§3 Isometrien und Fixpunkte in CAT(0)-Räumen

1. Sei (X,d) ein metrischer Raum, mit Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(X)$, vgl. §1.3. Sei Γ eine Gruppe und $\Gamma \to \mathrm{Iso}(X)$ eine fest gewählte isometrische Wirkung von Γ auf X. Wir definieren folgendes für $g \in \Gamma$

$$d_g : X \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto d(v, g(v)) \quad \text{(stetig, sogar 2-Lipschitz)}$$

$$l_g = \inf(d_g(X)) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$\mu_g = \{ v \in X \mid d_g(v) = l_g \}$$

$$\mu(\Gamma) = \bigcap_{g \in \Gamma} \mu_g$$

Wir nennen g <u>halbeinfach</u>, falls $\mu_g \neq \emptyset$ und <u>parabolisch</u>, falls $\mu_g = \emptyset$.

Ein halbeinfaches g heißt <u>elliptisch</u>, wenn $l_g = 0$, mit anderen Worten: wenn g einen Fixpunkt hat, und <u>hyperbolisch</u>, wenn $l_g > 0$ gilt.

Die Γ-Wirkung heißt halbeinfach, wenn jedes $g \in \Gamma$ halbeinfach ist.

2. **Beispiel** (1) X vollständiger CAT(0) Raum, Γ mit einer beschränkten Bahn $\overset{\S 2.8}{\Longrightarrow}$ Γ besteht aus elliptischen Elementen und $\mu(\Gamma) = X^{\Gamma} = \{v \in X \mid g(v) = v$ für alle $g \in \Gamma\} \neq \emptyset$.

(2) $X = \mathbb{R}^n$ mit euklid. Metrik, $g \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$

$\rightsquigarrow g(v) = a(v) + t \qquad t \in \mathbb{R}^n, \; a \in O(n)$

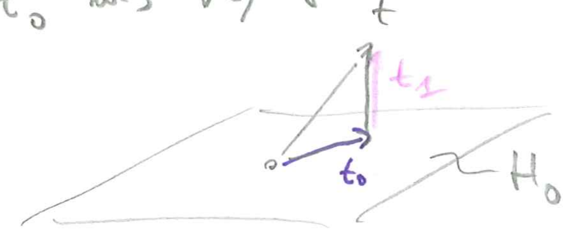
orthogonale Matrix $\boxed{\text{ÜA}}$

Es folgt $d_g(v) = \|(a-1)v + t\|_2$

Setze $H_0 = (a - \mathbb{1})\mathbb{R}^n \qquad H_1 = H_0^{\perp} \rightsquigarrow \mathbb{R}^n = H_0 \oplus H_1$

Zerlege $t = t_0 + t_1 \qquad t_i \in H_i$, wähle $v \in \mathbb{R}^n$

mit $-(a-1)v = t_0 \rightsquigarrow v \in \mu(g)$ und $\|t_1\|_2 = l_g$.



$\rightsquigarrow g$ halbeinfach

(3) $X = \ell^2(\mathbb{Z})$ Hilbertraum der Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k^2 < \infty$

a Shift-Operator $\quad a(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$y_k = x_{k-1}$$

a hat nur 0 als Fixpunkt und ist Isometrie.

Setze

$$t_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad t = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

Dann ist $v \mapsto av + t$ parabolische Isometrie $\boxed{\text{ÜA}}$

(3) $H^1 \underset{\text{iso}}{\cong} \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ jede Isometrie ist halbeinfach.

H^n für $n \geq 2$

$g \in SO(n)$ stabilisiert $(1\,0 - 0) \in H^n$ $\Rightarrow$ elliptisch

$v \in H^n$

$$g = \begin{pmatrix} c & s & & \\ s & c & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta(v, gv) = (c-1)(v_0^2 - v_1^2) + 1$$

Wenn $v_2 = \ldots = v_n = 0$, dann

$c = ch(t)$ $s = sh(t)$ $\qquad v_0^2 - v_1^2 = 1 \Rightarrow \beta(v, gv) = c = ch(t)$

$t \neq 0$

Wenn $v_j \neq$ für ein $j \geq 2$, so ist $v_0^2 - v_1^2 > 1$

$\Rightarrow \beta(v, gv) > c = ch(t)$. Also ist g hyperbolisch,

$l_g = d|t|$.

Wir werden gleich sehen, dass eine hyperbolische Isometrie immer eine unbeschränkte Geodätische invariant läßt. In unserem Modell von H^n muss dazu ein 2-dimensionaler Unterraum invariant sein, der H^n nicht trivial schneidet. Es ist nicht schwer, Elemente in $\Omega_{1,n}$ zu finden, die das nicht tun, und die nicht elliptisch sind. Es gibt also für $n \geq 2$ parabolische Isometrien auf H^n.

3. <u>Lemma</u> $\mu(g)$ ist $\langle g\rangle$-invariant und $\mu(\Gamma)$ ist Γ-invariant. Ist $a \in \mathrm{Iso}(X)$, so gilt $l_{aga^{-1}} = l_g$ und $\mu(aga^{-1}) = a\mu(g)$. Wenn also $ag=ga$ gilt, so ist $\mu(g)$ $\langle a\rangle$-invariant.

<u>Bew.</u> Sei $v \in \mu(g)$, also $l_g = d(v, g(v))$. Dann gilt $d(g(v), g^2(v)) = l_g \Rightarrow g(v) \in \mu(g)$. Es folgt, dass $\mu(\Gamma)$ auch Γ-invariant ist. Für $a \in \mathrm{Iso}(X)$ ist $d(v, aga^{-1}(v)) = d(a^{-1}(v), ga^{-1}(v))$ $= d(w, g(w))$ mit $w = a^{-1}(v)$, also $l_{aga^{-1}} = l_g$.

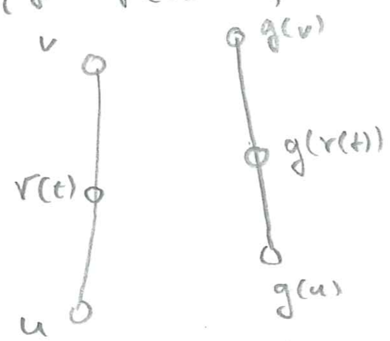
Ist $d(v, g(v)) = l_g$, so ist

$$d(av, aga^{-1}(av)) = d(av, agv) = d(v, gv) = l_g$$

$$\Rightarrow a\mu(g) \subseteq \mu(aga^{-1}) \text{ und } a^{-1}\mu(aga^{-1}) \subseteq \mu(g) \quad \square \quad \#$$

4. <u>Satz</u> Sei X ein CAT(0)-Raum. Dann ist die Funktion l_g für jedes $g \in \mathrm{Iso}(X)$ konvex. Die Mengen $X_{\le r} = d_g^{-1}([0,r])$ sind konvex, insbesondere ist $\mu(g)$ konvex.

