Das Theorem von Feit und Higman

Chris Hilmes

28. November 2017

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

In Lara's Vortrag: Bruck-Ryser (1949)

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

In Lara's Vortrag: Bruck-Ryser (1949)

- Sei $n = 3$ und Γ endlich und dick. Es gelte $s \equiv 1, 2 \mod 4$. Dann gilt $s = a^2 + b^2$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$.

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

In Lara's Vortrag: Bruck-Ryser (1949)

- Sei $n = 3$ und Γ endlich und dick. Es gelte $s \equiv 1, 2 \mod 4$. Dann gilt $s = a^2 + b^2$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$.
- Idee: Verwende bestimmte Matrix $B = AA^T$ als Invariante und studiere diese algebraisch.

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

In Lara's Vortrag: Bruck-Ryser (1949)

- Sei $n = 3$ und Γ endlich und dick. Es gelte $s \equiv 1, 2 \mod 4$. Dann gilt $s = a^2 + b^2$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$.
- Idee: Verwende bestimmte Matrix $B = AA^T$ als Invariante und studiere diese algebraisch.

Im heutigen Vortrag: Feit-Higman (1964)

Was bisher geschah

In Christoph's Vortrag: Einführung

- Ein verallgemeinertes n-Eck Γ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph mit Durchmesser n und Umfang $2n$.
- Ist Γ dick, so besitzt Γ eine Ordnung (s, t).

In Lara's Vortrag: Bruck-Ryser (1949)

- Sei $n = 3$ und Γ endlich und dick. Es gelte $s \equiv 1, 2 \mod 4$. Dann gilt $s = a^2 + b^2$ für gewisse $a, b \in \mathbb{N}$.
- Idee: Verwende bestimmte Matrix $B = AA^T$ als Invariante und studiere diese algebraisch.

Im heutigen Vortrag: Feit-Higman (1964)

- Sei Γ endlich und dick. Dann gilt $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$.

Definition

Eine $\mathbb{C}$-**Algebra** $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer (endlich dimensionalen) $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur,
- einer verträglichen inneren Multiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit 1_A.

Definition

Eine $\mathbb{C}$-**Algebra** $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer (endlich dimensionalen) $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur,
- einer verträglichen inneren Multiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit 1_A.

Anders formuliert: $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer Ring Struktur mit 1_A,
- einer verträglichen äußeren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Definition

Eine $\mathbb{C}$-**Algebra** $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer (endlich dimensionalen) $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur,
- einer verträglichen inneren Multiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit 1_A.

Anders formuliert: $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer Ring Struktur mit 1_A,
- einer verträglichen äußeren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Example

- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit $A \cdot B := AB$.

Definition

Eine $\mathbb{C}$-**Algebra** $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer (endlich dimensionalen) $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur,
- einer verträglichen inneren Multiplikation $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ mit 1_A.

Anders formuliert: $\mathcal{A}$ besteht aus

- einer Ring Struktur mit 1_A,
- einer verträglichen äußeren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Example

- $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ ist eine $\mathbb{C}$-Algebra mit $A \cdot B := AB$.
- $\mathbb{C}\langle \tau, \sigma \rangle$ ist die von σ und τ frei erzeugte $\mathbb{C}$-Algebra.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$
- einer verträglichen Links-Multiplikation $\mathcal{A} \times M \to M$.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$
- einer verträglichen Links-Multiplikation $\mathcal{A} \times M \to M$.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$
- einer verträglichen Links-Multiplikation $\mathcal{A} \times M \to M$.

Insbesondere trägt M via

$$\lambda \cdot m := (\lambda 1_A)m \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, m \in M)$$

eine $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$
- einer verträglichen Links-Multiplikation $\mathcal{A} \times M \to M$.

Insbesondere trägt M via

$$\lambda \cdot m := (\lambda 1_A)m \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, m \in M)$$

eine $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur.

Example

- Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$-Modul mit $A \cdot v := Av$.

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra. Ein $\mathcal{A}$-(Links)**Modul** M ist besteht aus

- einer abelschen Gruppe $(M, +)$
- einer verträglichen Links-Multiplikation $\mathcal{A} \times M \to M$.

Insbesondere trägt M via

$$\lambda \cdot m := (\lambda 1_A)m \qquad (\lambda \in \mathbb{C}, m \in M)$$

eine $\mathbb{C}$-Vektorraum Struktur.

Example

- Der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$ ist ein $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$-Modul mit $A \cdot v := Av$.
- $\mathcal{A}$ ist ein Modul über sich selbst.

(Halb)Einfachheit

Definition

Sei $M \neq \{0\}$ ein $\mathcal{A}$-Modul.

(Halb)Einfachheit

Definition

Sei $M \neq \{0\}$ ein $\mathcal{A}$-Modul.

M heißt **einfach**, wenn gilt:

$$U \leq M \text{ Untermodul} \Rightarrow U = 0 \text{ oder } U = M.$$

(Halb)Einfachheit

Definition

Sei $M \neq \{0\}$ ein $\mathcal{A}$-Modul.

M heißt **einfach**, wenn gilt:

$$U \leq M \text{ Untermodul} \Rightarrow U = 0 \text{ oder } U = M.$$

M heißt **halb-einfach**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- M ist direkte Summe von einfachen Untermoduln.
- Für alle $U \leq M$ gibt es $V \leq M$ sodass gilt: $M = U \oplus V$.

(Halb)Einfachheit

Definition

Sei $M \neq \{0\}$ ein $\mathcal{A}$-Modul.

M heißt **einfach**, wenn gilt:

$$U \leq M \text{ Untermodul} \Rightarrow U = 0 \text{ oder } U = M.$$

M heißt **halb-einfach**, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

- M ist direkte Summe von einfachen Untermoduln.
- Für alle $U \leq M$ gibt es $V \leq M$ sodass gilt: $M = U \oplus V$.

$\mathcal{A}$ heißt **halb-einfach**, wenn $\mathcal{A}$ als Modul über sich selbst halb-einfach ist.

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Sei $m \in M - \{0\}$ und betrachte den Homomorphismus:

$$\phi : A \to M, x \mapsto xm$$

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Sei $m \in M - \{0\}$ und betrachte den Homomorphismus:

$$\phi : A \to M, x \mapsto xm$$

- M ist einfach, also ist ϕ surjektiv.

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Sei $m \in M - \{0\}$ und betrachte den Homomorphismus:

$$\phi : A \to M, x \mapsto xm$$

- M ist einfach, also ist ϕ surjektiv.
- Homomorphiesatz sagt $M \cong {}^{A}/_{\ker(\phi)}$.

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Sei $m \in M - \{0\}$ und betrachte den Homomorphismus:

$$\phi : A \to M, x \mapsto xm$$

- M ist einfach, also ist ϕ surjektiv.
- Homomorphiesatz sagt $M \cong {}^{A}/_{\ker(\phi)}$.
- $\mathcal{A}$ ist halbeinfach, also ex. $W \leq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \ker(\phi) \oplus W$.

Lemma über $\mathcal{A}$-Module

Lemma

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann ist jeder einfache $\mathcal{A}$-Modul M isomorph zu einem Untermodul von $\mathcal{A}$.

Beweis.

- Sei $m \in M - \{0\}$ und betrachte den Homomorphismus:

$$\phi : A \to M, x \mapsto xm$$

- M ist einfach, also ist ϕ surjektiv.
- Homomorphiesatz sagt $M \cong {}^{A}/_{\ker(\phi)}$.
- $\mathcal{A}$ ist halbeinfach, also ex. $W \leq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} = \ker(\phi) \oplus W$.
- Zusammen erhalten wir $M \cong {}^{\ker(\phi) \oplus W}/_{\ker(\phi)} \cong W$.

Theorem von Artin-Wedderburn

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Wir definieren: $M(\mathcal{A}) := \bigoplus\{W \leq \mathcal{A} \mid W \cong M\}$.

Theorem von Artin-Wedderburn

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Wir definieren: $M(\mathcal{A}) := \bigoplus\{W \leq \mathcal{A} \mid W \cong M\}$.

Theorem (Artin-Wedderburn)

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann gibt es (bis auf Iso.) nur endlich viele einfache $\mathcal{A}$-Moduln $M_1, \dots, M_r$ und es gilt:

Theorem von Artin-Wedderburn

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Wir definieren: $M(\mathcal{A}) := \bigoplus \{W \leq \mathcal{A} \mid W \cong M\}$.

Theorem (Artin-Wedderburn)

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann gibt es (bis auf Iso.) nur endlich viele einfache $\mathcal{A}$-Moduln $M_1, \ldots, M_r$ und es gilt:

(i) $M_i(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathcal{A}$ *ist ein einfaches Ideal.*

Theorem von Artin-Wedderburn

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Wir definieren: $M(\mathcal{A}) := \bigoplus\{W \leq \mathcal{A} \mid W \cong M\}$.

