Lemma Sind X, Y metrische Räume und $g_1 \in \mathrm{Iso}(X)$, $g_2 \in \mathrm{Iso}(Y)$, so gilt:
$g_1 \times g_2 \in \mathrm{Iso}(X \times Y)$ ist halbeinfach $\Leftrightarrow$ g_1 und g_2 halbeinfach, und $\mu(g) = \mu(g_1) \times \mu(g_2)$.

Beweis $d_{g_1 \times g_2}(x,y)^2 = d_{g_1}(x)^2 + d_{g_2}(y)^2$ $\square$

15. **Erinnerung** Ist A eine abelsche Gruppe, so bilden die Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe $T(A)$, die Torsionsgruppe. Ist A endlich erzeugt, so gilt

$$A \cong \mathbb{Z}^m \oplus T(A)$$

Die Zahl m nennt man den $\mathbb{Q}$-Rang $rk_{\mathbb{Q}}(A) = m$, (das ist wohldefiniert!) Die Torsionsgruppe $T(A)$ ist dann eine direkte Summe endlicher zyklischer Gruppen. Vgl. Jacobson, Basic Algebra I §3.13.

Ist A endlich erzeugt, so ist auch jede Untergruppe $B \leq A$ endlich erzeugt, mit $rk_{\mathbb{Q}}(B) \leq rk_{\mathbb{Q}}(A)$ und $rk_{\mathbb{Q}}(A/B) \leq rk_{\mathbb{Q}}(A)$. $\boxed{\text{ÜA}}$

16. <u>Theorem</u> Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und sei $A \to \mathrm{Iso}(X)$ eine halbeinfache isometr. Wirkung. Dann gilt Folgendes

(i) $\emptyset \neq \mu(A) = \bigcap_{a \in A} \mu(a) \cong Y \times \mathbb{R}^m$. Es gibt einen Homomorphismus $\tau : A \to (\mathbb{R}^m, +)$ so, dass für alle $a \in A$, $(v,w) \in Y \times \mathbb{R}^m$ gilt

$$a(v,w) = (v, \tau(a) + w)$$

Weiter gibt es eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^m = \bigcup_{a \in A} (\tau(a) + K)$

(die A-Wirkung auf $\mathbb{R}^m$ ist <u>kokompakt</u>)

(ii) Die m-Flachs $\{v\} \times \mathbb{R}^m$ sind genau die konvexe Hülle der A-Bahn in $\mu(A)$.

(iii) Es gilt $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A) \geq m$

(iv) Ist $g \in \mathrm{Iso}(X)$ und normalisiert g die Gruppe A ($gA = Ag$), so operiert g auf $Y \times \mathbb{R}^m$ als

$$g(v,w) = (g_1(v), g_2(w))$$

Falls g die Gruppe A zentralisiert ($ag = ga$ für alle $a \in A$), so ist g_2 eine Translation.

Beweis. ① Sind $a, b \in A$ elliptisch, so ist auch ab elliptisch. Denn $\mu(a) \cap \mu(b) \neq \emptyset$ nach §3.4 und ab fixiert diese Menge. Die elliptischen Elemente bilden also eine Untergruppe $B \subseteq A$. Sei $\beta_1, \dots, \beta_s$ ein EZS für B (beachte: B ist endlich erzeugt!). Mit Induktion ist $\mu(\beta_1) \cap \dots \cap \mu(\beta_j)$ invariant unter β_{j+1}, also $\mu(\beta_1) \cap \dots \cap \mu(\beta_{j+1}) \neq \emptyset$. Es folgt $\mu(\beta_1) \cap \dots \cap \mu(\beta_m) \neq \emptyset$, folglich hat B einen Fixpunkt und damit $\mu(B) = \bigcap_{b \in B} \mu(b) \neq \emptyset$.

② Ersetze X durch $\tilde{X} = \mu(B)$ und A durch $\tilde{A} = A/B$ ($rk_{\mathbb{Q}}(\tilde{A}) \leq rk_{\mathbb{Q}}(A)$!)

Dann sind alle $a \in \tilde{A} - \{1\}$ hyperbolisch. Insbesondere hat $\tilde{A}$ keine Torsion,

$$\tilde{A} \cong \mathbb{Z}^l \qquad l \geq 0.$$

Für $l = 0$ gelten offensichtlich (i) – (iv).

