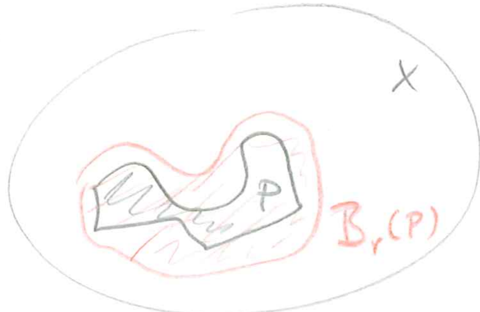
§ 4. Räume metrischer Räume

Im letzten Kapitel ging es darum, verschiedene metrische Räume zu vergleichen und Konvergenz von Folgen metrischer Räume zu betrachten.

1. <u>Def</u> Ist (X,d) ein metrischer Raum, $P \subseteq X$ und $r>0$, so sei $B_r(P) = \bigcup_{p\in P} B_r(p)$



Offensichtlich gilt

$B_r(B_s(P)) \subseteq B_{r+s}(P)$

Für $P, Q \subseteq X$ ist der <u>Hausdorff-Abstand</u>

$$Hd(P,Q) = \inf\{r>0 \mid P \subseteq B_r(Q) \text{ und } Q \subseteq B_r(P)\} \in \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

Offensichtlich gilt $Hd(P,Q) = Hd(Q,P) \geq 0$
$Hd(P,P) = 0$

Ist $Hd(P,Q) < r$ und $Hd(Q,R) < s$, so ist

$R \subseteq B_s(Q)$ und $Q \subseteq B_r(P)$ $\leadsto$ $R \subseteq B_s(B_r(P)) \subseteq B_{s+r}(P)$

genauso $P \subseteq B_{s+r}(R)$

$\Rightarrow Hd(P,R) \leq Hd(P,Q) + Hd(Q,R)$

d.h. Hd ist eine <u>Pseudo-Metrik</u> auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$. Beachte: $Hd(\emptyset, P) = \infty$ für alle $P \neq \emptyset$.

2. <u>Lemma</u> Es gilt $Hd(P,Q) = 0 \iff \overline{P} = \overline{Q}$.

<u>Beweis</u> Es gilt $\bigcap \{B_r(P) \mid r > 0\} = \{x \in X \mid B_r(x) \cap P \neq \emptyset \; \forall r > 0\} = \overline{P}$. Ist also $Hd(P,Q) = 0$, so folgt $Q \subseteq \overline{P} \rightsquigarrow \overline{Q} \subseteq \overline{P}$.

Umgekehrt ist offensichtlich $Hd(P,\overline{P}) = 0$ $\square$

<u>Korollar</u> Hd ist eine Metrik (mit Werten in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$) auf der Menge aller abg. Teilmengen von X. $\square$

Für $X \neq \emptyset$ sei $\mathfrak{M}(X) = \{P \subseteq X \mid P \text{ abg}, P \neq \emptyset\}$.

Dann ist $(\mathfrak{M}(X), Hd)$ ein metrischer Raum.

Die Abbildung $X \longrightarrow \mathfrak{M}(X)$, $x \longmapsto \{x\}$ ist eine isometrische Einbettung. Das Bild von X in $\mathfrak{M}(X)$ ist abgeschlossen: ist $(x_n)_{n \geq 0}$ eine Folge in X mit $Hd\text{-}\lim_n \{x_n\} = P \subseteq X$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n mit $P \subseteq B_\varepsilon(x_n)$

$\rightsquigarrow$ P besteht aus einem Punkt.

Beobachtungen. Ist X beschränkt, so ist $\mathfrak{M}(X)$ beschränkt.

- Ist $\bar{d} = \min\{1, d\}$ die abgeschnittene Metrik auf X, so ist $(X, \bar{d})$ beschränkt und es gilt $Hd\text{-}\lim_n P_n = Q \Leftrightarrow H\bar{d}\text{-}\lim P_n = Q$ (gleiches Konvergenzverhalten / Vollständigkeit / Topologie auf $\mathfrak{M}(X)$).

3. Satz Ist X nicht leerer metr. Raum, so gilt

$$X \text{ ist vollständig} \Leftrightarrow \mathfrak{M}(X) \text{ ist vollständig}$$

Beweis Vorüberlegung: nichts ändert sich an der Beh., wenn wir d durch $\bar{d} = \min\{1, d\}$ ersetzen. Also dürfen wir annehmen, dass X beschränkt ist. Sei $(F_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge in $\mathfrak{M}(X)$. Wir dürfen annehmen, dass gilt

$$Hd(F_n, F_{n+1}) \leq 2^{-n}$$

(eine Cauchyfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine konvergente Teilfolge hat → ÜA)

Zu jedem $x_j \in F_j$ existiert $x_{j+1} \in F_{j+1}$ mit $d(x_j, x_{j+1}) \leq 2 \cdot 2^{-j}$, da $Hd(F_j, F_{j+1}) \leq 2^{-j}$

Solche Folgen $(x_j)_{j\geq 0}$ sind offensichtlich Cauchyfolgen in X. Sei $F \subseteq X$ die Menge aller Grenzwerte solcher Folgen. <u>Beh</u>: $\text{Hd-}\lim\limits_n F_n = \overline{F}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \geq 0$ so, dass $\sum\limits_{j=N}^{\infty} 2 \cdot 2^{-j} < \varepsilon/2$ gilt. Ist nun $(x_j)_{j\geq 0}$ eine Folge wie oben mit $\lim\limits_j x_j = x \in F$, so gilt für alle $n \geq N$, dass

$$d(x_n, x) \leq \varepsilon/2 \implies x \in B_\varepsilon(F_n)$$

Da jeder Punkt $x_n \in F_n$ in solch einer Folge vorkommt, gilt auch $B_\varepsilon(F) \supseteq F_n$.

Es folgt $\text{Hd-}\lim\limits_n F_n = \overline{F}$.