Theorem (Artin-Wedderburn)

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann gibt es (bis auf Iso.) nur endlich viele einfache $\mathcal{A}$-Moduln $M_1, \dots, M_r$ und es gilt:

(i) $M_i(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathcal{A}$ *ist ein einfaches Ideal.*

(ii) $\mathcal{A} \cong M_1(\mathcal{A}) \times \dots \times M_r(\mathcal{A})$.

Theorem von Artin-Wedderburn

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra und M ein einfacher $\mathcal{A}$-Modul. Wir definieren: $M(\mathcal{A}) := \bigoplus\{W \leq \mathcal{A} \mid W \cong M\}$.

Theorem (Artin-Wedderburn)

Sei $\mathcal{A}$ eine halb-einfache $\mathbb{C}$-Algebra. Dann gibt es (bis auf Iso.) nur endlich viele einfache $\mathcal{A}$-Moduln $M_1, \ldots, M_r$ und es gilt:

(i) $M_i(\mathcal{A}) \trianglelefteq \mathcal{A}$ *ist ein einfaches Ideal.*

(ii) $\mathcal{A} \cong M_1(\mathcal{A}) \times \ldots \times M_r(\mathcal{A})$.

(iii) $M_i(\mathcal{A}) \cong Mat_{n_i}(\mathbb{C})$, *wobei* $n_i := \dim M_i$.

Beispiel zu Artin-Wedderburn

Betrachte die komplexe Algebra $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\}$.

Beispiel zu Artin-Wedderburn

Betrachte die komplexe Algebra $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\}$.

Die $\mathbb{C}$-Vektorräume $M_1 = \mathbb{C}^2$ und $M_2 = \mathbb{C}^3$ werden mittels

$$\mathcal{A} \times M_1 \to M_1, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Av$$
$$\mathcal{A} \times M_2 \to M_2, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Bv$$

zu nicht-isomorphen einfachen $\mathcal{A}$-Links-Moduln.

Beispiel zu Artin-Wedderburn

Betrachte die komplexe Algebra $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\}$.

Die $\mathbb{C}$-Vektorräume $M_1 = \mathbb{C}^2$ und $M_2 = \mathbb{C}^3$ werden mittels

$$\mathcal{A} \times M_1 \to M_1, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Av$$
$$\mathcal{A} \times M_2 \to M_2, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Bv$$

zu nicht-isomorphen einfachen $\mathcal{A}$-Links-Moduln. Weiter gilt

$$M_1(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel zu Artin-Wedderburn

Betrachte die komplexe Algebra $\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\}$.

Die $\mathbb{C}$-Vektorräume $M_1 = \mathbb{C}^2$ und $M_2 = \mathbb{C}^3$ werden mittels

$$\mathcal{A} \times M_1 \to M_1, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Av$$
$$\mathcal{A} \times M_2 \to M_2, \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, v \right) \mapsto Bv$$

zu nicht-isomorphen einfachen $\mathcal{A}$-Links-Moduln. Weiter gilt

$$M_1(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$M_2(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

Beispiel zu Artin-Wedderburn

Mit Artin-Wedderburn erhalten wir damit die Zerlegung:

$$\mathcal{A} = M_1(\mathcal{A}) \times M_2(\mathcal{A}) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{\cong \operatorname{Mat}_2(\mathbb{C})} \times \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{pmatrix} \right\}}_{\cong \operatorname{Mat}_3(\mathbb{C})}$$

Genug abstrakte $\mathcal{A}$lgebra (fürs erste...)

Adjazenzmatrix

Definition

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein (simplizialer) Graph.

Adjazenzmatrix

Definition

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein (simplizialer) Graph. Für $v, w \in V$ setze

$$a(v,w) := \begin{cases} 1, & \{v,w\} \in E \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Adjazenzmatrix

Definition

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein (simplizialer) Graph. Für $v, w \in V$ setze

$$a(v,w) := \begin{cases} 1, & \{v,w\} \in E \\ 0, & sonst \end{cases}$$

und definiere die **Adjazenzmatrix** von Γ durch

$$\mathrm{Adj}(\Gamma) := \big(a(v,w)\big)_{v,w \in V}$$

Potenzen der Adjazenzmatrix

Lemma

Sei Γ ein Graph und $A := \mathrm{Adj}(A)$ sowie $A^n = \Big(a_n(v,w)\Big)_{v,w\in V}$.

Potenzen der Adjazenzmatrix

Lemma

Sei Γ ein Graph und $A := \mathrm{Adj}(A)$ sowie $A^n = \Big(a_n(v,w)\Big)_{v,w\in V}$.

(i) Es gilt $a_n(v,w) = \#\{\text{Wege der Länge } n \text{ von } v \text{ nach } w\}$.

Potenzen der Adjazenzmatrix

Lemma

Sei Γ ein Graph und $A := \mathrm{Adj}(A)$ sowie $A^n = \Big(a_n(v,w)\Big)_{v,w \in V}$.

(i) Es gilt $a_n(v,w) = \#\{\text{Wege der Länge } n \text{ von } v \text{ nach } w\}$.

(ii) Ist $\Gamma = K_{m+1}$ der vollständige Graph mit $m+1$ Ecken. Dann gilt:

$$A^2 = m \cdot \mathbb{1} + (m-1) \cdot A$$

Potenzen der Adjazenzmatrix

Lemma

Sei Γ ein Graph und $A := \mathrm{Adj}(A)$ sowie $A^n = \Big(a_n(v,w)\Big)_{v,w\in V}$.

(i) Es gilt $a_n(v,w) = \#\{\text{Wege der Länge } n \text{ von } v \text{ nach } w\}$.

(ii) Ist $\Gamma = K_{m+1}$ der vollständige Graph mit $m+1$ Ecken. Dann gilt:

$$A^2 = m \cdot \mathbb{1} + (m-1) \cdot A$$

Beweis.

(i) Leichte Induktion: Ein Weg von v nach w der Länge $n+1$ ist ein Weg der Länge n von v zu einem Nachbarn u von w und der Kante $\{u,w\}$.

Potenzen der Adjazenzmatrix

Lemma

Sei Γ ein Graph und $A := \mathrm{Adj}(A)$ sowie $A^n = \Big(a_n(v,w)\Big)_{v,w\in V}$.

(i) Es gilt $a_n(v,w) = \#\{\text{Wege der Länge } n \text{ von } v \text{ nach } w\}$.

(ii) Ist $\Gamma = K_{m+1}$ der vollständige Graph mit $m+1$ Ecken. Dann gilt:

$$A^2 = m \cdot \mathbb{1} + (m-1) \cdot A$$

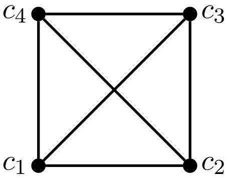
Beweis.

(i) Leichte Induktion: Ein Weg von v nach w der Länge $n+1$ ist ein Weg der Länge n von v zu einem Nachbarn u von w und der Kante $\{u,w\}$.

(ii) Folgt direkt aus (i).

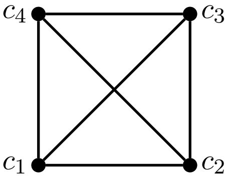
Vollständiger Graph

Der vollständige Graph K_4



Vollständiger Graph

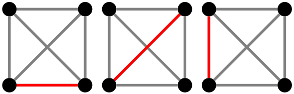
Der vollständige Graph K_4



$$A = Adj(K_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

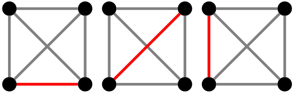
Vollständiger Graph

Wege $c_1 \rightsquigarrow c_1$ der Länge 2

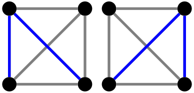


Vollständiger Graph

Wege $c_1 \rightsquigarrow c_1$ der Länge 2

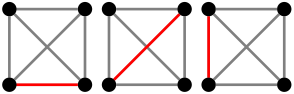


Wege $c_1 \rightsquigarrow c_2$ der Länge 2

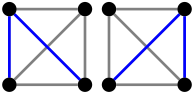


Vollständiger Graph

Wege $c_1 \rightsquigarrow c_1$ der Länge 2



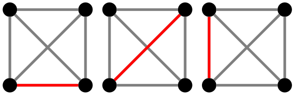
Wege $c_1 \rightsquigarrow c_2$ der Länge 2



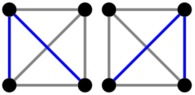
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

Vollständiger Graph

Wege $c_1 \rightsquigarrow c_1$ der Länge 2



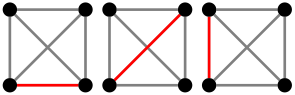
Wege $c_1 \rightsquigarrow c_2$ der Länge 2



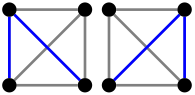
$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vollständiger Graph

Wege $c_1 \rightsquigarrow c_1$ der Länge 2



Wege $c_1 \rightsquigarrow c_2$ der Länge 2



$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \mathbb{1} + 2 \cdot A$$

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit
  - Ecken: $\mathcal{C} := E$ (Kammern)

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit
  - Ecken: $\mathcal{C} := E$ (Kammern)
  - Kanten: $\{e_1, e_2\}$ bilden eine Kante $:\Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \in V$.