<u>Bew.</u> Sei $u, v \in X$, $r: [0,h] \to X$ Geodätische mit $r(0) = u$, $r(h) = v$. Nach §2.2 gilt



$$d(r(hs), gr(hs)) \le (1-s)\cdot d(u, gu) + s \cdot d(v, gv)$$

$0 \le s \le 1$

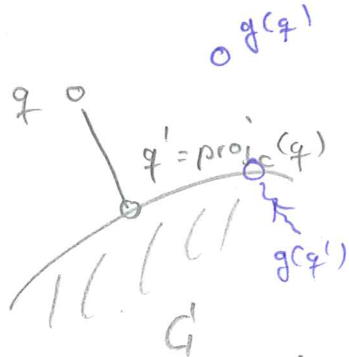
Insbesondere ist $l_g^{-1}([0,r])$ damit konvex.

$\square$

<u>Lemma</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, $C' \subseteq X$ sei konvex, vollständig. Angenommen, $g \in \mathrm{Iso}(X)$ mit $g(C') = C'$. Dann gilt:

$$l_g = l_{g|C'} \quad , \; g \text{ halbeinfach} \Leftrightarrow g|C' \text{ halbeinfach.}$$

<u>Beweis</u> Betrachte $\mathrm{proj}_{C'} : X \to C'$ 1-Lipschitz (§2.4)



Offensichtlich gilt $g(q') = \mathrm{proj}_{C'}(g(q))$, d.h. $\mathrm{proj}_{C'}$ ist g-äquivariant. Es folgt

$d_g(q') \leq d_g(q)$ $\rightsquigarrow$ Beh. $\square$

5. <u>Lemma</u> Ist X vollständiger CAT(0)-Raum, so ist $g \in \mathrm{Iso}(X)$ elliptisch genau dann, wenn $\langle g \rangle$ eine beschränkte Bahn hat.
Wenn g^m für ein $m \neq 0$ elliptisch ist, so ist g elliptisch.

<u>Beweis</u> Die erste Behauptung ist klar und §2.8 (BTFPS). Angenommen, g^m hat Fixpunkt $v \in X$. Dann hat v eine endliche $\langle g \rangle$-Bahn, also hat $\langle g \rangle$ einen Fixpunkt. $\square$

6. Satz Sei X ein CAT(0)-Raum und $g \in \mathrm{Iso}(X)$.

Dann sind äquivalent:

(1) g ist hyperbolisch

(2) Es gibt ein g-invariantes 1-Flach E, auf dem g als Translation $\neq id_E$

Man nennt dann E eine Achse von g.

Beweis Angenommen, es gibt ein 1-Flach E, das g-invariant ist und auf dem g als Translation $\neq id_E$ wirkt. Nach dem Lemma aus §3.4 ist g dann halbeinfach und nicht elliptisch, also hyperbolisch.

Angenommen, g ist hyperbolisch. Sei $v \in \mu(g)$, $d_g(v) = h = l_g > 0$. Betrachte die $\langle g \rangle$-Bahn von v, $v_k = g^k(v)$ $k \in \mathbb{Z}$

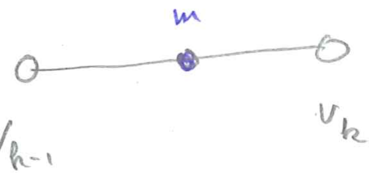
Verbinde v_k mit v_{k+1} durch eine Geodätische

$\gamma : [h\cdot k, h(k+1)] \to X$ $\quad \gamma(hk) = v_k$

$\gamma(h(k+1)) = v_{k+1}$

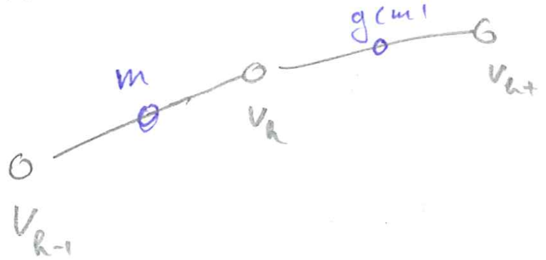
Beh $\gamma : \mathbb{R} \to X$ ist eine Geodätische und $E = \gamma(\mathbb{R})$ das gesuchte 1-Flach. Nach ÜA 4.2 genügt es zu zeigen, dass γ lokal geodätisch ist. Dazu müssen wir nur die Stelle $t = hk$ untersuchen.

Sei m der Mittelpunkt von v_{k-1} und v_k.



Dann gilt $m \in \mu(g)$, weil $\mu(g)$ $\langle g \rangle$-invariant und konvex ist.

Also ist $d(m, g(m)) = k = d(m, v_k) + d(v_k, g(m))$



und v_k ist Mittelpunkt von m und $g(m)$. Also ist γ nahe v_k geodätisch. $\square$

Der Beweis zeigt etwas mehr: durch jeden Punkt $v \in \mu(g)$ geht genau ein g-invariantes 1-Flach, wenn g hyperbolisch ist.

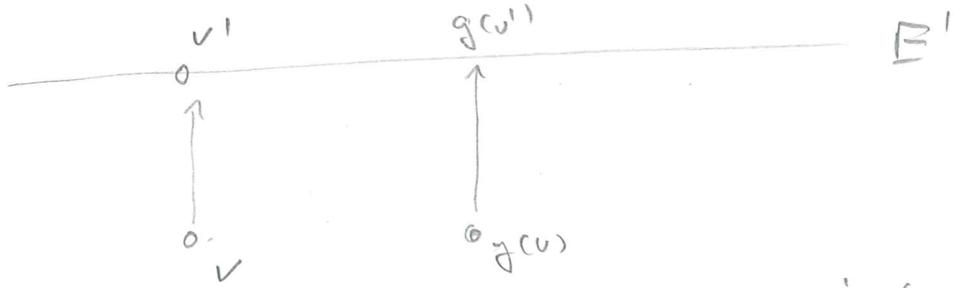
<u>Korollar</u> Ist X ein CAT(0)-Raum und $g \in \mathrm{Iso}(X)$ hyperbolisch, so ist auch g^k hyperbolisch für alle $k \neq 0$. $\square$

Wir nennen zwei 1-Flachs $E, E' \subseteq X$ <u>parallel</u>, wenn für geeignete parametrisierende Geodätische $\gamma, \gamma' : \mathbb{R} \to X$ die Funktion $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$ <u>konstant</u> ist.