Ist umgekehrt $\mathfrak{M}(X)$ vollständig, so ist der abgeschlossene Teilraum $X \hookrightarrow \mathfrak{M}(X)$ auch vollständig. $\square$

4. <u>Satz</u> Ist X nicht leerer metrischer Raum, so gilt:

$$X \text{ ist kompakt} \iff \mathfrak{M}(X) \text{ ist kompakt.}$$

<u>Bew</u>: Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er <u>vollständig</u> und <u>total beschränkt</u> ist (d.h. wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung durch ε-Bälle gibt, vgl

Dugundji XIV 3.5 oder Ana III §2, 13

Sei $\varepsilon > 0$, sei $S \subseteq X$ endlich mit $B_\varepsilon(S) = \bigcup\{B_\varepsilon(s) \mid s \in S\} = X$. Für $A \in \mathfrak{M}(X)$ sei $T_A = S \cap B_\varepsilon(A)$. Es folgt $T \subseteq B_\varepsilon(A)$ und $A \subseteq B_\varepsilon(T)$, d.h. für die endliche Menge $\mathfrak{M}(S) = \{T \subseteq S \mid T \neq \emptyset\} \subseteq \mathfrak{M}(X)$ gilt

$$\mathfrak{M}(X) = B_\varepsilon(\mathfrak{M}(S)).$$ Folglich ist $\mathfrak{M}(X)$ kompakt, wenn X kompakt ist.

Ist $\mathfrak{M}(X)$ kompakt, so ist der abgeschlossene Teilraum $X \hookrightarrow \mathfrak{M}(X)$ auch kompakt. $\square$

Der Hausdorff-Abstand vergleicht Teilmengen eines fest gewählten Raumes. Der <u>Gromov-Hausdorff Abstand</u> verallgemeinert diese Idee.

5. <u>Def</u> Es seien X, Y beschränkte metrische Räume. Der Gromov-Hausdorff-Abstand

$$GHd(X, Y)$$

ist das <u>Infimum</u> aller $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit:

es gibt einen metrischen Raum (Z, d_Z) sowie isometrische Einbettungen $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Z \overset{\beta}{\hookleftarrow} Y$ und $r = Hd_Z(\alpha(X), \beta(Y))$

Beachte: solche Z gibt es immer, z.B. $Z = X \times Y$ mit $d_Z = \sqrt{d_X^2 + d_Y^2}$. Der Gromov-Hausdorff-Abstand ist also (wegen der Beschränktheit von X und Y) stets endlich.

<u>Offensichtliche Eigenschaften:</u>

- X und Y isometrisch $\Rightarrow GHd(X,Y) = 0$
- $X \subseteq Y$ dicht $\Rightarrow GHd(X,Y) = 0$
- $GHd(X,Y) = GHd(Y,X) \geq 0$

Etwas anderer Blickwinkel: Sei $\mathcal{D}(X,Y)$ die Menge aller <u>Pseudometriken</u>

$$\delta : (X \cup Y) \times (X \cup Y) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die auf $X \times X$ mit d_X und auf $Y \times Y$ mit d_Y übereinstimmen. Für jedes solche δ sei

$$r(\delta) = \inf \left\{ s > 0 \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \, \exists y \;\; \delta(x,y) < s \\ \forall y \, \exists x \;\; \delta(x,y) < s \end{array} \right\}$$

sowie $$GHd(X,Y) = \inf \{ r(\delta) \mid \delta \in \mathcal{D}(X,Y) \}$$ #

Warum stimmen beide Definitionen überein?

Sind $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Z \overset{\beta}{\hookleftarrow} Y$ isometrische Einbettungen, so ist $\delta(x,y) = d_Z(\alpha(x), \beta(y))$ eine Pseudometrik auf $X \sqcup Y$ in $\mathcal{D}(X,Y)$. Es ist nur eine Pseudometrik, da $\alpha(X) \cap \beta(Y)$ möglicherweise nicht leer ist!
Ist umgekehrt $\delta \in \mathcal{D}(X,Y)$, so setze $Z = X \sqcup Y/\sim$ mit $u \sim v \Leftrightarrow \delta(u,v) = 0$. Dann ist δ eine echte Metrik auf Z und $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Z \overset{\beta}{\hookleftarrow} Y$ sind isometrische Einbettungen. $\square$

6. <u>Def</u> Seien X, Y metrische Räume, sei $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ heißt <u>ε-Relation</u>, wenn gilt: (a) $pr_X(R) = X$ und $pr_Y(R) = Y$

(b) Für alle $(x,y), (x',y') \in R$ gilt

$$|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| \leq \varepsilon$$

<u>Lemma</u> Seien X, Y metrische Räume, sei $\varepsilon > 0$. Dann sind äquivalent:
(i) $GHd(X,Y) \leq \varepsilon$
(ii) Es gibt für alle $\varepsilon' > 2 \cdot \varepsilon$ eine ε'-Relation $R \subseteq X \times Y$

<u>Beweis</u>: Angenommen, es gibt isometrische Einbettungen $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} Z \overset{\beta}{\hookleftarrow} Y$ mit $Hd(\alpha(X), \beta(Y)) < r$.
Setze $R = \{(x,y) \in X \times Y \mid d_Z(\alpha(x), \beta(y)) < r\}$

Dann gilt $pr_X(R) = X$, $pr_Y(R) = Y$. Ist $(x,y), (x',y') \in R$, so gilt $d_X(x,x') = d_Z(\alpha(x), \alpha(x')) \leq d_Z(\alpha(x), \beta(y)) + d_Z(\beta(y), \beta(y'))$
$$+ d_Z(\beta(y'), \alpha(x'))$$

$< 2 \cdot r + d_Y(y,y')$ (und andersrum

$\rightsquigarrow |d_X(x,x') - d_Y(y,y')| < 2 \cdot r$. $\Rightarrow$ R ist $2\cdot r$-Relation.

Angenommen, es gibt eine r-Relation $R \subseteq X \times Y$ für $r > 0$. Wir definieren δ auf $X \sqcup Y$ durch $\delta|_{X\times X} = d_X$ $\delta|_{Y\times Y} = d_Y$ und für $x \in X$, $y \in Y$

$$\delta(x,y) = \delta(y,x) = \inf\{ d_X(x,x') + r/2 + d_Y(y',y) \mid (x',y') \in R \}$$

Dann gilt die Dreiecksungleichung: sei $x, z \in X$, $y \in Y$.

Für $(z',y') \in R$ gilt dann

$$d_X(x,z') + r/2 + d_Y(y',y) \leq d_X(x,z) + d_X(z,z') + r/2 + d_Y(y',y)$$

$\Rightarrow$ $\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$

Für $(x',y'), (z',y'') \in R$ gilt

$$d_X(x,x') + r/2 + d_Y(y',y) + d_X(z,z') + r/2 + d_Y(y'',y)$$

$$\geq d_X(x,x') + r + d_Y(y',y'') + d_X(z,z')$$

$$\geq d_X(x,x') + d_X(z',z) + d_X(x',z') \geq d_X(x,z)$$

$\Rightarrow$ $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$

$\Rightarrow$ $\delta \in \mathcal{D}(X,Y)$.