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit
  - Ecken: $\mathcal{C} := E$ (Kammern)
  - Kanten: $\{e_1, e_2\}$ bilden eine Kante $:\Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \in V$.
- Da Γ bipartit ist, ist $\tilde{\Gamma}$ kantengefärbt mit Farben 1,2.

Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit
  - Ecken: $\mathcal{C} := E$ (Kammern)
  - Kanten: $\{e_1, e_2\}$ bilden eine Kante $:\Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \in V$.
- Da Γ bipartit ist, ist $\tilde{\Gamma}$ kantengefärbt mit Farben 1,2.
- Betrachte die einfarbigen Untergraphen $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$ von $\tilde{\Gamma}$.

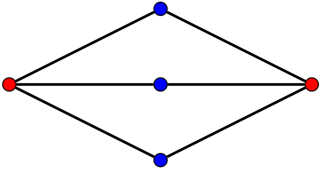
Das geometrische Setup

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches, dickes, verallgemeinertes n-Eck der Ordnung (s, t).

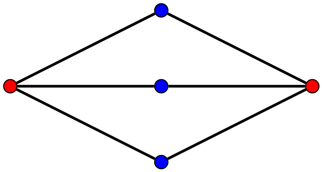
- Betrachte den dualen Kammergraphen $\tilde{\Gamma}$ mit
  - Ecken: $\mathcal{C} := E$ (Kammern)
  - Kanten: $\{e_1, e_2\}$ bilden eine Kante $:\Leftrightarrow e_1 \cap e_2 \in V$.
- Da Γ bipartit ist, ist $\tilde{\Gamma}$ kantengefärbt mit Farben 1,2.
- Betrachte die einfarbigen Untergraphen $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$ von $\tilde{\Gamma}$.
- Definiere die zugehörigen Adjazenzmatrizen:

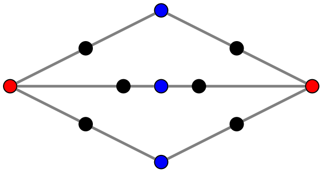
$$S := \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_1) \quad T := \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_2)$$

Die Dualisierung

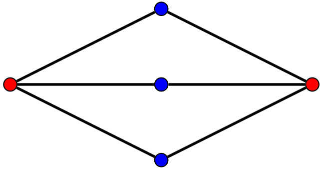


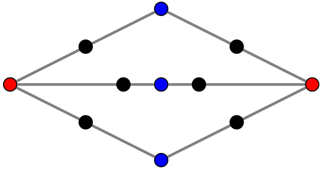
Die Dualisierung

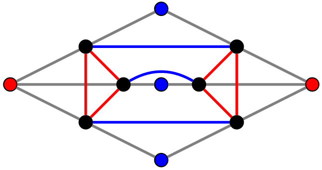




Die Dualisierung

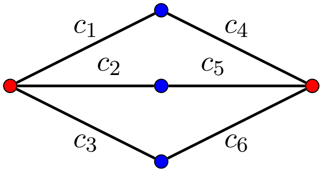






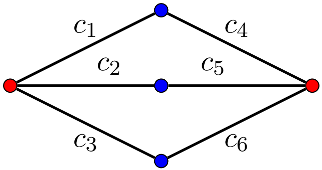
Beispiel: Die Graphen Γ und $\tilde{\Gamma}$

verallgemeinertes 2-Eck Γ

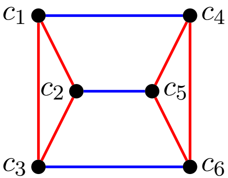


Beispiel: Die Graphen Γ und $\tilde{\Gamma}$

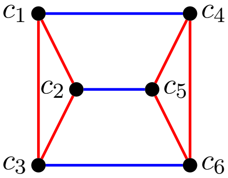
verallgemeinertes 2-Eck Γ



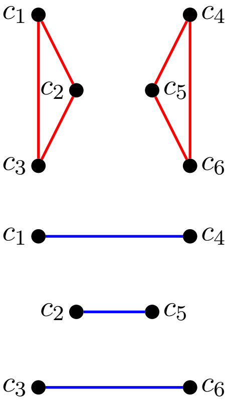
Dualer Kammerngraph $\tilde{\Gamma}$



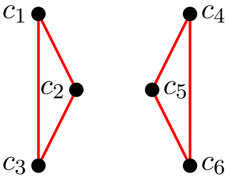
Die Untergraphen $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$



Beispiel: Die Untergraphen $\tilde{\Gamma}_1$ und $\tilde{\Gamma}_2$

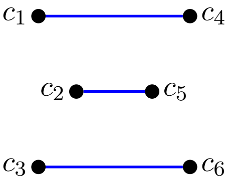


Beispiel: Die Matrizen S und T



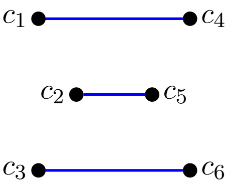
$$S = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die Matrizen S und T



$$T = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Die Matrizen S und T



$$T = \operatorname{Adj}(\tilde{\Gamma}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrizen S_k und T_k

Betrachte nun Produkte von den Matrizen S und T:

Die Matrizen S_k und T_k

Betrachte nun Produkte von den Matrizen S und T:

$$S_k := STS\ldots \ (k \text{ Faktoren})$$
$$T_k := TST\ldots \ (k \text{ Faktoren})$$

Die Matrizen S_k und T_k

Betrachte nun Produkte von den Matrizen S und T:

$$S_k := STS ... \text{ (}k\text{ Faktoren)}$$
$$T_k := TST ... \text{ (}k\text{ Faktoren)}$$

Wir erhalten

$$S_k(c, d) = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow d \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (1, 2, 1, ...)\}$$

Die Matrizen S_k und T_k

Betrachte nun Produkte von den Matrizen S und T:

$$S_k := STS\ldots \text{ (}k\text{ Faktoren)}$$
$$T_k := TST\ldots \text{ (}k\text{ Faktoren)}$$

Wir erhalten

$$S_k(c,d) = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow d \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (1,2,1,\ldots)\}$$

und

$$T_k(c,d) = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow d \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (2,1,2,\ldots)\}$$

Die Matrizen S_k und T_k

Lemma

(i) $S^2 = s\mathbb{1} + (s-1)S \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, s\}$
$T^2 = t\mathbb{1} + (t-1)T \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, t\}$

Die Matrizen S_k und T_k

Lemma

(i) $S^2 = s\mathbb{1} + (s-1)S \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, s\}$
$T^2 = t\mathbb{1} + (t-1)T \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, t\}$

(ii) $S_n = T_n$.

Die Matrizen S_k und T_k

Lemma

(i) $S^2 = s\mathbb{1} + (s-1)S \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, s\}$
$T^2 = t\mathbb{1} + (t-1)T \rightsquigarrow$ *Eigenwerte:* $\{-1, t\}$

(ii) $S_n = T_n$.

(iii) *Die Matrix*

$$\mathbb{1} + S + T + S_2 + T_2 + \ldots + S_{n-1} + T_{n-1} + S_n$$

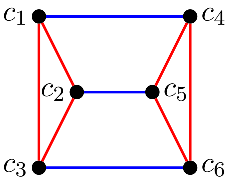
hat überall Einsen.