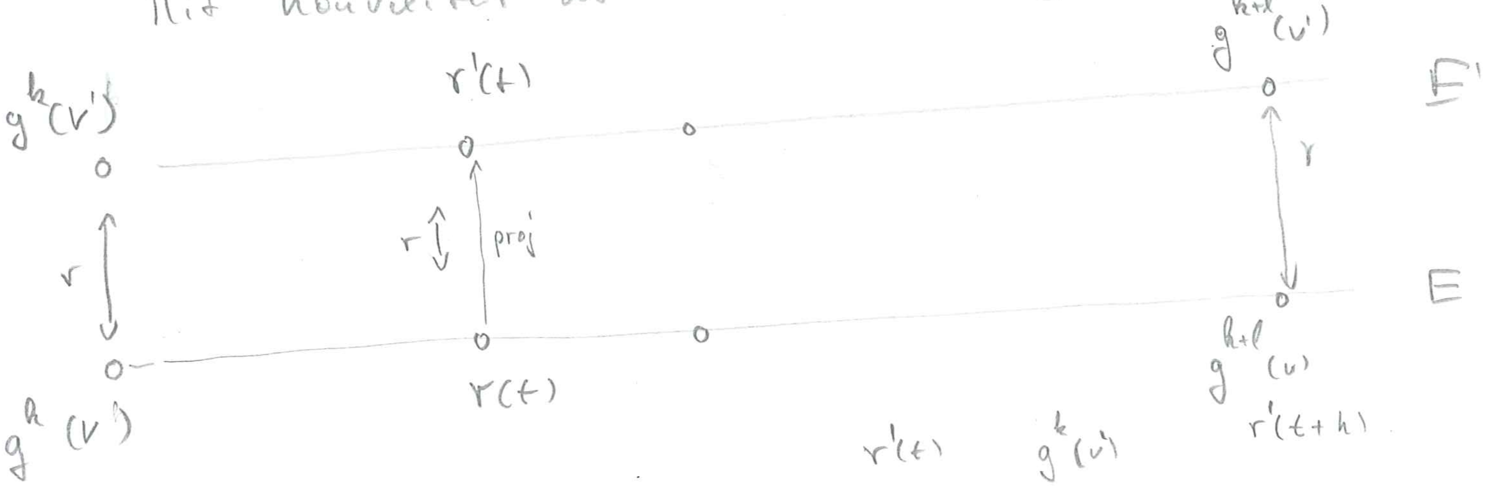
Bem. Wegen der Konvexität der Abstandsfunktion ist das äquivalent dazu, dass $t \mapsto d(\gamma(t), \gamma'(t))$ <u>beschränkt</u> ist (wenn X CAT(0) ist). ÜA

<u>Korollar</u> Sei X CAT(0)-Raum und $g \in \mathrm{Iso}(X)$ hyperbolisch. Dann sind alle Achsen von g parallel.

<u>Beweis</u> Seien E, E' Achsen von g. Für $v \in E$ betrachte $v' = \mathrm{proj}_{E'}(v)$.

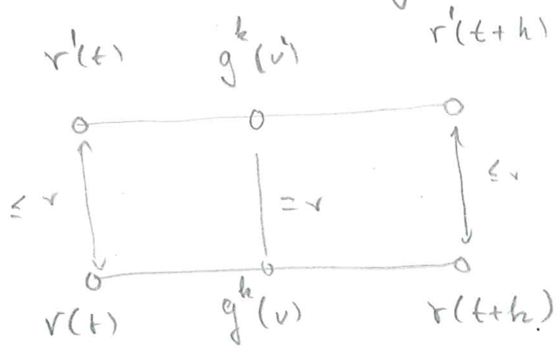


Mit Lemma §3.4. gilt $g(v') = \mathrm{proj}_{E'}(g(v))$ also $d(g^k(v), g^k(v')) = \text{const}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Mit Konvexität der Abstandsfunktion §2.2 folgt



$d(r(t), r'(t)) \le r$ <u>und</u>

$r \le d(r(t), r'(t))$



$\square$

Als konvexe Menge ist $\mu(g) \subseteq X$ ein CAT(0)-Raum, wenn g halbeinfach ist. Im hyperbolischen Fall ist dann $\mu(g)$ Vereinigung paralleler 1-Flachs. Wir betrachten jetzt solche CAT(0)-Räume genauer. Dazu brauchen wir <u>Winkel</u>.

Erinnerung an die Schule:

$$\sin\left(\tfrac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{2 \cdot t}$$

$\varepsilon > 0$

7. <u>Def</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, seien $\gamma, \gamma' : [0,\varepsilon] \to X$ Geodätische mit $\gamma(0) = \gamma'(0) = p$. Wir definieren den Winkel $\alpha = \measuredangle_p(\gamma, \gamma')$ durch

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2 \cdot t} \right) \leq 1$$

Wegen der Konvexität der Metrik §2.2 gilt für $0 < s < t < \varepsilon$, dass

$$0 \leq \frac{d(\gamma(s), \gamma'(s))}{2 \cdot s} \leq \frac{d(\gamma(t), \gamma'(t))}{2 \cdot t} \leq 1$$

also existiert der Grenzwert, und

α ist wohldefiniert.