Zu jedem $x \in X$ gibt es $y \in Y$ mit $(x,y) \in R$

und $\delta(x,y) \le d_X(x,x) + r/2 + d_Y(y,y) = r/2$

und umgekehrt. Es folgt $Hd(\alpha(X), \beta(Y)) \le r/2$. $\square$

<u>Erinnerung</u> Ist $R \subseteq X \times Y$, $R' \subseteq Y \times Z$, so ist

$$R' \circ R = \{ (x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y \ (x,y) \in R ,\ (y,z) \in R' \}$$

<u>Lemma</u> Ist $R \subseteq X \times Y$ eine r-Relation und $R' \subseteq Y \times Z$ eine s-Relation, so ist $R' \circ R \subseteq X \times Z$ eine $(r+s)$-Relation.

<u>Beweis</u>: Klar: $pr_X(R' \circ R) = X$ und $pr_Y(R' \circ R) = Y$.

Ist $(x,z), (x',z') \in R' \circ R$ wähle $y, y' \in Y$ mit

$x \underset{R}{\sim} y \underset{R'}{\sim} z$ $\quad x' \underset{R}{\sim} y' \underset{R'}{\sim} z'$. Es folgt

$$|d_X(x,x') - d_Z(z,z')| = |d_X(x,x') - d_Y(y,y') + d_Y(y,y') - d_Z(z,z')|$$

$$\le r + s. \qquad \square$$

<u>Korollar</u> Der Gromov-Hausdorff-Abstand erfüllt die Dreiecksungleichung.

<u>Beweis</u>: Das folgt aus den beiden vorigen Lemmata $\square$

7. <u>Def</u> Seien X, Y metrische Räume, sei $\varepsilon > 0$.
Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt <u>ε-Isometrie</u>,
wenn gilt: (a) $|d_X(u,v) - d_Y(\varphi(u), \varphi(v))| \leq \varepsilon$
für alle $u, v \in X$

(b) $B_\varepsilon(\varphi(X)) = Y$.

<u>Lemma</u> Ist $GHd(X,Y) < \varepsilon$, so gibt es eine $2\cdot\varepsilon$-Isometrie
$\varphi : X \to Y$.

<u>Beweis</u> Seien $X \xhookrightarrow{\alpha} Z \xhookleftarrow{\beta} Y$ isometrische Einbettungen mit
$Hd(\alpha(X), \beta(Y)) < \varepsilon$. Zu jedem $x \in X$ wähle ein
$y = \varphi(x) \in Y$ mit $d_Z(\alpha(x), \beta(y)) < \varepsilon$. Für
$x, x' \in X$ folgt dann $d_Y(\varphi(x), \varphi(x')) \leq d_X(x,x') + 2\cdot\varepsilon$.
(und andersrum)
Ist $y \in Y$, so gibt es $x \in X$ mit $d_Z(\alpha(x), \beta(y)) < \varepsilon$
$\Rightarrow d_Y(\varphi(x), y) < 2\cdot\varepsilon$ $\square$

8. <u>Erinnerung</u> Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, ist
$\varepsilon > 0$, so gibt es $S = S(\varepsilon) \subseteq X$ endlich mit
$$B_\varepsilon(S(\varepsilon)) = X.$$

<u>Konsequenzen</u> (a) Die abzählbare Menge
$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(1/k) \subseteq X$ ist dicht, d.h. X ist <u>separabel</u>.

(b) $Hd(S(1/k), X) \leq 1/k \Rightarrow GHd(S(1/k), X) \leq \frac{1}{k}$

also läßt X sich beliebig genau durch <u>endliche</u> metrische Räume im GH-Sinne approximieren.

9. Nach §1.5 (Fréchets Einbettungssatz) ist jeder kompakte metrische Raum isometrisch zu einem Unterraum von $L_\infty(\mathbb{N})$. Deswegen existiert eine <u>Menge</u> GH von kompakten metrischen nichtleeren Räumen, so dass jeder kompakte metrische Raum $Y \neq \emptyset$ zu <u>genau einem</u> $X \in GH$ isometrisch ist. Wir nennen (GH, GHd) den <u>Gromov-Hausdorff-Raum</u> "aller kompakten metrischen Räume".

<u>Satz</u> Der Gromov-Hausdorff-Abstand ist eine Metrik auf GH.

<u>Beweis</u> Wir wissen schon, dass GHd eine Pseudometrik ist: $GHd(X,Y) = GHd(Y,X) \geq 0$, $GHd(X,X) = 0$, und $GHd(X,Z) \leq GHd(X,Y) + GHd(Y,Z)$.

Es fehlt noch: $GHd(X,Y) = 0 \Rightarrow X \cong Y$.

Angenommen, $GHd(X,Y) = 0$. Sei $T \subseteq X$ eine abzählbare dichte Teilmenge, $T = \{p_0, p_1, \dots\}$.

Für jedes $k \geq 1$ sei $\varphi_k : X \to Y$ eine $1/k$-Isometrie.

Da Y kompakt ist, gibt es eine unendliche Teilmenge $I_0 \subseteq \mathbb{N}$ so, dass $\{\varphi_k(p_0)\}_{k \in I_0}$ konvergiert, dann $I_1 \subseteq I_0$ unendlich so, dass auch $\{\varphi_k(p_1)\}_{k \in I_1}$ konvergiert, usw. Sei n_k das k-te Element in I_k.

Dann konvergiert $\{\varphi_{n_k}(p_j)\}_{k \in \mathbb{N}}$ für jedes $j = 0, 1, \dots$.

Setze $\varphi(p_j) = \lim_k \varphi_{n_k}(p_j)$. Da φ_{n_k} eine $1/n_k$-Isometrie ist und $n_k \geq k$ gilt, ist $\varphi : T \to Y$ eine isometrische Einbettung. Da $T \subseteq X$ dicht und Y vollständig ist, hat φ eine eindeutige isometrische Fortsetzung $\varphi : X \to Y$.

Es bleibt zu zeigen, dass φ surjektiv ist.

Die gleiche Argumentation liefert eine isometrische Einbettung $\psi : Y \to X$. Wäre φ nicht surjektiv, so wäre $\psi \circ \varphi : X \to X$ eine nicht-surjektive isometrische Einbettung. Das widerspricht ÜA 2.3

$\square$

10. Def Ist X ein kompakter metrischer Raum, so sei $\mathrm{diam}(X) = \max\{d(u,v) \mid u,v \in X\}$ und für $\varepsilon > 0$ sei

$$c_\varepsilon(X) = \min\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt } x_1,\dots,x_k \in X \text{ mit} \\ B_\varepsilon(x_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(x_k) = X \end{array} \right\}$$

Theorem (Gromovs Kompaktheitssatz)

Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in GH. Wenn es ein $D > 0$ gibt und zu jedem $k \geq 1$ ein C_k so, dass für alle $n \geq 0$ gilt

(a) $\mathrm{diam}(X_n) \leq D$

(b) $c_{1/k}(X) \leq C_k$

so hat die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge.