Beispiel: Produkt(e) von S und T

$$S_2 = S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

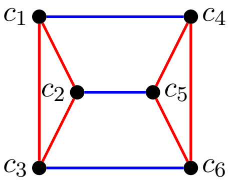
Beispiel: Produkt(e) von S und T

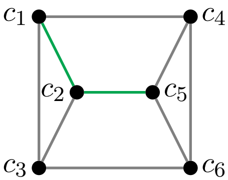
$$S_2 = S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Beispiel: Produkt(e) von S und T

$$S_2 = S \cdot T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





Beispiel: Produkt(e) von S und T

$$\mathbb{1} + S + T + S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Zahlen s_k und t_k

Betrachte Produkte der Zahlen s und t.

$$s_k := sts ... \text{ (k Faktoren)}$$
$$t_k := tst ... \text{ (k Faktoren)}$$

Die Zahlen s_k und t_k

Betrachte Produkte der Zahlen s und t.

$$s_k := sts... \ (k \text{ Faktoren})$$
$$t_k := tst... \ (k \text{ Faktoren})$$

Für eine feste Kammer $c \in \mathcal{C}$ gilt somit:

$$s_k = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow ... \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (1, 2, 1, ...)\}$$
$$t_k = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow ... \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (2, 1, 2, ...)\}$$

Die Zahlen s_k und t_k

Betrachte Produkte der Zahlen s und t.

$$s_k := sts... \text{ (k Faktoren)}$$
$$t_k := tst... \text{ (k Faktoren)}$$

Für eine feste Kammer $c \in \mathcal{C}$ gilt somit:

$$s_k = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow ... \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (1, 2, 1, ...)\}$$
$$t_k = \#\{\text{Wege } c \rightsquigarrow ... \text{ der Länge } k \text{ vom Typ } (2, 1, 2, ...)\}$$

Insbesondere gilt $s_n = t_n$, also $s = t$ falls n ungerade.
Für $N := \#\mathcal{C}$ erhalten wir:

$$N = 1 + s + t + s_2 + t_2 + ... + s_{n-1} + t_{n-1} + s_n$$

Also z.B. für $n = 3$:

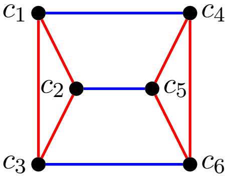
$$N = 1 + s + s + s^2 + s^2 + s^3 = (s + 1)(1 + s + s^2)$$

Das geometrische Setup

Mit der geometrischen Summenformel erhalten wir:

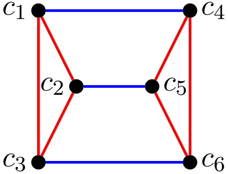
$$N_n(s,t) = \begin{cases} (s+1)\frac{s^n-1}{s-1}, & n \text{ ungerade} \\ (s+1)(t+1)\frac{(st)^l-1}{st-1}, & n = 2l \text{ gerade} \end{cases}$$

Beispiel: Formel für die Anzahl Kammern



Bei uns ist $n = 2 \cdot l = 2 \cdot 1$ mit $s = 2$ und $t = 1$:

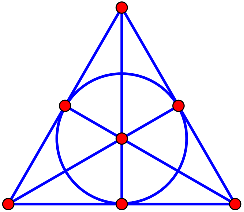
Beispiel: Formel für die Anzahl Kammern



Bei uns ist $n = 2 \cdot l = 2 \cdot 1$ mit $s = 2$ und $t = 1$:

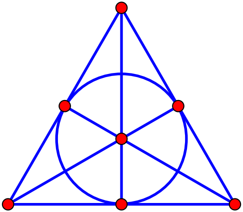
$$N_2(2, 1) = (2 + 1)(1 + 1)\frac{(2 \cdot 1)^1 - 1}{2 \cdot 1 - 1} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{6}.$$

Kammern der Fano-Ebene



Die Fano-Ebene hat die Parameter $n = 3$, $s = t = 2$:

Kammern der Fano-Ebene

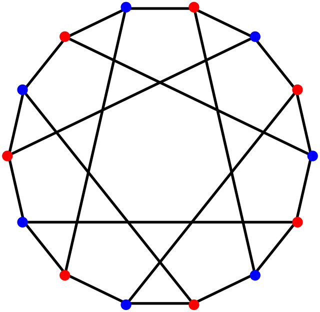


Die Fano-Ebene hat die Parameter $n = 3$, $s = t = 2$:

$$N_3(2, 2) = (2 + 1)\frac{2^3 - 1}{2 - 1} = 3 \cdot 7 = \mathbf{21}.$$

Kammern der Fano-Ebene

Also hat der Inzidenzgraph (das assoziierte Gebäude) 21 Kanten (Kammern).



Zusammenfassung

Γ endliches dickes verallg. n-Eck der Ordnung (s, t).

Zusammenfassung

Γ endliches dickes verallg. n-Eck der Ordnung (s, t).

- Dualisierung: $\Gamma \rightsquigarrow \tilde{\Gamma}$

Zusammenfassung

Γ endliches dickes verallg. n-Eck der Ordnung (s, t).

- Dualisierung: $\Gamma \rightsquigarrow \tilde{\Gamma}$
- Zerlegung: $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$

Zusammenfassung

Γ endliches dickes verallg. n-Eck der Ordnung (s, t).

- Dualisierung: $\Gamma \rightsquigarrow \tilde{\Gamma}$
- Zerlegung: $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$
- Matrizen: $S = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_1)$ und $T = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_2)$

Zusammenfassung

Γ endliches dickes verallg. n-Eck der Ordnung (s, t).

- Dualisierung: $\Gamma \rightsquigarrow \tilde{\Gamma}$
- Zerlegung: $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \cup \tilde{\Gamma}_2$
- Matrizen: $S = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_1)$ und $T = \mathrm{Adj}(\tilde{\Gamma}_2)$
- Gleichungen:

$$S^2 = s\mathbb{1} + (s-1)S$$
$$T^2 = t\mathbb{1} + (t-1)T$$
$$\underbrace{STS\ldots}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{TST\ldots}_{n \text{ Faktoren}}$$

Algebraische Übersetzung

- Betrachte den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ mit der Basis $\mathcal{C}$.

Algebraische Übersetzung

- Betrachte den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ mit der Basis $\mathcal{C}$.
- Erhalte darauf das Skalarprodukt (positiv definite hermitesche Sesquilinearform):

$$\langle \sum_{c \in \mathcal{C}} x_c c, \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c c \rangle := \sum_{c \in \mathcal{C}} \bar{x}_c y_c$$

Algebraische Übersetzung

- Betrachte den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ mit der Basis $\mathcal{C}$.
- Erhalte darauf das Skalarprodukt (positiv definite hermitesche Sesquilinearform):

$$\langle \sum_{c \in \mathcal{C}} x_c c, \sum_{c \in \mathcal{C}} y_c c \rangle := \sum_{c \in \mathcal{C}} \bar{x}_c y_c$$

- Für komplexe Matrizen $X, Y \in \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$ setze

$$\langle X, Y \rangle := \mathrm{tr}(X^* Y)$$

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y \rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y\rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k\rangle = s_k N$

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y\rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k\rangle = s_k N$

(iii) $\langle T_k, T_k\rangle = t_k N$

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y\rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k\rangle = s_k N$

(iii) $\langle T_k, T_k\rangle = t_k N$

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y \rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k \rangle = s_k N$

(iii) $\langle T_k, T_k \rangle = t_k N$

Beweis.

- Jede Zeile in S_k hat s_k von 0 verschiedene Einträge die jeweils 1 sind.

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y\rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k\rangle = s_k N$

(iii) $\langle T_k, T_k\rangle = t_k N$

Beweis.

- Jede Zeile in S_k hat s_k von 0 verschiedene Einträge die jeweils 1 sind.
- S_k hat N Zeilen.

Betrachte die Menge $\mathcal{B} := \{\mathbb{1}, S, T, S_2, T_2, ..., S_{n-1}, T_{n-1}, S_n\}$.

Lemma

(i) $\langle X, Y \rangle = 0$ *für* $X, Y \in \mathcal{B}$ *mit* $X \neq Y$.

(ii) $\langle S_k, S_k \rangle = s_k N$

(iii) $\langle T_k, T_k \rangle = t_k N$

Beweis.