Für $u, v \in X - \{p\}$ gibt es eindeutige Geodätische γ, γ' von p nach u und v. Wir setzen

$$\measuredangle_p(u,v) = \measuredangle_p(\gamma, \gamma')$$

Ist $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}$ ein Vergleichsdreieck in $\mathbb{R}^2$, setzen wir

$$\overline{\measuredangle}_p(u,v) = \measuredangle_{\bar{p}}(\bar{u}, \bar{v}).$$

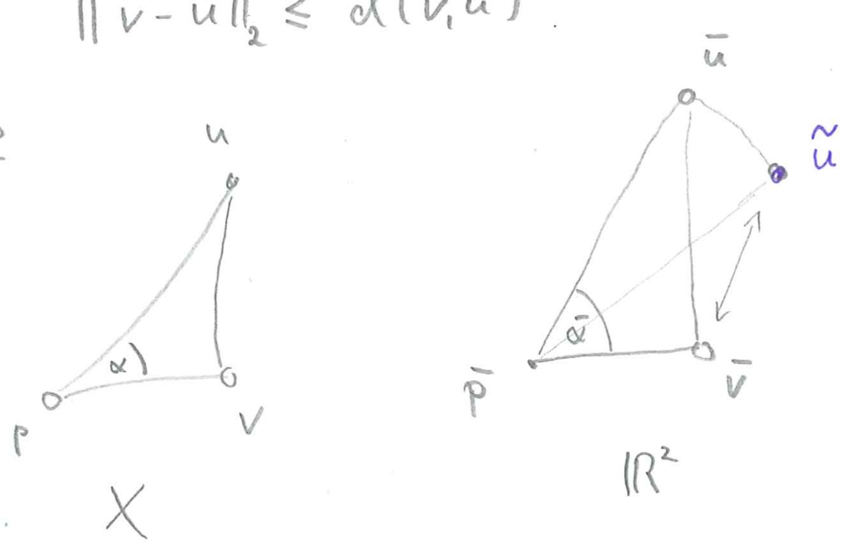
Wegen der Konvexität der Metrik §2.2 gilt stets

$$\measuredangle_p(u,v) \leq \overline{\measuredangle}_p(u,v)$$

<u>Lemma</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, $p \in X$. Sei $u, v \in X - \{p\}$. Dann gilt folgendes. Ist $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{R}^2$ ein Vergleichsdreieck und ist $\tilde{u} \in \mathbb{R}^2$ so gewählt, dass $d(u,p) = \|\tilde{u} - \bar{p}\|_2$ und $\measuredangle_{\bar{p}}(\bar{v}, \tilde{u}) = \measuredangle_p(v,u)$, so gilt

$$\|\bar{v} - \tilde{u}\|_2 \leq d(v,u).$$

<u>Beweis</u>

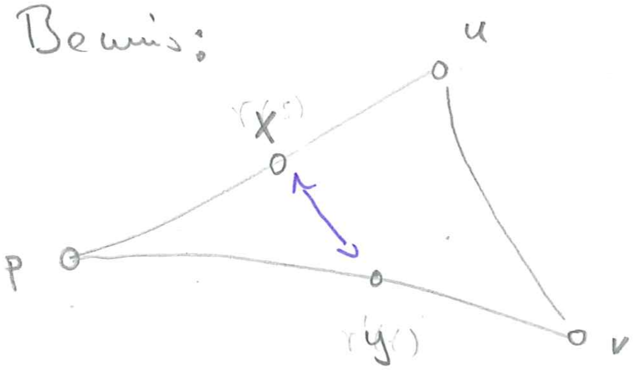


□

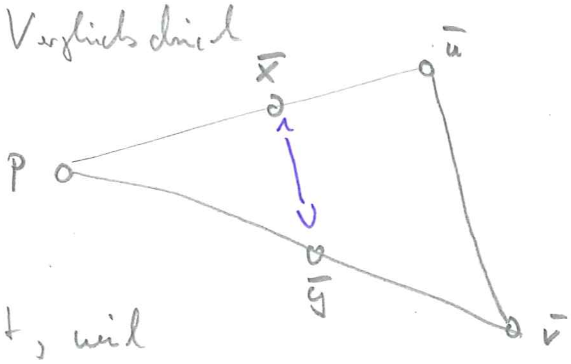
Lemma Ist X CAT(0)-Raum, $p \in X$, r, r' Geodätische die in p starten und in u, v enden. Dann gilt für $s, t > 0$

$$\sphericalangle_p(r, r') \leq \overline{\sphericalangle}_p(r(s), r'(t)) \leq \overline{\sphericalangle}_p(u, v)$$

Beweis: Setze $r(s) = x$, $r(t) = y$



Vergleichsdreieck



Die rechte Ungleichung folgt jetzt, weil $d(x, y) \leq \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$. Die linke Ungleichung hatten wir schon besprochen. $\square$

Korollar Mit den Bezeichnungen oben gilt

$$\sphericalangle_p(r, r') = \lim_{\substack{s \to 0 \\ t \to 0}} \overline{\sphericalangle}_p(r(s), r'(t))$$

$\square$

8. Satz Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $p \in X$.
Dann ist $\measuredangle_p$ eine Pseudometrik auf $X - \{p\}$,
d.h. es gilt für alle $u, v, w \neq p$

$$\measuredangle_p(u,v) = \measuredangle_p(v,u) \geq 0 = \measuredangle_p(u,u)$$

$$\measuredangle_p(u,w) \leq \measuredangle_p(u,v) + \measuredangle_p(v,w)$$

Bew: Nur die Dreiecksungleichung ist noch zu beweisen.
Seien r, r', r'' Geodätische von p nach u, v, w.
Wir nehmen an, es wäre

$$\measuredangle_p(r,r'') > \measuredangle_p(r,r') + \measuredangle_p(r',r'')$$

Es gibt dann ein $\varrho > 0$ mit

$$\measuredangle_p(r,r'') > \measuredangle_p(r,r') + \measuredangle_p(r',r'') + 3\varrho.$$

Es gibt ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $0 < s, t \leq \varepsilon$
gilt

$$\overline{\measuredangle}_p(r(s), r'(t)) < \measuredangle_p(r,r') + \varrho$$
$$\overline{\measuredangle}_p(r'(s), r''(t)) < \measuredangle_p(r',r'') + \varrho$$

In $\mathbb{R}^2$ betrachte $\bar{p}, x, x''$ mit $\|\bar{p} - x\|_2 = \varepsilon = \|\bar{p} - x''\|_2$

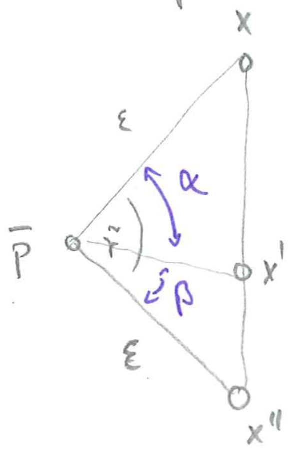
und $\measuredangle_{\bar{p}}(x, x'') = \tilde{\xi}$, wobei $\tilde{\xi} < \pi$ mit

$$\xi = \overline{\measuredangle}_p(r(\varepsilon), r''(\varepsilon)) > \tilde{\xi} > \measuredangle_p(r,r'') - \varrho$$