Beweis ① Wir wählen in jedem Raum X_n eine Folge $(p_{n,i})_{i=0}^{\infty}$ so, dass gilt:

$$X_n \subseteq B_{1/k}(\{p_{n,0}, \dots, p_{n,m_k}\})$$

Dabei hängt m_k nur von k ab, nicht von n (wegen (b)). Wegen (a) gibt es $I_1 \subseteq \mathbb{N}$

unendlich so, dass die Folge

$$\left(d_{X_n}(p_{n,0}, p_{n,1})\right)_{n \in I_1} \text{ konvergiert.}$$

Iterativ finden wir $\mathbb{N} \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_\ell$ unendlich so, dass für alle $s, t \leq \ell$ die Folge

$$\left(d_{X_n}(p_{n,s}, p_{n,t})\right)_{n \in I_\ell} \text{ konvergiert.}$$

Sei n_k der k-te Eintrag in I_k.

Dann konvergiert die Folge

$$\left(d_{X_{n_k}}(p_{n_k,s}, p_{n_k,t})\right)_{k=1}^{\infty}$$

für alle s, t. Sei nun $(p_{\infty,s})_{s=0}^{\infty}$ eine Folge paarweise verschiedener Punkte (z.B. $p_{\infty,s} = s$).

Wir definieren eine Pseudometrik δ auf $\{p_{\infty,0}, \ldots\}$ durch $\delta(p_{\infty,s}, p_{\infty,t}) = \lim_k d_{X_{n_k}}(p_{n_k,s}, p_{n_k,t})$

Sei (X_∞, δ) die Vervollständigung von

$$\{p_{\infty,0}, p_{\infty,1}, \ldots\} / \{\delta = 0\}$$

Aus der Konstruktion folgt, dass

$X_\infty \subseteq B_{2/k}(\{P_{\infty,0}, \dots, P_{\infty,m_k}\})$ gilt. Also ist X_∞ vollständig und total beschränkt und damit kompakt.

Ist nun t groß, so ist,

$$\{(P_{n_t,i}, P_{\infty,i}) \mid i = 0, \dots, m_k\} \text{ eine}$$

$\frac{1}{k}$-Relation zwischen

$$\{P_{n_t,0}, \dots, P_{n_t,m_k}\} \text{ und } \{P_{\infty,0}, \dots, P_{\infty,m_k}\}$$

$$\Rightarrow \; GHd(X_{n_t}, X_\infty) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{k} \qquad \square$$

<u>Korollar</u> Ist $D > 0$ und $C_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Abbildung, so hat die Menge aller $X \in GH$ mit

(a) $\operatorname{diam}(X) \leq D$

(b) $c_{1/k}(X) \leq C_k$

kompakten Abschluss in GH. $\square$

11. <u>Theorem</u> Der Gromov-Hausdorff-Raum GH ist vollständig, separabel und kontrahierbar.

<u>Beweis</u> Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge in GH.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m(\varepsilon)$ so, dass

$GHd(X_n, X_{m(\varepsilon)}) < \varepsilon$ für alle $n \geq m(\varepsilon)$.

Ist nun $p_0, \dots, p_r \in X_{m(\varepsilon)}$ mit

$X_{m(\varepsilon)} = B_\varepsilon(\{p_0, \dots, p_r\})$ und ist

$f: X_{m(\varepsilon)} \to X_n$ eine $2\cdot\varepsilon$-Isometrie, so folgt mit

$q_j = f(p_j)$, so ist $X_n \subseteq B_{4\varepsilon}(\{q_0, \dots, q_r\})$

also $c_\varepsilon(X_n) \leq 4\, c_\varepsilon(X_{m(\varepsilon)})$ für $n \geq m(\varepsilon)$

$\Rightarrow$ $(c_\varepsilon(X_n))_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

Genauso folgt $\mathrm{diam}(X_n) \leq \mathrm{diam}(X_{m(\varepsilon)}) + 2\varepsilon$ für $n \geq m(\varepsilon)$ $\Rightarrow$ $(\mathrm{diam}(X_n))_{n\geq 0}$ ist beschränkt.

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es eine konvergente Teilfolge. Da aber $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchy-Folge ist, folgt damit die Konvergenz.

Die Menge der Isometrieklassen von endlichen metrischen Räumen mit rationalen Abständen zwischen Punkten ist abzählbar und GHd-dicht in der Menge der endlichen metrischen Räume

Letztere ist also dicht in GH, vgl. §4.8.
Also ist GH separabel.
Ist $X \in GH$, so setze $X_t = (X, t \cdot d_X)$
für $t > 0$ und $X_0 = (\{*\}, 0)$.
Eine Rechnung zeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} GH \times [0,1] &\longrightarrow GH \\ (X, t) &\longmapsto X_t \end{aligned}$$

stetig ist und GH auf $(\{*\}, 0)$ kontrahiert.

$\square$

Der Kompaktheitssatz §4.10 ist in der Riemannschen Geometrie vor allem im Zusammenhang mit unteren Krümmungsschranken ein zentrales Hilfsmittel. Zum Beispiel hat die Menge aller Isometrieklassen von (kompakten) Riemannschen n-Mannigfaltigkeiten M mit $\operatorname{diam}(M) \le D$ und Schnittkrümmung $\ge \kappa$ kompakten Abschluss in GH und man weiß etwas über die Räume, die im Abschluss auftreten.

Für CAT(0)-Räume ist zunächst einmal die Kompaktheitsannahme hinderlich.

12. Def Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ eine Folge eigentlicher (= abgeschlossene Bälle sind kompakt) metrischer Räume. Sei $p_n \in X_n$. Ist X metrischer Raum, $p \in X$, und gilt

$$\lim_n GHd(\overline{B}_r(X_n, p_n), \overline{B}_r(X, p)) = 0$$

für jedes $r > 0$, so sagt man, dass die Folge $(X_n)_{n\geq 0}$ einen punktierten Gromov-Hausdorff-(basierten) Limes X hat. Theorem §4.10 hat dann eine Entsprechung. Solche Grenzwerte benutzte Gromov, um seinen Satz über Gruppen von polynomialem Wachstum zu zeigen.

Ein Problem ist aber, dass man oft keine GH-Konvergenz hat, wenn es um nicht kompakte Räume geht. Wir betrachten zum Abschluss eine Methode, die <u>immer</u> Konvergenz erzwingt.