- Jede Zeile in S_k hat s_k von 0 verschiedene Einträge die jeweils 1 sind.
- S_k hat N Zeilen.
- $\langle S_k, S_k \rangle = \mathrm{tr}({S_k}^T S_k) = N s_k$

Wir betrachten die von $\mathcal{B}$ erzeugte Unteralgebra

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{B} \rangle_{\text{Alg.}} \subseteq \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$$

Wir betrachten die von $\mathcal{B}$ erzeugte Unteralgebra

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{B} \rangle_{\text{Alg.}} \subseteq \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$$

und die abstrakte (Hecke)-Algebra

$$\mathcal{H}(s,t,n) := {}^{\mathbb{C}\langle \sigma, \tau \rangle}/_{R}, \text{ wobei } R := \left\{ \begin{array}{c} \sigma^2 = s + (s-1)\sigma, \\ \tau^2 = t + (t-1)\sigma, \\ \underbrace{\sigma\tau\sigma\ldots}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{\tau\sigma\tau\ldots}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

Wir betrachten die von $\mathcal{B}$ erzeugte Unteralgebra

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{B} \rangle_{\text{Alg.}} \subseteq \text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$$

und die abstrakte (Hecke)-Algebra

$$\mathcal{H}(s,t,n) := {}^{\mathbb{C}\langle \sigma,\tau \rangle}/_{R}, \text{ wobei } R := \left\{ \begin{array}{c} \sigma^2 = s + (s-1)\sigma, \\ \tau^2 = t + (t-1)\sigma, \\ \underbrace{\sigma\tau\sigma\ldots}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{\tau\sigma\tau\ldots}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

- Via $\sigma \mapsto S, \tau \mapsto T$ erhalten wir einen Epimorphismus

$$\mathcal{H}(s,t,n) \twoheadrightarrow \mathcal{A}$$

Wir betrachten die von $\mathcal{B}$ erzeugte Unteralgebra

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{B} \rangle_{\text{Alg.}} \subseteq \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$$

und die abstrakte (Hecke)-Algebra

$$\mathcal{H}(s,t,n) := {}^{\mathbb{C}\langle \sigma,\tau \rangle}/_{R}, \text{ wobei } R := \left\{ \begin{array}{c} \sigma^2 = s + (s-1)\sigma, \\ \tau^2 = t + (t-1)\sigma, \\ \underbrace{\sigma\tau\sigma\ldots}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{\tau\sigma\tau\ldots}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

- Via $\sigma \mapsto S, \tau \mapsto T$ erhalten wir einen Epimorphismus

$$\mathcal{H}(s,t,n) \twoheadrightarrow \mathcal{A}$$

- Das ist sogar ein Isomorphismus. (!)

Wir betrachten die von $\mathcal{B}$ erzeugte Unteralgebra

$$\mathcal{A} := \langle \mathcal{B} \rangle_{\text{Alg.}} \subseteq \operatorname{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathbb{C})$$

und die abstrakte (Hecke)-Algebra

$$\mathcal{H}(s,t,n) := {}^{\mathbb{C}\langle \sigma, \tau \rangle}/_{R}, \text{ wobei } R := \left\{ \begin{array}{c} \sigma^2 = s + (s-1)\sigma, \\ \tau^2 = t + (t-1)\sigma, \\ \underbrace{\sigma\tau\sigma\ldots}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{\tau\sigma\tau\ldots}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

- Via $\sigma \mapsto S, \tau \mapsto T$ erhalten wir einen Epimorphismus

$$\mathcal{H}(s,t,n) \twoheadrightarrow \mathcal{A}$$

- Das ist sogar ein Isomorphismus. (!)
- $\mathcal{B}$ ist eine Basis für $\mathcal{A}$ und es gilt somit $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{A}) = 2n$.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^{\perp}$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^{\perp}$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^{\perp} \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow$ $H^\perp$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow$ $I^\perp \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow$ I *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^\perp$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^\perp \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow I$ *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^{\perp}$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^{\perp} \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow I$ *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Beweis von (ii).

- Sei $Y \in I^{\perp}$ und $X \in I$.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^\perp$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^\perp \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow I$ *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Beweis von (ii).

- Sei $Y \in I^\perp$ und $X \in I$.
- Wir erhalten $SX \in I$ und somit $\langle Y, SX \rangle = 0$.

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^\perp$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^\perp \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow I$ *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Beweis von (ii).

- Sei $Y \in I^\perp$ und $X \in I$.
- Wir erhalten $SX \in I$ und somit $\langle Y, SX \rangle = 0$.
- Wegen $S^* = S$ erhalten wir somit:

$$\langle SY, X \rangle = \langle Y, SX \rangle = 0$$

Betrachte $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul.

Lemma

(i) *Sei* $H \leq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ $\mathcal{A}$*-invariant* $\Rightarrow H^{\perp}$ $\mathcal{A}$*-invariant.*

(ii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal* $\Rightarrow I^{\perp} \trianglelefteq \mathcal{A}$ *Links-Ideal.*

(iii) *Sei* $I \trianglelefteq \mathcal{A}$ *beidseitiges Ideal* $\Rightarrow I$ *selbstadj., d.h.* $I^* = I$.

Beweis von (ii).

- Sei $Y \in I^{\perp}$ und $X \in I$.
- Wir erhalten $SX \in I$ und somit $\langle Y, SX \rangle = 0$.
- Wegen $S^* = S$ erhalten wir somit:

$$\langle SY, X \rangle = \langle Y, SX \rangle = 0$$

- Also gilt $SY \in I^{\perp}$. Zeige analog $TY \in I^{\perp}$.

Zerlegung der Algebra $\mathcal{A}$

Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{A}$ insbesondere halb-einfach.

Zerlegung der Algebra $\mathcal{A}$

Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{A}$ insbesondere halb-einfach.

- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow \exists$ einfache $I_1, .., I_r \trianglelefteq \mathcal{A}$ mit

$$I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

Zerlegung der Algebra $\mathcal{A}$

Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{A}$ insbesondere halb-einfach.

- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow \exists$ einfache $I_1, .., I_r \trianglelefteq \mathcal{A}$ mit

$$I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

- (Lemma (ii)) $\Rightarrow$ Die I_j sind paarweise orthogonal.

Zerlegung der Algebra $\mathcal{A}$

Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{A}$ insbesondere halb-einfach.

- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow \exists$ einfache $I_1, .., I_r \trianglelefteq \mathcal{A}$ mit

$$I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

- (Lemma (ii)) $\Rightarrow$ Die I_j sind paarweise orthogonal.
- Sei $e_j \in \mathcal{A}$ die $\mathbb{1}$ in $I_j \rightsquigarrow e_j e_k \in I_j \cap I_k = \{0\}$.

Zerlegung der Algebra $\mathcal{A}$

Nach dem vorigen Lemma ist $\mathcal{A}$ insbesondere halb-einfach.

- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow \exists$ einfache $I_1, .., I_r \trianglelefteq \mathcal{A}$ mit

$$I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$$
$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

- (Lemma (ii)) $\Rightarrow$ Die I_j sind paarweise orthogonal.
- Sei $e_j \in \mathcal{A}$ die $\mathbb{1}$ in $I_j \rightsquigarrow e_j e_k \in I_j \cap I_k = \{0\}$.
- (Lemma (iii)) $\Rightarrow I_j^* = I_j \rightsquigarrow e_j^* = e_j$

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)
- Erhalte die orthogonale Zerlegung: $\mathbb{C}[\mathcal{C}] \cong N_1 \oplus ... \oplus N_r$

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)
- Erhalte die orthogonale Zerlegung: $\mathbb{C}[\mathcal{C}] \cong N_1 \oplus ... \oplus N_r$
- Die N_j sind $I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$-Moduln.

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)
- Erhalte die orthogonale Zerlegung: $\mathbb{C}[\mathcal{C}] \cong N_1 \oplus ... \oplus N_r$
- Die N_j sind $I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$-Moduln.
- (Lemma (i)) $\Rightarrow N_j$ lässt sich in eine orthogonale Summe einfacher Untermoduln zerlegen.

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)
- Erhalte die orthogonale Zerlegung: $\mathbb{C}[\mathcal{C}] \cong N_1 \oplus ... \oplus N_r$
- Die N_j sind $I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$-Moduln.
- (Lemma (i)) $\Rightarrow$ N_j lässt sich in eine orthogonale Summe einfacher Untermoduln zerlegen.
- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow$ $\exists M_j$ einfacher I_j-Modul mit

$$N_j \cong \underbrace{M_j \oplus ... \oplus M_j}_{m_j \text{ mal}}$$

Zerlegung von $\mathbb{C}[\mathcal{C}]$ als $\mathcal{A}$-Modul

- Setze $N_j := \ker(\mathbb{1} - e_j) \subseteq \mathbb{C}[\mathcal{C}]$ (also $v \in N_j \Leftrightarrow e_j v = v$)
- Erhalte die orthogonale Zerlegung: $\mathbb{C}[\mathcal{C}] \cong N_1 \oplus \ldots \oplus N_r$
- Die N_j sind $I_j \cong Mat_{k_j}(\mathbb{C})$-Moduln.
- (Lemma (i)) $\Rightarrow N_j$ lässt sich in eine orthogonale Summe einfacher Untermoduln zerlegen.
- (Artin-Wedderburn) $\Rightarrow \exists M_j$ einfacher I_j-Modul mit

$$N_j \cong \underbrace{M_j \oplus \ldots \oplus M_j}_{m_j \text{ mal}}$$

- Setze $d_j := \dim(M_j)$ und erhalte:

$$\mathrm{tr}(e_j) = \dim(N_j) = m_j d_j$$

Zusammenfassung

- Halbeinfache Algebra: $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathbb{1}, S, T, T_2, S_2, ..., S_n \rangle$

Zusammenfassung

- Halbeinfache Algebra: $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathbb{1}, S, T, T_2, S_2, ..., S_n \rangle$
- Zerlegung von $\mathcal{A}$ in einfache Ideale:

$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

Zusammenfassung

- Halbeinfache Algebra: $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathbb{1}, S, T, T_2, S_2, ..., S_n \rangle$
- Zerlegung von $\mathcal{A}$ in einfache Ideale:

$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

- Zerlegung von $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ in einfache I_j-Moduln:

$$\mathbb{C}[C] \cong M_1^{m_1} \oplus ... \oplus M_r^{m_r}$$

Zusammenfassung

- Halbeinfache Algebra: $\mathcal{A} = \langle \mathcal{B} \rangle = \langle \mathbb{1}, S, T, T_2, S_2, ..., S_n \rangle$
- Zerlegung von $\mathcal{A}$ in einfache Ideale:

$$\mathcal{A} \cong I_1 \times ... \times I_r$$

- Zerlegung von $\mathcal{C}[\mathbb{C}]$ in einfache I_j-Moduln:

$$\mathbb{C}[C] \cong M_1^{m_1} \oplus ... \oplus M_r^{m_r}$$

- Neues Ziel: Bestimmung der Vielfachheiten m_j.