Wähle x' auf der Strecke von x nach x''
so, dass

$$\alpha = \overline{\measuredangle}_{\bar{p}}(x, x') > \measuredangle_p(r, r') + \varrho$$

$$\beta = \overline{\measuredangle}_{\bar{p}}(x', x'') > \measuredangle_p(r', r'') + \varrho$$



Sei $s = \|\bar{p} - x'\|_2$. Wir haben

dann $\overline{\measuredangle}_p(r(\varepsilon), r'(s)) < \measuredangle_p(r, r') + \varrho < \alpha$

also $d(r(\varepsilon), r'(s)) < \|x - x'\|_2$,

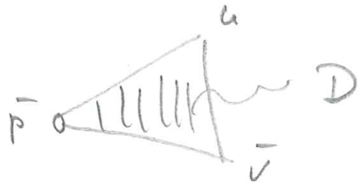
genauso $d(r'(s), r''(\varepsilon)) < \|x' - x''\|_2$

und insgesamt $d(r(\varepsilon), r''(\varepsilon)) < \underbrace{\|x - x''\|_2 + \|x' - x''\|_2}_{= \|x - x''\|_2}$

Andererseits ist $\overline{\measuredangle}_p(r(\varepsilon), r''(\varepsilon)) > \tilde{\xi}$, also

$d(r(\varepsilon), r''(\varepsilon)) > \|x - x''\|_2$ $\lightning$

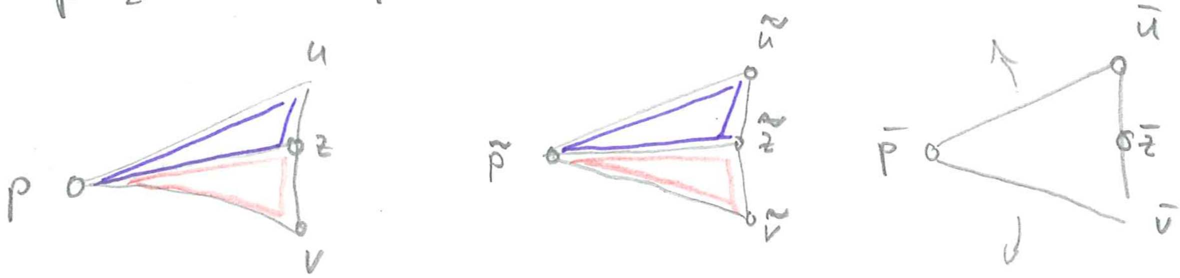
9. <u>Satz</u> (vom flachen Dreieck) Sei X ein CAT(0)-Raum, sei $p, u, v \in X$ mit $p \neq u, v$. Sei $\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}$ ein Vergleichsdreieck in $\mathbb{R}^2$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die konvexe Hülle von $\{\bar{p}, \bar{u}, \bar{v}\}$



Wenn gilt

$\sphericalangle_p(u,v) = \bar{\sphericalangle}_p(u,v)$, so gibt es eine isometr. Einbettung $D \xrightarrow{\varphi} X$ mit $\varphi(\bar{u}) = u$, $\varphi(\bar{v}) = v$, $\varphi(\bar{p}) = p$. #

<u>Beweis</u> Sei z ein Punkt auf der Geodätischen von u nach v. Betrachte Vergleichsdreiecke zu $p-z-u$ und $p-z-v$



sowie ein Vergleichsdreieck $\bar{p}, \bar{v}, \bar{u}$ zu p, v, u.

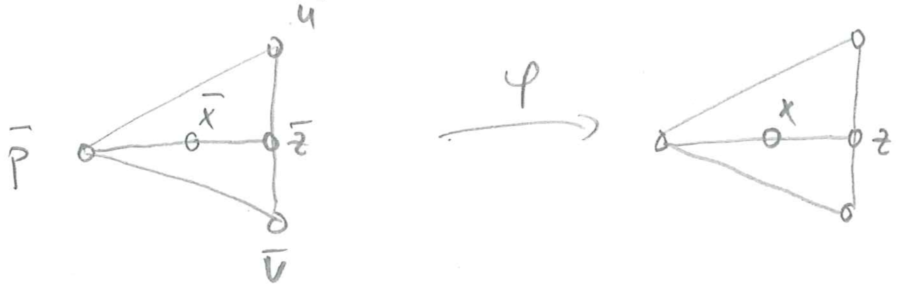
Es folgt $\bar{\sphericalangle}_p(u,z) + \bar{\sphericalangle}_p(z,v) \leq \bar{\sphericalangle}_p(u,v)$ und

$$\sphericalangle_p(u,v) \leq \sphericalangle_p(u,z) + \sphericalangle_p(z,v) \leq \bar{\sphericalangle}_p(u,z) + \bar{\sphericalangle}_p(z,v)$$
$$\leq \bar{\sphericalangle}_p(u,v) = \sphericalangle_p(u,v)$$

d.h. wir haben überall Gleichheit und damit sind die Dreiecke kongruent und $d(\bar{z}, \bar{p}) = d(z, p)$.

(rechts)

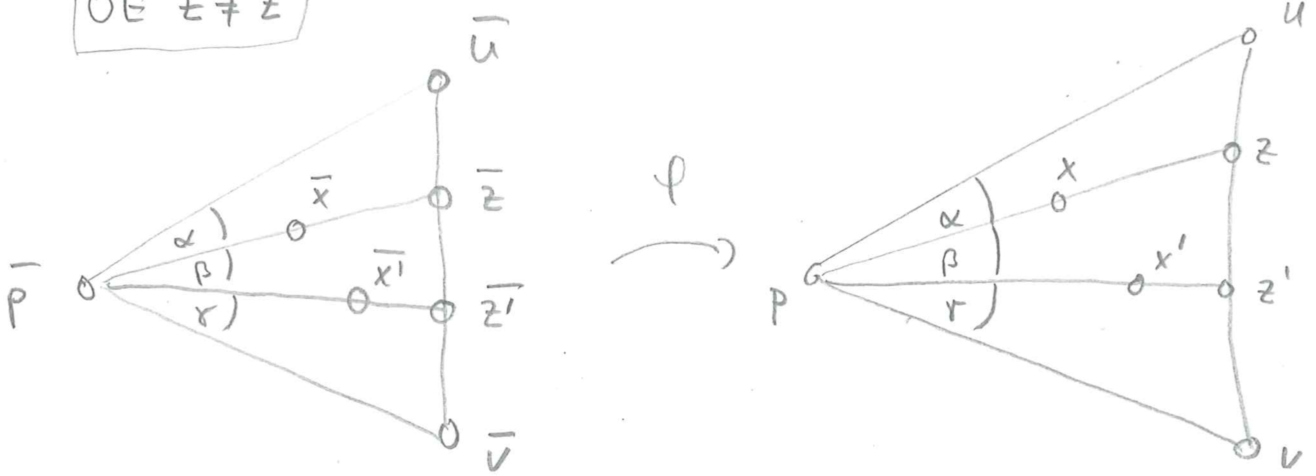
Wir definieren nun $D \to X$ längs der Strecke von $\bar{p}$ nach $\bar{z}$, wobei z die Geodätische von u nach v durchläuft.