\#

13. Def Sei I eine Menge, sei $\mu \subseteq \mathcal{P}(I)$ eine Menge von Teilmengen von I. Man nennt μ einen Filter auf I, wenn gilt

(Fi1) $I \in \mu$ und $\emptyset \notin \mu$ (also $I \neq \emptyset$)

(Fi2) $a, b \in \mu \Rightarrow a \cap b \in \mu$ (also $a \cap b \neq \emptyset$)

(Fi3) ist $a \subseteq b \subseteq I$ und $a \in \mu$, so ist $b \in \mu$.

Bsp (a) $j \in I$, $\mu = \{a \subseteq I \mid j \in a\}$ ist Filter, der von a erzeugte Hauptfilter

(b) I topol. Raum, $j \in I$, $\mu = \{U \subseteq I \mid U \text{ Umgebung von } j\}$ Umgebungsfilter von j

Lemma Ist μ ein Filter auf I, so sind äquivalent:

(i) Für jede Teilmenge $a \in I$ gilt $a \in \mu$ oder $I - a \in \mu$.

(ii) Es gibt keinen Filter μ' auf I mit $\mu \subsetneq \mu'$, d.h. μ ist ein maximaler Filter.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Wäre $\mu' \supsetneq \mu$, so gäbe es $a \in \mu' - \mu$. Dann wäre $I - a \in \mu \subseteq \mu' \Rightarrow (I-a) \cap a = \emptyset \in \mu'$ ↯

(ii) $\Rightarrow$ (i) Angenommen, $a \subseteq I$, $a \notin \mu$ und μ ist maximal. Beh: es gibt $b \in \mu$ mit $b \cap a = \emptyset$.

Dann folgt $b \subseteq I - a \Rightarrow I - a \in \mu$.

Beweis der Beh: Wenn für jedes $b \in \mu$ gilt $b \cap a \neq \emptyset$, so ist

$$\mu' = \{c \subseteq I \mid \text{es gibt } c_1, \dots, c_r \in \mu \cup \{a\} \text{ mit } c \supseteq c_1 \cap \dots \cap c_r\}$$

ein Filter (der von $\mu \cup \{a\}$ erzeugte Filter) und $\mu' \supsetneq \mu$. □

<u>Beispiel</u>: Hauptfilter sind maximal. Man nennt maximale Filter auch <u>Ultrafilter</u> auf I.
Ist I unendlich, so ist

$$F = \{a \subseteq I \mid I - a \text{ endlich}\}$$ ein Filter, der <u>Fréchet-Filter</u> auf I. Ein Filter heißt <u>frei</u>, wenn $\bigcap \mu = \emptyset$ gilt (Hauptfilter oder Umgebungsfilter sind also <u>nicht</u> frei).

<u>Satz</u> (<u>Ultrafilter-Satz</u>) Ist μ ein Filter auf I, so gibt es einen Ultrafilter (= maximalen Filter) $\mu' \supseteq \mu$.

<u>Beweis</u>: Sei $P = \{\lambda \subseteq \mathcal{P}(I) \mid \lambda \text{ Filter und } \mu \subseteq \lambda\}$. Dann ist $(P, \subseteq)$ partiell geordnet und $\mu \in P$.
Ist $K \subseteq P$ eine linear geordnete Teilmenge, so setze $\nu = \bigcup K$. <u>Beh</u>: ν ist Filter.
<u>Klar</u>: $I \in \nu$. Ist $a \in \nu$, so gilt $a \in \lambda$ für ein $\lambda \in K$. Also ist $\emptyset \notin \nu$. Ist $a \in \lambda$, $b \in \lambda'$ für $\lambda, \lambda' \in K$, $\lambda \subseteq \lambda'$, so ist $a \in \lambda' \Rightarrow a \cap b \in \lambda' \Rightarrow a \cap b \in \nu$.
Ist $a \subseteq b \subseteq I$ und $a \in \lambda$, so ist $b \in \lambda \subseteq \nu \Rightarrow \nu$ Filter.
Also ist $(P, \subseteq)$ induktiv geordnet. Nach Zorns Lemma gibt es in $(P, \subseteq)$ maximale Elemente $\square$

<u>Folgerung</u>: Es gibt nicht-freie Ultrafilter (auf unendlichen Mengen) nämlich genau die maximalen Filter $\mu \supseteq F$, F = Fréchet-Filter. $\square$

Anderer Blickwinkel: μ ist "Maß" auf $\mathcal{P}(I)$,

$$\mu(a) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \in \mu \\ 0 & \text{wenn } a \notin \mu. \end{cases}$$

14. Sprachen und Strukturen – etwas elementare Logik.

Eine Struktur $\mathcal{A} = (A, F, R, C)$ besteht aus einem Universum A, einer Menge F von Funktionen (= Abbildungen $f: A^k \to A$, für diverse $k \geq 0$) und Relationen (= Teilmengen von A^k für diverse k) und Konstanten (= Teilmengen von A). Das Konzept trifft man z.B. in der Algebra ständig:

Ring $R \rightsquigarrow (R, \{+,-,\cdot\}, \emptyset, \{0,1\})$

angeordneter Ring $(R, \{+,-,\cdot\}, \{\leq\}, \{0,1\})$ usw.

Eine Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus einer Menge $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}$ von Funktionszeichen, $\mathfrak{R} \subseteq \mathcal{L}$ von Relationszeichen und $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{L}$ von Konstantenzeichen, $\mathcal{L} = \mathfrak{F} \,\dot\cup\, \mathfrak{R} \,\dot\cup\, \mathcal{C}$.

Eine surjektive Abbildung $\mathcal{L} \to F \cup R \cup C$, die jedem Funktions-/Relations-/Konstantenzeichen eine Funktion/Relation(*)/Konstante in $\mathcal{A}$ zuordnet, heißt Interpretation der Sprache in $\mathcal{A}$. Gegeben solch eine Interpretation, nennt man $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

(*) dabei haben Funktions- und Relationssymbole eine Stelligkeit k

Beispiele $\mathcal{L}_{ord} = \{\leq\}$ Sprache der Anordnungen

$\mathcal{L}_{Grp} = \{\cdot, 1\}$ Sprache der Gruppen

$\mathcal{L}_{Ring} = \{\cdot, +, -, 0, 1\}$ Sprache der Ringe und Körper

$\mathcal{L}_{Set} = \{\in\}$ Sprache der Mengenlehre.