Die Charakterformel

Da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, erhalten wir die Darstellung

$$e_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} Z$$

Die Charakterformel

Da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, erhalten wir die Darstellung

$$e_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} Z$$

und somit:

$$\langle e_j, e_j \rangle = \sum_{X \in \mathcal{B}} \sum_{Y \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, X \rangle}{\langle X, X \rangle}} \frac{\langle e_j, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} \langle X, Y \rangle$$

Die Charakterformel

Da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, erhalten wir die Darstellung

$$e_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} Z$$

und somit:

$$\begin{aligned} \langle e_j, e_j \rangle &= \sum_{X \in \mathcal{B}} \sum_{Y \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, X \rangle}{\langle X, X \rangle}} \frac{\langle e_j, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} \langle X, Y \rangle \\ &= \sum_{Z \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} \langle Z, Z \rangle \end{aligned}$$

Die Charakterformel

Da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, erhalten wir die Darstellung

$$e_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} Z$$

und somit:

$$\begin{aligned}
\langle e_j, e_j \rangle &= \sum_{X \in \mathcal{B}} \sum_{Y \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, X \rangle}{\langle X, X \rangle}} \frac{\langle e_j, Y \rangle}{\langle Y, Y \rangle} \langle X, Y \rangle \\
&= \sum_{Z \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle}} \frac{\langle e_j, Z \rangle}{\langle Z, Z \rangle} \langle Z, Z \rangle = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{|\langle e_j, Z \rangle|^2}{\langle Z, Z \rangle}
\end{aligned}$$

Die Charakterformel

Da $\mathcal{B}$ eine Orthogonalbasis ist, erhalten wir die Darstellung

$$e_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{\langle e_j, Z\rangle}{\langle Z, Z\rangle} Z$$

und somit:

$$\begin{aligned}\langle e_j, e_j\rangle &= \sum_{X \in \mathcal{B}} \sum_{Y \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, X\rangle}{\langle X, X\rangle}} \frac{\langle e_j, Y\rangle}{\langle Y, Y\rangle} \langle X, Y\rangle \\ &= \sum_{Z \in \mathcal{B}} \overline{\frac{\langle e_j, Z\rangle}{\langle Z, Z\rangle}} \frac{\langle e_j, Z\rangle}{\langle Z, Z\rangle} \langle Z, Z\rangle = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{|\langle e_j, Z\rangle|^2}{\langle Z, Z\rangle}\end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\langle e_j, e_j\rangle = \mathrm{tr}(e_j^* e_j) = \mathrm{tr}(e_j e_j) = \mathrm{tr}(e_j) = m_j d_j$$

Die Charakterformel

Zusammen erhalten wir damit die Charakterformel:

$$m_j d_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{|\langle e_j, Z \rangle|^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Die Charakterformel

Zusammen erhalten wir damit die Charakterformel:

$$m_j d_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{|\langle e_j, Z \rangle|^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Dabei gilt:

$$\langle e_j, Z \rangle = \operatorname{tr}(e_j Z) = \operatorname{tr}(Z|_{N_j}) = m_j \operatorname{tr}(Z|_{M_j})$$

Die Charakterformel

Zusammen erhalten wir damit die Charakterformel:

$$m_j d_j = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{|\langle e_j, Z \rangle|^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Dabei gilt:

$$\langle e_j, Z \rangle = \mathrm{tr}(e_j Z) = \mathrm{tr}(Z|_{N_j}) = m_j \mathrm{tr}(Z|_{M_j})$$

und

$$\langle Z, Z \rangle = \begin{cases} s_k N, & Z = S_k \\ t_k N, & Z = T_k \end{cases}$$

Konstruktion von $\mathcal{A}$-Moduln

Da $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}(s,t,n) = {}^{\mathbb{C}\langle\sigma,\tau\rangle}/_{R}$ ist jeder $\mathcal{A}$-Modul $M \cong \mathbb{C}^d$ durch zwei Matrizen $P, Q \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$ mit

$$R = \left\{ \begin{array}{c} P^2 = s\mathbb{1} + (s-1)P, \\ Q^2 = t\mathbb{1} + (t-1)Q, \\ \underbrace{PQP...}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{QPQ...}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

eindeutig festgelegt.

Konstruktion von $\mathcal{A}$-Moduln

Da $\mathcal{A} \cong \mathcal{H}(s,t,n) = {}^{\mathbb{C}\langle\sigma,\tau\rangle}/_{R}$ ist jeder $\mathcal{A}$-Modul $M \cong \mathbb{C}^d$ durch zwei Matrizen $P, Q \in \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$ mit

$$R = \left\{ \begin{array}{c} P^2 = s\mathbb{1} + (s-1)P, \\ Q^2 = t\mathbb{1} + (t-1)Q, \\ \underbrace{PQP...}_{n \text{ Fak.}} = \underbrace{QPQ...}_{n \text{ Fak.}} \end{array} \right\}$$

eindeutig festgelegt. Diesen bezeichnen wir mit

$$M(P,Q)$$

Insbesondere haben P und Q haben ihre Eigenwerte in $\{-1, s\}$ bzw $\{-1, t\}$.

1-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Für n ungerade sind

$$M(-1,-1),\ M(s,s)$$

nicht isomorphe einfache 1-dim. $\mathcal{A}$-Moduln.

1-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Für n ungerade sind

$$M(-1,-1),\ M(s,s)$$

nicht isomorphe einfache 1-dim. $\mathcal{A}$-Moduln.

Für n gerade sind

$$M(-1,-1),\ M(-1,t),\ M(s,-1),\ M(s,t)$$

nicht isomorphe einfache 1-dim. $\mathcal{A}$-Moduln.

Vielfachheit von $M(s,t)$

Sei m die Vielfachheit von $M(s,t)$.

Vielfachheit von $M(s,t)$

Sei m die Vielfachheit von $M(s,t)$. Benutze Charakterformel:

$$m \cdot d = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{m^2 \mathrm{tr}(Z|_M)^2}{\langle Z,Z \rangle}$$

Vielfachheit von $M(s,t)$

Sei m die Vielfachheit von $M(s,t)$. Benutze Charakterformel:

$$m \cdot d = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{m^2 \operatorname{tr}(Z|_M)^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Die Summanden haben in diesem Fall die Form

$$\frac{m^2 (s^a t^b)^2}{N(s^a t^b)} = \frac{m^2}{N} s^a t^b$$

Vielfachheit von $M(s,t)$

Sei m die Vielfachheit von $M(s,t)$. Benutze Charakterformel:

$$m \cdot d = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{m^2 \mathrm{tr}(Z|_M)^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Die Summanden haben in diesem Fall die Form

$$\frac{m^2 (s^a t^b)^2}{N(s^a t^b)} = \frac{m^2}{N} s^a t^b$$

Wir erhalten also insgesamt:

$$m \cdot 1 = \frac{m^2}{N} \underbrace{(1 + s + t + s_2 + t_2 + \ldots + s_{n-1} + t_{n-1} + s_n)}_{=N} = m^2$$

Vielfachheit von $M(s,t)$

Sei m die Vielfachheit von $M(s,t)$. Benutze Charakterformel:

$$m \cdot d = \sum_{Z \in \mathcal{B}} \frac{m^2 \mathrm{tr}(Z|_M)^2}{\langle Z, Z \rangle}$$

Die Summanden haben in diesem Fall die Form

$$\frac{m^2 (s^a t^b)^2}{N(s^a t^b)} = \frac{m^2}{N} s^a t^b$$

Wir erhalten also insgesamt:

$$m \cdot 1 = \frac{m^2}{N} \underbrace{(1 + s + t + s_2 + t_2 + ... + s_{n-1} + t_{n-1} + s_n)}_{=N} = m^2$$

und somit $m = 1$.