$x = \varphi(\bar{x})$

Jetzt müssen wir nachrechnen, dass φ eine Isometrie ist.

$\boxed{\text{OE } z \neq z'}$



Die drei Winkel rechts und links sind gleich nach der vorigen Überlegung. Also haben wir im Bild links lauter Vergleichsdreiecke, und

$$d(x, x') \leq \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2$$

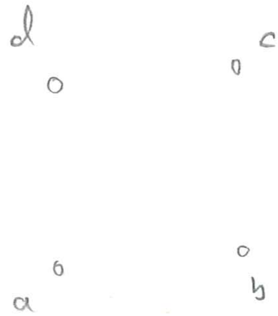
Wäre $d(x,x') < \|\bar{x} - \bar{x}'\|_2$, so wäre

$$\measuredangle_p(x, x') < \measuredangle_{\bar{p}}(\bar{x}, \bar{x}')$$, was nicht der Fall ist.

$\square$

<u>Zusatz</u> Die Abbildung φ ist <u>eindeutig</u> bestimmt durch die Voraussetzungen.

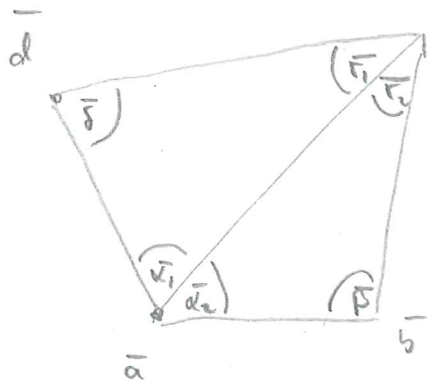
10. Satz (vom flachen Viereck) Sei X ein $CAT(0)$-Raum, seien $a, b, c, d \in X$ und sei



$$\alpha = \measuredangle_a(d,b) \qquad \gamma = \measuredangle_c(d,b)$$
$$\beta = \measuredangle_b(a,c) \qquad \delta = \measuredangle_d(a,c)$$

Wenn gilt $\alpha+\beta+\gamma+\delta \geq 2\cdot\pi$, so gilt $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$. Es gibt dann $\bar a, \bar b, \bar c, \bar d \in \mathbb{R}^2$ mit konvexer Hülle $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine isometr. Einbettung $\varphi: D \to X$ mit $\varphi(\bar a) = a$, $\varphi(\bar b) = b$, $\varphi(\bar c) = c$ und $\varphi(\bar d) = d$.

Beweis Wir beginnen mit 2 Vergleichsdreiecken $\bar a, \bar d, \bar c$ und $\bar a, \bar c, \bar b$. Für die entsprechenden Winkel gilt

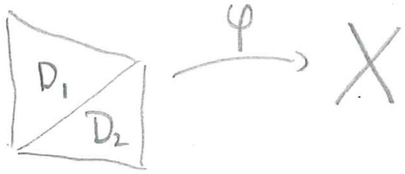


$$\bar\delta \geq \delta, \qquad \bar\beta \geq \beta$$
$$\bar\alpha_1 \geq \alpha_1 \qquad \bar\gamma_1 \geq \gamma_1$$
$$\bar\alpha_2 \geq \alpha_2 \qquad \bar\gamma_2 \geq \gamma_2$$
$$\Rightarrow \bar\alpha = \bar\alpha_1 + \bar\alpha_2 \geq \alpha$$
$$\bar\beta = \bar\beta_1 + \bar\beta_2 \geq \beta$$

Wegen $\bar\alpha + \bar\beta + \bar\gamma + \bar\delta = 2\pi$ haben wir überall Gleichheit der Winkel. Es folgt
$$\bar\alpha = \alpha \leq \pi$$
$$\bar\gamma = \gamma \leq \pi$$

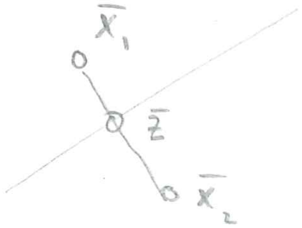
das Vergleichsviereck in $\mathbb{R}^2$ ist also konvex.

Nach Satz §3.9 können wir nun $\varphi : D \to X$ stückweise auf den beiden Dreiecksflächen D_1 und D_2 definieren. Weil $D_1 \cup D_2$ konvex ist, folgt für $\bar{x}_1 \in D_1$, $\bar{x}_2 \in D_2$,



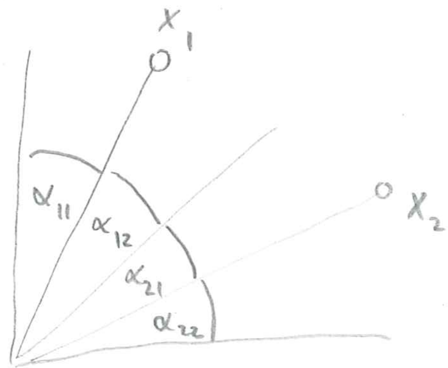
dass $d(\varphi(\bar{x}_1), \varphi(\bar{x}_2)) \leq \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$.

Sei $x_1 = \varphi(\bar{x}_1)$, $x_2 = \varphi(\bar{x}_2)$.



OE $x_1 \neq a \neq x_2$, sonst ist klar, dass $d(x_1, x_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$.