Die Unterscheidung einer Sprache und ihrer Interpretation ist etwas wichtiges, aber in der Mathematik ganz normal: wir kennen die Sprache der Gruppen und rechnen dann mit den Symbolen dieser Sprache in konkreten Gruppen. Etwas wichtiges fehlt jetzt noch: die Variablen. Wir fügen eine (zu $\mathcal{L}$ disjunkte) Menge $Var = \{v_1, v_2, \ldots\}$ von Variablenzeichen hinzu.

15. Formeln und Wahrheit Ein $\mathcal{L}$-Term ist eine endliche Folge von Elementen aus $\mathcal{L} \cup Var$, die nach folgenden Regeln gebildet ist:

(a) Konstanten und Variablen sind $\mathcal{L}$-Terme

(b) Ist f ein k-stelliges Funktion und sind $t_1, \ldots, t_k$ $\mathcal{L}$-Terme, so ist $f t_1 \cdots t_k$ ein $\mathcal{L}$-Term. Schreibe zur besseren Lesbarkeit $f(t_1, \ldots, t_k)$.

Nun fügen wir zu $\mathcal{L} \cup Var$ noch die logischen Symbole hinzu,

$$Log = \{ \exists, \dot{=}, \neg, \wedge, (,) \}$$

Eine aus $\mathcal{L} \cup Var \cup Log$ gebildete endliche Zeichenkette heißt <u>$\mathcal{L}$-Formel</u>, wenn sie nach folgenden Regeln gebildet ist.

(a) $t \dot{=} s$ wobei t, s $\mathcal{L}$-Terme sind

(b) $r t_1 \ldots t_k$ wobei r ein k-stelliges Relationszeichen ist und $t_1, \ldots, t_k$ $\mathcal{L}$-Terme sind

(schreibe dafür $r(t_1, \ldots, t_k)$)

(c) $\neg(\psi)$ wenn ψ $\mathcal{L}$-Formel ist

(d) $(\psi) \wedge (\varphi)$ wenn ψ, φ $\mathcal{L}$-Formeln sind

(e) $\exists v \varphi$ wenn φ $\mathcal{L}$-Formel und $v \in Var$ ist

<u>Abkürzungen</u>:

$\varphi \vee \psi$ für $\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \to \psi$ für $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$

$\varphi \leftrightarrow \psi$ für $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

$\forall v \varphi$ für $\neg \exists v \neg \varphi$

$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$ für $(((\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3 \ldots) \wedge \varphi_k)$

$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_k$ für $((\varphi_1 \vee \varphi_2) \ldots \quad) \vee \varphi_k)$

(Klammern gehören streng genommen nicht dazu, sondern erhöhen nur die Lesbarkeit!)

Lese $\wedge$ und, $\vee$ oder, $\neg$ nicht, $\rightarrow$ impliziert
$\exists$ es gibt $\forall$ für alle usw. Man kann zeigen:
$\mathcal{L}$-Formeln sind eindeutig lesbar, echte Anfangsstücke von $\mathcal{L}$-Formeln sind keine $\mathcal{L}$-Formeln.

Bsp $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Grp} = \{\cdot, 1\}$

$$\forall v((v \cdot 1 \doteq v) \wedge (1 \cdot v \doteq v))$$
$$\forall v \exists w ((v \cdot w = 1) \wedge (w \cdot v = 1))$$

Was bedeutet nun Wahrheit oder Gültigkeit von $\mathcal{L}$-Formeln? Sei $\beta : Var \rightarrow A$ eine Abbildung, $\mathcal{A} = (A, F, R, C)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann setzt sich β eindeutig fort zu einer Abbildung, die jedem $\mathcal{L}$-Term t ein Element $\beta(t)$ in A zuordnet (klar: durch einsetzen der $\beta(v)$ in Terme und auswerten dieser Terme in $\mathcal{A}$). Man nennt solch ein β eine Belegung der Variablen.

Sei nun φ eine $\mathcal{L}$-Formel und $\beta : Var \rightarrow A$ eine Belegung der Variablen. Schreibe

$$\mathcal{A} \models \varphi[\beta] \qquad \text{"}\mathcal{A} \text{ erfüllt } \varphi \text{ unter der Belegung } \beta\text{"}$$

wenn gilt:

(a) $\mathcal{A} \models t \doteq s\,[\beta]$ gdw $\beta(t) = \beta(s)$

(b) $\mathcal{A} \models r(t_1, \dots, t_k)[\beta]$ gdw

$(\beta(t_1), \dots, \beta(t_k)) \in r$

(c) $\mathcal{A} \models \neg\varphi\,[\beta]$ gdw $\mathcal{A} \not\models \varphi\,[\beta]$

(d) $\mathcal{A} \models \varphi \wedge \psi\,[\beta]$ gdw $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ und $\mathcal{A} \models \psi[\beta]$

(e) $\mathcal{A} \models \exists v\, \varphi\,[\beta]$ genau dann, wenn es ein $a \in A$ gibt, so dass $\mathcal{A} \models \varphi[\beta\frac{a}{v}]$

wobei $\beta\frac{a}{v}$ die Belegung $Var \to A$ ist mit

$$w \longmapsto \begin{cases} \beta(w) & \text{wenn } w \neq v \\ a & \text{wenn } w = v \end{cases}$$

Kurz: wir lesen die Formel, wie ein Mathematiker sie liest und prüfen, ob sie gültig ist.

Eine Variable $v \in Var$ heißt <u>frei</u> in der Formel φ, wenn sie durch kein $\exists$ oder $\forall$ Quantor gebunden ist. <u>Bsp</u> v, w Variable $\mathcal{L} = \{\cdot, 1\}$

$\exists v\, (v \cdot w = w)$ $\qquad$ w freie
v gebunden

Eine Formel ohne freie Variablen heißt <u>Satz</u>.

Vorsicht: Sätze können wahr oder falsch sein, das ist nicht Teil der Definition.

Beachte auch: Sätze sind unabhängig von Belegungen!

Bsp $\mathcal{A}$ Gruppe, $\mathcal{L} = \{\cdot, 1\}$

$\exists v \; \neg\, v \cdot 1 \doteq v$ (falscher) Satz

$\forall v \quad v \cdot 1 \doteq v$ (richtiger) Satz

$\exists v \quad \neg\, v \doteq w$ Formel, kein Satz

Konvention Ist φ eine $\mathcal{L}$-Formel mit freien (= nicht durch Quantoren gebundenen) Variablen $v_1, \dots, v_k$, schreibe $\varphi(v_1, \dots, v_k)$. Sind nun $a_1, \dots, a_k \in A$ so ist $\varphi(a_1, \dots, a_k) = \varphi[\beta]$, wobei β (irgendeine) Belegung ist mit $\beta(v_i) = a_i$.