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen folgenden Ansatz:

$$P = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen folgenden Ansatz:

$$P = \left(\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad Q = \left(\begin{smallmatrix} x & z \\ z & y \end{smallmatrix}\right)$$

Q soll die Eigenwerte $-1, t$ haben. Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} x + y &= \mathrm{tr}(Q) = t - 1 \\ xy - z^2 &= \det(Q) = -t \end{aligned}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen folgenden Ansatz:

$$P = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

Q soll die Eigenwerte $-1, t$ haben. Es soll also gelten:

$$x + y = \mathrm{tr}(Q) = t - 1$$
$$xy - z^2 = \det(Q) = -t$$

Für die Matrix PQ erhalten wir das charakteristische Polynom:

$$\chi(X) = X^2 - \mathrm{tr}(PQ)X + \det(PQ)$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen folgenden Ansatz:

$$P = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}$$

Q soll die Eigenwerte $-1, t$ haben. Es soll also gelten:

$$x + y = \mathrm{tr}(Q) = t - 1$$
$$xy - z^2 = \det(Q) = -t$$

Für die Matrix PQ erhalten wir das charakteristische Polynom:

$$\chi(X) = X^2 - \mathrm{tr}(PQ)X + \det(PQ)$$

und wegen $\det(PQ) = \det(P)\det(Q) = st$ somit die Eigenwerte:

$$\alpha_{\pm} = \frac{\mathrm{tr}(PQ)}{2} \pm \mathbf{i}\sqrt{st - \left(\frac{\mathrm{tr}(PQ)}{2}\right)^2}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen für $0 < \theta < \pi$ den Ansatz

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{st}\exp(\pm\mathbf{i}\theta)$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen für $0 < \theta < \pi$ den Ansatz

$$\alpha_\pm = \sqrt{st}\exp(\pm\mathbf{i}\theta)$$

Wir erhalten

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(PQ)}{2\sqrt{st}}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen für $0 < \theta < \pi$ den Ansatz

$$\alpha_\pm = \sqrt{st}\exp(\pm\mathbf{i}\theta)$$

Wir erhalten

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(PQ)}{2\sqrt{st}}$$

und setzen

$$\lambda_\theta := 2\sqrt{st}\cos(\theta) = \mathrm{tr}(PQ) = sx - y$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen für $0 < \theta < \pi$ den Ansatz

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{st}\exp(\pm \mathbf{i}\theta)$$

Wir erhalten

$$\cos(\theta) = \frac{\operatorname{tr}(PQ)}{2\sqrt{st}}$$

und setzen

$$\lambda_\theta := 2\sqrt{st}\cos(\theta) = \operatorname{tr}(PQ) = sx - y$$

Wegen $x + y = t - 1$ und $xy - z^2 = -t$ erhalten wir somit

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir wählen für $0 < \theta < \pi$ den Ansatz

$$\alpha_\pm = \sqrt{st}\exp(\pm\mathbf{i}\theta)$$

Wir erhalten

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(PQ)}{2\sqrt{st}}$$

und setzen

$$\lambda_\theta := 2\sqrt{st}\cos(\theta) = \mathrm{tr}(PQ) = sx - y$$

Wegen $x + y = t - 1$ und $xy - z^2 = -t$ erhalten wir somit

$$x_\theta := \frac{t-1+\lambda_\theta}{s+1}, \; y_\theta := \frac{s(t-1)-\lambda_\theta}{s+1} \text{ und } z_\theta := \sqrt{xy + t}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir setzen nun $Q(\theta) := \begin{pmatrix} x_\theta & z_\theta \\ z_\theta & y_\theta \end{pmatrix}$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir setzen nun $Q(\theta) := \begin{pmatrix} x_\theta & z_\theta \\ z_\theta & y_\theta \end{pmatrix}$

Lemma

Für $0 < j < \frac{n}{2}$ betrachte $\theta_j := \frac{2\pi j}{n}$. Es gilt:

$$\underbrace{PQ(\theta_j)P...}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{Q(\theta_j)PQ(\theta_j)...}_{n \text{ Faktoren}}$$

2-dim. $\mathcal{A}$-Moduln

Wir setzen nun $Q(\theta) := \begin{pmatrix} x_\theta & z_\theta \\ z_\theta & y_\theta \end{pmatrix}$

Lemma

Für $0 < j < \frac{n}{2}$ betrachte $\theta_j := \frac{2\pi j}{n}$. Es gilt:

$$\underbrace{PQ(\theta_j)P...}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{Q(\theta_j)PQ(\theta_j)...}_{n \text{ Faktoren}}$$

Beweis. Rechnen rechnen rechnen ...

Für den $\mathcal{A}$-Modul $M(P,Q)$ setze $d = \dim M(P,Q)$ und

$$I(P,Q) := \langle P, Q \rangle_{Alg.} \subseteq \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$$

Für den $\mathcal{A}$-Modul $M(P,Q)$ setze $d = \dim M(P,Q)$ und

$$I(P,Q) := \langle P,Q\rangle_{Alg.} \subseteq \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$$

Proposition

Wenn $n = 2l+1$ ungerade ist, gilt

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(s,s) \times I(P,Q(\theta_1)) \times ... \times I(P,Q(\theta_l))$$

Für den $\mathcal{A}$-Modul $M(P,Q)$ setze $d = \dim M(P,Q)$ und

$$I(P,Q) := \langle P, Q \rangle_{Alg.} \subseteq \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$$

Proposition

Wenn $n = 2l + 1$ ungerade ist, gilt

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(s,s) \times I(P,Q(\theta_1)) \times ... \times I(P,Q(\theta_l))$$

und wenn $n = 2l$ gerade ist, gilt

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(-1,t) \times I(s,-1) \times I(s,t) \\ \times I(P,Q(\theta_1)) \times ... \times I(P,Q(\theta_{l-1}))$$

Für den $\mathcal{A}$-Modul $M(P,Q)$ setze $d = \dim M(P,Q)$ und

$$I(P,Q) := \langle P, Q \rangle_{Alg.} \subseteq \mathrm{Mat}_d(\mathbb{C})$$

Proposition

Wenn $n = 2l + 1$ ungerade ist, gilt

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(s,s) \times I(P, Q(\theta_1)) \times ... \times I(P, Q(\theta_l))$$

und wenn $n = 2l$ gerade ist, gilt

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(-1,t) \times I(s,-1) \times I(s,t) \\ \times I(P, Q(\theta_1)) \times ... \times I(P, Q(\theta_{l-1}))$$

Beweis. Dimensionsvergleich.

Beispiel: Zerlegung für die Fano-Ebene

Example

Betrachte die ganze Situation für die Fano-Ebene.

Beispiel: Zerlegung für die Fano-Ebene

Example

Betrachte die ganze Situation für die Fano-Ebene.
Es gilt hier $S, T \in \mathrm{Mat}_{21}(\mathbb{C})$ und

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{1}, S, T, ST, TS, STS \rangle$$

Beispiel: Zerlegung für die Fano-Ebene

Example

Betrachte die ganze Situation für die Fano-Ebene.
Es gilt hier $S, T \in \mathrm{Mat}_{21}(\mathbb{C})$ und

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{1}, S, T, ST, TS, STS \rangle$$

Diese $\mathbb{C}$-Algebra hat nun folgende Zerlegung:

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(2,2) \times I(P, Q(\tfrac{2\pi}{3}))$$

Beispiel: Zerlegung für die Fano-Ebene

Example

Betrachte die ganze Situation für die Fano-Ebene.
Es gilt hier $S, T \in \mathrm{Mat}_{21}(\mathbb{C})$ und

$$\mathcal{A} = \langle \mathbb{1}, S, T, ST, TS, STS \rangle$$

Diese $\mathbb{C}$-Algebra hat nun folgende Zerlegung:

$$\mathcal{A} \cong I(-1,-1) \times I(2,2) \times I(P, Q(\tfrac{2\pi}{3}))$$

Dabei gilt $P = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $Q(\frac{2\pi}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{\sqrt{14}}{3} \\ \frac{\sqrt{14}}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$.

Vielfachheiten der Moduln

Lemma

Sei $1 \leq j < \frac{n}{2}$, $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$ und m die Vielfachheit von $M(P, Q(\theta_j))$

Vielfachheiten der Moduln

Lemma

Sei $1 \leq j < \frac{n}{2}$, $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$ und m die Vielfachheit von $M(P, Q(\theta_j))$

(i) Für $n \geq 3$ ungerade gilt:

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(\theta_j)}\frac{(s-1)^2}{s}\right)$$

Vielfachheiten der Moduln

Lemma

Sei $1 \leq j < \frac{n}{2}$, $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$ und m die Vielfachheit von $M(P, Q(\theta_j))$

(i) Für $n \geq 3$ ungerade gilt:

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(\theta_j)} \frac{(s-1)^2}{s}\right)$$

(ii) Für $n \geq 4$ gerade gilt:

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} + 2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

Vielfachheiten der Moduln

Beweisidee.