Betrachte $\measuredangle_a(x_1, x_2) = \xi$. Es gilt nun



$$\alpha \leq \alpha_{11} + \xi + \alpha_{22} \leq \alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{21} + \alpha_{22}$$

$$= \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$$

Also $\measuredangle_p(x_1, x_2) = \measuredangle_{\bar{p}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

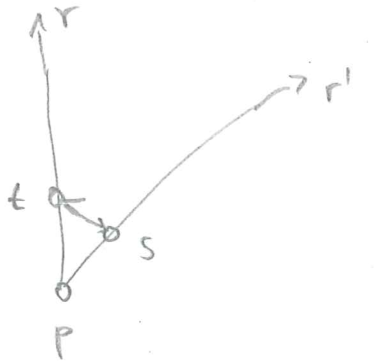
Ist $\xi = 0$, so folgt $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D_1 \cap D_2$ ⇝ ok.

Ist $\xi > 0$, so folgt $d(x_1, x_2) = \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$, sonst wäre nämlich $\measuredangle_p(x_1, x_2) < \measuredangle_{\bar{p}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$.

$\square$

<u>Zusatz</u> Die Abbildung φ ist durch die Annahmen <u>eindeutig</u> bestimmt.

Im nächsten Satz brauchen wir folgende kleine Beobachtung: ist $\measuredangle_p(\gamma,\gamma') < \pi/2$, so gibt es $s,t>0$ mit $d(\gamma(t),\gamma'(s)) < t$



(Betrachte $\overline{\measuredangle}_p(\gamma(t),\gamma'(s)) < \frac{\pi}{2}$ ÜA)

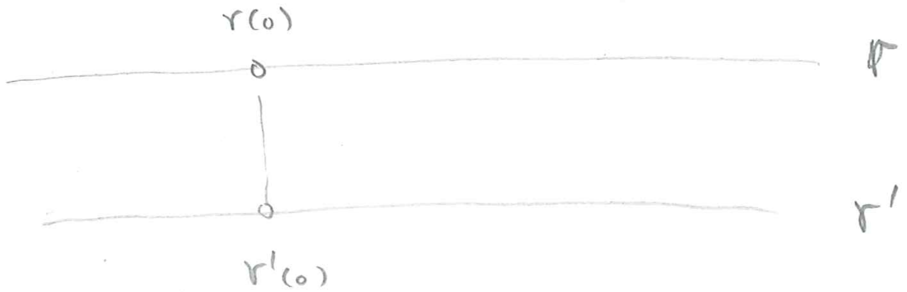
11. <u>Satz</u> <u>(vom flachen Streifen)</u> Sei X ein CAT(0)-Raum, $\gamma,\gamma': \mathbb{R} \rightrightarrows X$ seien parallel, $d(\gamma(t),\gamma'(t)) = \text{const.}$ Dann gibt es eine isometrische Einbettung

$$\varphi: [0,h]\times\mathbb{R} \to X \quad \text{mit} \quad \gamma(t) = \varphi(0,t)$$
$$\gamma'(t) = \varphi(h, t+c)$$

$c \in \mathbb{R}$ Konstante.

<u>Bew.</u> Sei $E = \gamma(\mathbb{R})$, $E' = \gamma'(\mathbb{R})$

OE $\text{proj}_{E'}(\gamma(0)) = \gamma'(0)$



Dann gilt $h = d(\gamma(0),\gamma'(0)) = d(\gamma(t),\gamma'(t))$ für alle $t\in\mathbb{R}$

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachte das Viereck

$$a = r(-n),\quad b = r(n),\quad c = r'(n),\quad d = r'(-n)$$

Nach der Vorbemerkung sind die Winkel in allen vier Ecken $\geq \frac{\pi}{2}$. Nach Satz §3.10 erhalten wir isometrische Einbettung

$$\varphi_n : h \times [-n,n] \longrightarrow X$$

$$\varphi_n(0,-n) = a \qquad \varphi_n(0,n) = b$$

$$\varphi_n(h,-n) = d \qquad \varphi_n(h,n) = c$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt

$$\varphi_{n+1}\big|_{h \times [-n,n]} = \varphi_n \quad , \text{setze } \varphi = \bigcup_{n \geq 1} \varphi_n$$

$\square$ #

12. <u>Theorem</u> Sei X ein CAT(0)-Raum und sei $E \subseteq X$ ein 1-Fläche. Sei

$$X(E) = \{ x \in X \mid x \text{ liegt in einer zu } E \text{ parallelen 1-Fläche} \}$$

Dann ist $X(E)$ konvexe Teilmenge von X und dieser CAT(0). Sei $p \in E$ und

$$Y = \{ x \in X(E) \mid \mathrm{proj}_E(x) = p \}.$$ Dann gilt

$$X(E) \underset{\uparrow \text{ isometrisch}}{\cong} \mathbb{R} \times Y \quad \text{mit euklid. Produktmetrik}$$

Beweis ① Sind E' und E'' parallel zu E, dann sind E' und E'' parallel (ÜA).

Aus §3.11 folgt nun, dass $X(E)$ konvex ist. Sei $\gamma : \mathbb{R} \to E$ eine Parametrisierung der 1-Fläche E. Für jede weitere 1-Fläche E' parallel zu E wählen wir die Parametrisierung $\gamma' : \mathbb{R} \to E'$ so, dass $\operatorname{proj}_E \gamma'(t) = \gamma(t)$ gilt.

② Beh Mit dieser Konvention gilt: wenn E', E'' parallel zu E sind, so ist $\operatorname{proj}_{E'} \gamma''(t) = \gamma'(t)$

Beweis der Beh Wäre das falsch, so hätten wir

$\operatorname{proj}_{E'} \gamma''(t) = \gamma'(t+c)$ für ein $c \neq 0$

$a_1 = d(\gamma(0), \gamma'(0))$ $\quad a_2 = d(\gamma(0), \gamma''(0))$ $\quad a_3 = d(\gamma'(c), \gamma''(0))$

$a = a_1 + a_2 + a_3 > 0$ $\quad x > 0$ beliebig

$$d(\gamma'(0), \gamma'(ax+c)) = |ax+c|$$
$$\leq d(\gamma'(0), \gamma(a_1 x)) + d(\gamma(a_1 x), \gamma''((a_1+a_2)x))$$
$$+ d(\gamma''((a_1+a_2)x), \gamma'((a_1+a_2+a_3)x + b))$$
$$\leq a_1\sqrt{1+x^2} + a_2\sqrt{1+x^2} + a_3\sqrt{1+x^2} = a\sqrt{1+x^2}$$
$$\rightsquigarrow (ax+c)^2 \leq a^2(1+x^2) \rightsquigarrow 2axc + c^2 \leq a^2 \quad \lightning$$