Für Sätze ist $k = 0$.

16. Ultraprodukt Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, I eine (unendliche) Menge. Für jedes $j \in I$ sei $\mathcal{A}_j = (A_j, F_j, R_j, C_j)$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Dann kann man das kartesische Produkt betrachten

$$\prod_{j\in I} \mathcal{A}_j = \Big(\prod_{j\in I} A_j, \prod_{j\in I} F_j, \prod_{j\in I} R_j, \prod_{j\in I} C_j\Big),$$

das ist wieder eine $\mathcal{L}$-Struktur. Aber: sie hat oft schlechte Eigenschaften: ein kartesisches Produkt von Körpern zum Beispiel ist nur ein Ring (mit Nullteilern).

Anders gesagt: ist φ ein $\mathcal{L}$-Satz und ist $\mathcal{A}_j \models \varphi$ richtig für alle $j \in I$, so folgt noch <u>nicht</u>, dass $\left(\prod_{j\in I} \mathcal{A}_j\right) \models \varphi$.

Angenommen, μ ist ein Ultrafilter auf der Indexmenge I. Wir definieren Äquivalenzrelation auf dem Kartesischen Produkt durch

$$(x_j)_{j\in I} \underset{\mu}{\sim} (y_j)_{j\in I} \overset{\text{DEF}}{\iff} \{j \mid x_j \neq y_j\} \in \mu .$$

Die Filtereigenschaften garantieren, dass das eine ÄR ist. Die Menge der Äquivalenzklassen ist das Ultraprodukt $\prod_\mu X_j = \prod_{j\in I} X_j \big/ \underset{\mu}{\sim}$

$$\prod_\mu \mathcal{A}_j = \left(\prod_\mu A_j, \prod_\mu F_j, \prod_\mu R_j, \prod_\mu C_j\right)$$

Es ist in natürlicher Weise eine $\mathcal{L}$-Struktur. Sind $(\beta_j)_{j\in I}$ Belegungen $\mathrm{Var} \xrightarrow{\beta_j} A_j$, so erhält man eine Belegung des Ultraprodukts.

Nun gilt folgendes:

17. <u>Theorem</u> (Satz von Łoś) Sei $\mathcal{A} = \prod_\mu \mathcal{A}_j$ ein Ultraprodukt von $\mathcal{L}$-Strukturen $\mathcal{A}_j$, mit Belegungen β_j. Sei φ eine $\mathcal{L}$-Formel. Dann sind äquivalent:

(i) $\mathcal{A} \models \varphi[\beta]$ (β die zu den β_j gehörige Belegung)

(ii) $\mathcal{A}_j \models \varphi[\beta_j]$ für μ-fast alle $\mathcal{A}_j$

<u>Beweis</u> Einfach, Induktion über Formelaufbau (Kramer, Log. Grundlagen SS 2011 p 63 → 1 Seite)

<u>Folgerungen</u>: Ultraprodukte von Körpern sind Körper (läßt sich in $\mathcal{L}_{Ring} = \{+,-,\cdot,0,1\}$ sagen).

Ultraprodukte von algebraisch abgeschlossenen Körpern sind algebraisch abg. Körper.

⇝ man bleibt bei der gleichen Klasse von Strukturen, wenn man Ultraprodukte bildet.

Warum sind aber Ultraprodukte interessant?

Weil sie "seltsame" Eigenschaften haben.

18. Theorem (ω_1-Saturiertheit von Ultraprodukten)

Sei $I = \mathbb{N}$, sei $\Phi = \{\varphi_1(v_1,\dots,v_m), \varphi_2(v_1,\dots,v_m), \dots\}$ eine abzählbare Menge von $\mathcal{L}$-Formeln, sei μ ein freier Ultrafilter auf I, und seien $(\mathfrak{A}_j)_{j\in I}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. Angenommen, für jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gibt es Belegungen β_j so, dass für alle $\varphi \in \Phi_0$ gilt

$$\prod_\mu \mathfrak{A}_j \models \varphi[\beta]$$

Dann gibt es eine Belegung β so, dass für alle $\varphi \in \Phi$ gilt

$$\prod_\mu \mathfrak{A}_j \models \varphi[\beta],$$

Beweis Nach Łoś Theorem §4. 17 gilt

$$K_n = \{ k \in \mathbb{N} \mid k \geq n \text{ und } \mathfrak{A}_k \models \exists v_1 \dots \exists v_m\, \varphi_1(v_1 \dots v_m) \wedge \dots \wedge \varphi_n(v_1,\dots,v_m) \} \in \mu$$

Wegen $\bigcap_{n=0}^{\infty} K_n = \emptyset$ gibt es zu jedem $j \in K_0$ ein größtes $n(j)$ mit $j \in K_{n(j)}$. Für $j \in \mathbb{N} - K_0$ wähle β_j beliebig (das ist eine μ-Nullmenge). Für $j \in K_0$ wähle β_j so, dass gilt

$$\mathfrak{A}_j \models \varphi_0 \wedge \dots \wedge \varphi_{n(j)} [\beta]$$

Betrachte die entsprechende Belegung β. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nun: ist $j \in K_n$, so ist $n \leq n(j)$, also $A_j \models \varphi_n[\beta_j]$, also $\prod_\mu A_j \models \varphi_n[\beta]$ nach § 4.17. $\square$

19. <u>Beispiel</u> $A_j = (\mathbb{R}, \{+,-,\cdot\}, \{\leq\}, \{0,1\})$

$\varphi_n(v) = (v \geq \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ Summanden}})$ Offensichtlich ist jede <u>endliche</u> Teilmenge der Formelmenge $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$ erfüllbar durch eine reelle Zahl. Im Ultraprodukt von $\mathbb{R}$ $\prod_\mu A_j$ gibt es also Elemente, die größer als jede natürliche Zahl sind!

Man nennt $^*\mathbb{R} = \prod_\mu \mathbb{R}$ den Körper der <u>reellen Nonstandardzahlen</u>. Nach Łoś Theorem ist $^*\mathbb{R}$ ein reell abgeschlossener angeordneter Körper. Die Beobachtung oben zeigt, dass $^*\mathbb{R}$ <u>nicht</u> archimedisch ist, es gibt $x \in {}^*\mathbb{R}$ so, dass $x \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (vgl. Analysis I § 2.10).