Benutze die Charakterformel und erhalte für $n \geq 3$ ungerade die Gleichung:

Vielfachheiten der Moduln

Beweisidee.

Benutze die Charakterformel und erhalte für $n \geq 3$ ungerade die Gleichung:

$$2m = \frac{m^2}{N}\left(\frac{\operatorname{tr}(\mathbb{1})^2}{1} + \frac{\operatorname{tr}(P)^2}{s} + \frac{\operatorname{tr}(Q)^2}{s} + \ldots + \frac{\operatorname{tr}((PQ)^l P)^2}{s^{2l+1}}\right)$$

Vielfachheiten der Moduln

Beweisidee.

Benutze die Charakterformel und erhalte für $n \geq 3$ ungerade die Gleichung:

$$2m = \frac{m^2}{N}\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbb{1})^2}{1} + \frac{\mathrm{tr}(P)^2}{s} + \frac{\mathrm{tr}(Q)^2}{s} + \ldots + \frac{\mathrm{tr}((PQ)^l P)^2}{s^{2l+1}}\right)$$

sowie für $n \geq 4$ gerade:

$$2m = \frac{m^2}{N}\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbb{1})^2}{1} + \frac{\mathrm{tr}(P)^2}{s} + \frac{\mathrm{tr}(Q)^2}{t} + \ldots + \frac{\mathrm{tr}((PQ)^l)^2}{(st)^l}\right)$$

Vielfachheiten der Moduln

Beweisidee.

Benutze die Charakterformel und erhalte für $n \geq 3$ ungerade die Gleichung:

$$2m = \frac{m^2}{N}\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbb{1})^2}{1} + \frac{\mathrm{tr}(P)^2}{s} + \frac{\mathrm{tr}(Q)^2}{s} + \ldots + \frac{\mathrm{tr}((PQ)^l P)^2}{s^{2l+1}}\right)$$

sowie für $n \geq 4$ gerade:

$$2m = \frac{m^2}{N}\left(\frac{\mathrm{tr}(\mathbb{1})^2}{1} + \frac{\mathrm{tr}(P)^2}{s} + \frac{\mathrm{tr}(Q)^2}{t} + \ldots + \frac{\mathrm{tr}((PQ)^l)^2}{(st)^l}\right)$$

Und jetzt ganz viele Additionstheoreme... $\square$

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler'sche φ-Funktion)

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler'sche φ-Funktion)
- Wegen $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ erhalten wir:

$$z^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = 2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - 1$$

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler'sche φ-Funktion)
- Wegen $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ erhalten wir:

$$z^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = 2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - 1$$

- Für $p(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ gilt also $p(z) = 0$ und somit $\varphi(m) \leq 2$.

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler'sche φ-Funktion)
- Wegen $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ erhalten wir:

$$z^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = 2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - 1$$

- Für $p(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ gilt also $p(z) = 0$ und somit $\varphi(m) \leq 2$.
- Falls $m \geq 3$ ungerade gilt: $\varphi(m) > \sqrt{m}$, also $m = 3$.

Cosinus-Lemma

Lemma

Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\cos(\frac{2\pi}{m}) \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $m \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Beweis.

- Betrachte $\theta = \frac{2\pi}{m}$ und $z = \exp(i\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler'sche φ-Funktion)
- Wegen $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ erhalten wir:

$$z^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^2 = 2\cos^2(\theta) + 2i\cos(\theta)\sin(\theta) - 1$$

- Für $p(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ gilt also $p(z) = 0$ und somit $\varphi(m) \leq 2$.
- Falls $m \geq 3$ ungerade gilt: $\varphi(m) > \sqrt{m}$, also $m = 3$.
- Falls $m \geq 2$ gerade gilt: $\varphi(m) > \frac{1}{2}\sqrt{m}$, also $m = 2, 4, 6$.

Feit-Higman

Theorem (Feit-Higman)

Sei $\Gamma(s,t)$ ein endliches dickes verallg. n-Eck. Dann gilt

$$n \in \{2,3,4,6,8\}$$

Beweis von Feit-Higman

Sei zunächst $n \geq 3$ ungerade, also $s = t \geq 2$.

Beweis von Feit-Higman

Sei zunächst $n \geq 3$ ungerade, also $s = t \geq 2$.

- Betrachte $\theta_1 = \frac{2\pi}{n}$.

Beweis von Feit-Higman

Sei zunächst $n \geq 3$ ungerade, also $s = t \geq 2$.

- Betrachte $\theta_1 = \frac{2\pi}{n}$.
- Die Vielfachheit m des Modul $M(P, Q(\theta_1))$ erfüllt

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(\theta_1)}\frac{(s-1)^2}{s}\right)$$

Beweis von Feit-Higman

Sei zunächst $n \geq 3$ ungerade, also $s = t \geq 2$.

- Betrachte $\theta_1 = \frac{2\pi}{n}$.
- Die Vielfachheit m des Modul $M(P, Q(\theta_1))$ erfüllt

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(\theta_1)} \frac{(s-1)^2}{s}\right)$$

- Wir erhalten $\cos(\theta_1) \in \mathbb{Q}$.

Beweis von Feit-Higman

Sei zunächst $n \geq 3$ ungerade, also $s = t \geq 2$.

- Betrachte $\theta_1 = \frac{2\pi}{n}$.
- Die Vielfachheit m des Modul $M(P, Q(\theta_1))$ erfüllt

$$2N = mn\left(2 + \frac{1}{1-\cos(\theta_1)} \frac{(s-1)^2}{s}\right)$$

- Wir erhalten $\cos(\theta_1) \in \mathbb{Q}$.
- Das Cosinus-Lemma erzwingt $n = 3$.

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2 + \frac{1}{1 - \cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} + 2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2 + \frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} + 2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

- Es gilt nun:

$$\cos(\theta_{l-1}) = \cos(\pi - \tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(-\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\theta_1)$$

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2+\frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s}+\frac{(t-1)^2}{t}+2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

- Es gilt nun:

$$\cos(\theta_{l-1}) = \cos(\pi - \tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(-\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\theta_1)$$

- Erhalte ähnlich auch $\cos(2\theta_{l-1}) = \cos(2\theta_1)$.

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2 + \frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} + 2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

- Es gilt nun:

$$\cos(\theta_{l-1}) = \cos(\pi - \tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(-\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\theta_1)$$

- Erhalte ähnlich auch $\cos(2\theta_{l-1}) = \cos(2\theta_1)$.
- Addition der Formeln für $j = 1, l-1$ ergibt $\cos(2\theta_1) \in \mathbb{Q}$.

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2+\frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s}+\frac{(t-1)^2}{t}+2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

- Es gilt nun:

$$\cos(\theta_{l-1}) = \cos(\pi - \tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(-\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\theta_1)$$

- Erhalte ähnlich auch $\cos(2\theta_{l-1}) = \cos(2\theta_1)$.
- Addition der Formeln für $j = 1, l-1$ ergibt $\cos(2\theta_1) \in \mathbb{Q}$.
- Das Cosinus-Lemma erzwingt $\frac{n}{2} \in \{2, 3, 4, 6\}$.

Beweis von Feit-Higman

Sei nun $n = 2l \geq 4$ gerade.

- Betrachte $\theta_j = \frac{2\pi j}{n}$.
- Die Vielfachheit m_j des Modul $M(P, Q(\theta_j))$ erfüllt

$$2N = m_j n\left(2 + \frac{1}{1-\cos(2\theta_j)}\left(\frac{(s-1)^2}{s} + \frac{(t-1)^2}{t} + 2\cos(\theta_j)\frac{(s-1)(t-1)}{\sqrt{st}}\right)\right)$$

- Es gilt nun:

$$\cos(\theta_{l-1}) = \cos(\pi - \tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(-\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\tfrac{2\pi}{n}) = -\cos(\theta_1)$$

- Erhalte ähnlich auch $\cos(2\theta_{l-1}) = \cos(2\theta_1)$.
- Addition der Formeln für $j = 1, l-1$ ergibt $\cos(2\theta_1) \in \mathbb{Q}$.
- Das Cosinus-Lemma erzwingt $\frac{n}{2} \in \{2, 3, 4, 6\}$.
- Subtraktion der Formeln liefert $n \neq 12$.

Beweis von Feit-Higman

Insgesamt erhalten wir:

$$n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

Beweis von Feit-Higman

Insgesamt erhalten wir:

$$n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

Q.E.D.