(3) Wieder mit §3.11 folgt nun, dass die Menge $Y = \{x \in X(E) \mid \mathrm{proj}_E(x) = \gamma(0)\}$ konvex ist. Für $v \in Y$ sei $\gamma_v : \mathbb{R} \to X(E)$ die parallele Geodätische, mit $\mathrm{proj}_E\, \gamma_v(t) = \gamma(t)$. Dann ist

$Y \times \mathbb{R} \to X(E)$, $(v,t) \longmapsto \gamma_v(t)$ eine Isometrie

(wieder wegen §3.11) $\square$

<u>Korollar</u> Ist X ein CAT(0)-Raum und ist $g \in \mathrm{Iso}(X)$ hyperbolisch mit $h = l_g > 0$, ist $E \subseteq X$ eine Achse, so ist $X(E) = \mu(g)$ die Vereinigung aller Achsen von g. Für jedes $v \in X(E)$ gilt $d(v, g(v)) = h$.

Bezüglich der Produktzerlegung $X(E) \cong Y \times \mathbb{R}$ operiert g also durch $g(v,t) = (v, t+h)$ $\square$

<u>Def</u> Eine Isometrie g eines metrischen Raums X heißt <u>Clifford-Translation</u>, wenn d_g konstant ist.

Ist also $g \neq \mathrm{id}_X$, so ist g dann hyperbolisch.

<u>Korollar</u> Ist X ein CAT(0)-Raum und $g \neq \mathrm{id}_X$ eine Clifford-Translation, so gilt

$$X \cong Y \times \mathbb{R}$$

und g operiert via $g(y,t) = (y, t+c)$

wobei $|c| = l_g$. $\square$

13. Bem Wir haben schon einige Male benutzt: sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so ist das (euklidische) Produkt (vgl. ÜA 5.2) $(X\times Y, d)$ metrisch mit $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d(y_1,y_2)^2}$

Lemma Ist $g\in \mathrm{Iso}(X\times Y)$ und gibt es für jedes $x\in X$ ein $x'\in X$ mit $g(\{x\}\times Y) = \{x'\}\times Y$, so gibt es $g_1\in \mathrm{Iso}(X)$ und $g_2\in \mathrm{Iso}(Y)$ mit

$$g(x,y) = (g_1(x), g_2(y))$$

Bew Betrachte die Projektionen $pr_X : X\times Y \to X$
$pr_Y : X\times Y \to Y$

Da g nach Vor. die Fasern von pr_X respektiert, erhalten wir über $\{g_1(x)\} = pr_X(g(\{x\}\times Y))$ eine Bijektion $g_1 : X\to X$. Es gilt für $x_1, x_2\in X$

$$d_X(x_1,x_2) = \inf\{ d(\{x_1\}\times Y, \{x_2\}\times Y)\}$$

also ist g_1 eine Isometrie von X. Wähle $v\in X$ und setze $g(v,y) = (g_1(v), g_2(y))$. Ist $w\in X$ und $g(w,y) = (g_1(w), \tilde g_2(y))$

$$\begin{aligned} d_X(v,w)^2 &= d((v,y),(w,y))^2 \\ &= d(g(v,y), g(w,y))^2 \\ &= d((g_1(v), g_2(y)), (g_1(v), \tilde g_2(y)))^2 \\ &= d(v,w)^2 + d(g_2(y), \tilde g_2(y))^2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g_2(y) = \tilde g_2(y)$

Wir haben also eine wohldefinierte Abbildung $g_2 : Y \to Y$ mit $g(x,y) = (g_1(x), g_2(y))$ d.h. $g(X \times \{y\}) = X \times \{g_2(y)\}$. Das Argument am Anfang zeigt, dass $g_2 : Y \to Y$ auch eine Isometrie ist. $\square$

Beachte: Im Allgemeinen gilt $\mathrm{Iso}(X \times Y) \supsetneq \mathrm{Iso}(X) \times \mathrm{Iso}(Y)$, z.B. für $X = Y = \mathbb{R}$!

14. Lemma Sei X ein CAT(0)-Raum und sei $h \in \mathrm{Iso}(X)$ hyperbolisch. Angenommen, $g \in \mathrm{Iso}(X)$ vertauscht mit h, d.h. $[g,h] = \mathrm{id}_X$. Dann gilt $g(\mu(h)) = \mu(h)$, und auf $\mu(h) \cong Y \times \mathbb{R}$ wirkt g als

$$g(y,s) = (g_1(y), s + c)$$

mit $g_1 \in \mathrm{Iso}(Y)$ und $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: Der erste Teil folgt aus §3.3. Sei E eine Achse von h und $v \in E$. Dann ist E die konvexe Hülle von $\{h^m(v) \mid m \in \mathbb{Z}\}$, also ist $g(E)$ die konvexe Hülle von

$\{g h^m(v) \mid m \in \mathbb{Z}\} = \{h^m g(v) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ und damit auch eine Achse. Aus §3.13 folgt die Behauptung. #

<u>Korollar</u> Ist X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $h \in \mathrm{Iso}(X)$, so sind äquivalent:

① h ist hyperbolisch

② h^m ist hyperbolisch für ein $m \in \mathbb{Z}$.

③ h^m ist hyperbolisch für alle $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$

<u>Bew:</u> ① ⇔ ③ nach § 3.6 und ① ⇒ ②.

Angenommen, ② gilt. Da h^m mit h vertauscht, gilt auf $\mu(h^m) \cong Y \times \mathbb{R}$, dass $h(y, s) = (h_1(y), s+c)$, $c \neq 0$! mit $h_1 \in \mathrm{Iso}(Y)$, und $h_1^m = id_Y$. Nach dem FPS § 2.8 gibt es $y \in Y$ mit $h_1(y) = y$, also hat h eine Achse. □

<u>Korollar</u> Ist X ein vollständiger CAT(0)-Raum, $g \in \mathrm{Iso}(X)$, so sind äquivalent:

① g ist halbeinfach

② g ist halbeinfach für ein $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$

③ g ist halbeinfach für alle $m \in \mathbb{Z}$.

<u>Bew:</u> Folgt aus § 3.5 und dem vorigen Korollar. □

"Wurzeln und Potenzen halbeinfacher Isometrien sind halbeinfach."