Wir setzen ${}^*\mathbb{R}_{fin} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid$ es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $|x| \leq n\}$

und ${}^*\mathbb{R}_{inf} = \{x \in {}^*\mathbb{R} \mid |x| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$

(endliche bzw. infinitesimale Nonstandardzahlen)

Es gilt (a) ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ ist ein Teilring von ${}^*\mathbb{R}$

(b) ${}^*\mathbb{R}_{inf}$ ist ein maximales Ideal in ${}^*\mathbb{R}_{fin}$

(c) ${}^*\mathbb{R}_{fin} / {}^*\mathbb{R}_{inf} \cong \mathbb{R}$ (mit Schnitt)

Setze

$$0 \longrightarrow {}^*\mathbb{R}_{inf} \longrightarrow {}^*\mathbb{R}_{fin} \underset{\longleftarrow}{\xrightarrow{\text{std}}} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

std = "Standardteil".

Beweis (a) ist klar, (b): ${}^*\mathbb{R}_{inf}$ ist genau die Menge der Nichteinheiten von ${}^*\mathbb{R}_{fin}$, also ein maximales Ideal. Für (c) zeigt man, dass ${}^*\mathbb{R}_{fin} / {}^*\mathbb{R}_{inf}$ archimedisch und die Supremumseigenschaft hat. Letzteres folgt aus Theorem §4.18, wir machen nachher etwas ähnliches.

(Punkte mit $\alpha d(u,v) \in \mathbb{R}_{inf}$ haben d_α-Abstand 0). Setze

$$\mathrm{Cone}((X_j)_{j\in J}, \alpha, p) = Z \big/ {d_\alpha = 0}$$

Damit ist Cone ein ganz "normaler" metrischer Raum!

Es gilt nun folgendes (Bridson-Haefliger I.5.52)

Wenn die X_j eigentlich sind (abg. Bälle sind kompakt) und wenn $GH\text{-}\lim_j (X_j, p_j) = (X_\infty, p_\infty)$ existiert, dann gilt $(X_\infty, p_\infty) \cong \mathrm{Cone}(X_j, 1, p)$. #

22. Satz Asymptotische Kegel sind sphärisch vollständig (also insbesondere vollständig).

Beweis Sei

$$\overline{B}_{t_0}(x_0) \supseteq \overline{B}_{t_1}(x_1) \supseteq \dots$$

eine absteigende Kette von abgeschlossenen Bällen in $\mathrm{Cone}((X_j)_{j\in I}, \alpha, p)$. Betrachte jetzt

$$\begin{array}{ccl} \prod_\mu X_j & \supset & Z = \{ z \in \prod_\mu X_j \mid \alpha d(z,p) \in \mathbb{R}_{fin} \} \\ & & \downarrow q \\ & & \mathrm{Cone}((X_j)_{j\in I}, \alpha, p) \end{array}$$

20. Die Sprache der metrischen Räume

Setze $\mathcal{L}_{metr} = \mathcal{L}_{Ring} \cup \mathcal{L}_{ord} \cup \{d, R, X\}$

$$= \{+, -, \cdot, 0, 1, \leq, d, R, X\}$$

(X, d) metrischer Raum, als $\mathcal{L}_{metr}$-Struktur:

$$\mathcal{A} = (X \dot\cup \mathbb{R}, \{+, -, \cdot, d\}, \{\leq, R, X\}, \{0, 1\})$$

X, R einstellige Relationen (= "Prädikate"), nämlich: "ist Punkt in X" und "ist reelle Zahl".

21. Sei nun $(X_j, d_j, p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Familie von metrischen Räumen, mit Basispunkt $p_j \in X_j$.

Sei μ ein freier Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ und sei $\alpha \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$ eine positive Nonstandard-Zahl.

Wir definieren den <u>Asymptotischen Kegel</u>

$$\mathrm{Cone}((X_j)_{j \geq 0}, \alpha, (p_j)_{j \in \mathbb{N}})$$ wie folgt.

Sei $Z = \{ z \in \prod_\mu X_j \mid \alpha \cdot d(z, p) \in \mathbb{R}_{fin} \}$

wobei $p \in \prod_\mu X_j$ der zu $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ entsprechende Punkt ist.

Dann ist $d_\alpha(u, v) = \mathrm{std}(\alpha \cdot d(u, v))$ eine reellwertige Pseudometrik auf Z.

und $d : \prod_\mu X_j \times \prod_\mu X_j \to {}^*\mathbb{R}$ die "Metrik"

Wähle $z_n \in Z$ mit $q(z_n) = x_n$. Setze

$$E_{k,l} = \left\{ z \in Z \mid \alpha\, d(z, z_k) \le t_k + \frac{1}{l+1} \right\}.$$ Es folgt

$z_m \in E_{k,l}$ für alle $m \ge k$ ⟹ Die Familie von Mengen $\{E_{k,l}\}_{k,l \in \mathbb{N}}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft.

Mit §4.18 folgt: es gibt $z \in Z$ mit

$$z \in \bigcap_{k,l \ge 0} E_{k,l}$$

und damit $q(z) \in \bigcap_{k \ge 0} \overline{B}_{t_k}(x_k)$ □

23. Theorem Ist $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Familie von CAT(0)-Räumen, so ist auch

$$\mathrm{Cone}((X_j)_{j \in \mathbb{N}}, \alpha, p)$$

ein CAT(0)-Raum.

Beweis Mit Łoś Theorem sehr einfach, vgl. Kramer-Weiss arxiv:0902.1332v2, p. 8 □

24. Def Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ metrischer Raum heißt grob Lipschitz oder (L, C)-Lipschitz, für $C, L \ge 0$, wenn für alle $u, v \in X$ gilt

$$d_Y(\varphi(u), \varphi(v)) \le L \cdot d_X(u, v) + C$$

Beobachtung: Ist $(X_j \xrightarrow{\varphi_j} Y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Familie von (L,C)-Lipschitzabbildungen und ist $\alpha \in {}^*\mathbb{R}_{>0}$ infinitesimal klein, so ist die resultierende Abbildung

$$\mathrm{Cone}((X_j)_{j\in\mathbb{N}}, \alpha, p) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Cone}((Y_j)_{j\in\mathbb{N}}, \alpha, \varphi(p))$$

L-Lipschitz stetig. Denn:

$$\left.\begin{aligned} & d_Y(\varphi(u),\varphi(v)) \le L\cdot d_X(u,v) + C \\ \Rightarrow\quad & \alpha\cdot d_Y(\varphi(u),\varphi(v)) \le \alpha\cdot L\cdot d_X(u,v) + \underbrace{\alpha\cdot C}_{\text{infinitesimal}} \end{aligned}\right\} \text{ in } {}^*\mathbb{R}$$

Mit asymptotischen Kegeln kann man grob-Lipschitz-abbildungen "glätten".

Folgerung: sind $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$ grob Lipschitz äquivalent (in beide Richtungen), so ist $m = n$.