</u> Eine kompakte Gruppe G heißt <u>profinit</u>, wenn es für jedes $g \in G$ eine offene normale Untergruppe $N \trianglelefteq G$ gibt mit $g \notin N$. Dann ist G/N endlich und $gN \neq N$. Van Dantzigs Theorem sagt:
G ist profinit gdw G total unzush. + kompakt.

<u>Beispiel</u> Sei $(F_i)_{i \in I}$ eine Familie von endlichen Gruppen. Wir versehen jedes F_i mit der diskreten Topologie und setzen $G = \prod_{i \in I} F_i$.

Dann ist G kompakt (weil alle F_i kompakt sind) ($\to$ Tychonov) und total unzush.

Denn: ist $x, y \in G$, $x \neq y$, so gibt es $i \in I$ mit $p_i(x) \neq p_i(y)$, $p_i(C(x)) \subseteq C(p_i(x)) = \{p_i(x)\}$ da F_i total unzush.

Also ist G profinit.

31. <u>Theorem</u> Sei G eine profinite Gruppe. Dann gibt es eine Familie von endlichen Gruppen $(F_i)_{i\in I}$ und einen injektiven abgeschlossenen Morphismus $G \to \prod_{i\in I} F_i$

Kurz: jede profinite Gruppe ist enthalten in einem Produkt von endlichen Gruppen.

<u>Beweis</u> Sei $I = \{ N \trianglelefteq G \mid N \text{ abg + offen in } G \}$

Setze $\underbrace{F_N = G/N}_{\text{endliche Gruppe}}$, $f_N = p_N : G \to G/N$, $g \mapsto gN$

$f : G \to \prod_{N\in I} F_N$, $g \mapsto (gN)_{N\in I}$

Dann ist f ein Morphismus. Da G kompakt ist, ist f abgeschlossen. Zu jedem $g\in G$ mit $g \neq e$ gibt es $N \in I$ mit $g \notin N \Rightarrow f$ ist injektiv. $\square$