Sei jetzt $l \geq 1$ und seien $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für $\breve{A} \cong \mathbb{Z}^l$. Wir machen nun Induktion nach l. Wir haben $\mu(\alpha_1) = Y_1 \times \mathbb{R}$ nach § 3.12 und $\mu(\alpha_1^m) = Y_1 \times \mathbb{R}$ für alle $m \neq 0$. Nach § 3.14 gelten für $\boxed{l = 1}$ wieder (i) – (iv).

Sei jetzt $l \geq 2$ und $H = \langle \alpha_2, \dots, \alpha_l \rangle \cong \mathbb{Z}^{l-1}$.

Dann operiert H auf $Y_1 \times \mathbb{R}$, mit

$$h(v,w) = (h_1(v), h_2 + w) \qquad \begin{array}{l} h \in H \\ v \in Y_1 \\ w \in \mathbb{R} \\ h_2 \in \mathbb{R} \end{array}$$

Nach Induktionsannahme gilt für die H-Wirkung auf Y_1, dass $Y_1 \supseteq \mu(H|_{Y_1}) \neq \emptyset$, und

$$\mu(H|_{Y_1}) \cong \underbrace{Y \times \mathbb{R}^{m'}}_{\subseteq Y_1} \quad \text{mit (i), (ii), (iii)}$$

Damit hat die Wirkung von $\breve{A} = \langle \alpha_1 \rangle \oplus H$ auf $Y \times \mathbb{R}^{m'} \times \mathbb{R}$ auch die Eigenschaft (i), (ii), (iii).

Auch (iv) folgt nun mit § 3.13 und ÜA 9.3.

$\square$

<u>Korollar</u> Sei A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, X ein vollständiger CAT(0)-Raum und $A \to \mathrm{Iso}(X)$ eine isometrische Wirkung. Wenn A ein EZS aus elliptischen Elementen hat, so hat A einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u> Der Anfang des Beweises des Theorems zeigt, dass A aus elliptischen Elementen besteht. Also ist die Wirkung halbeinfach, und $\mu(A) \neq \emptyset$. $\square$

Im vorigen Satz hatten wir $\mathrm{rk}_{\mathbb{Q}}(A) \geq m$ erhalten. Das kann man mit weiteren Annahmen verbessern:

Eine isometrische Wirkung $G \to \mathrm{Iso}(X)$ heißt (metrisch) <u>eigentlich</u>, wenn es zu jedem $p \in X$ ein $r > 0$ gibt, so dass die Menge

$$\{ g \in G \mid B_r(p) \cap B_r(g(p)) \neq \emptyset \}$$

endlich ist. Es gilt nun: ist $H \leq (\mathbb{R}^m, +)$ endlich erzeugt und operiert H eigentlich auf $\mathbb{R}^m$ (als Translationsgruppe), so ist $H \cong \mathbb{Z}^l$ mit $l \leq m$. (ÜA)

<u>Korollar</u> Ist A endlich erzeugte torsionsfreie abelsche Gruppe, $A \cong \mathbb{Z}^\ell$, ist X ein vollständiger CAT(0)-Raum und ist $A \to \mathrm{Iso}(X)$ eigentlich und halbeinfach, so gilt

$$\mu(A) \cong Y \times \mathbb{R}^\ell$$

und A operiert durch $a(v,w) = (v, \tau(a)+w)$ für $\tau : A \to (\mathbb{R}^\ell, +)$. Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ eine $\mathbb{Z}$-Basis für $A \cong \mathbb{Z}^\ell$, so ist $\tau(\alpha_1), \dots, \tau(\alpha_\ell)$ ein $\mathbb{R}$-Basis für $\mathbb{R}^\ell$.
Vgl. Bridson–Häefliger II.7.1
"Flat Torus Theorem". $\boxed{\text{ÜA}}$ □

17. <u>Nilpotente Gruppen</u>

<u>Erinnerung</u> Sind $H, K \leq G$ Untergruppen, so ist

$$[H,K] = \langle [h,k] \mid h \in H, k \in K \rangle$$

die von den Kommutatoren <u>erzeugte</u> Untergruppe.

Man setzt speziell $DG = [G,G]$ (<u>Kommutatorgruppe</u> von G). Ist $G \xrightarrow{\varphi} A$ ein Homomorphismus in eine abelsche Gruppe, so faktorisiert φ durch

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & A \\ & G/DG \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

und $G_{ab} := G/DG$ ist abelsch. Man setzt $D^0 G = G$ und $D^{k+1} G = D(D^k G)$ für $k \geq 0$.

Man nennt G <u>auflösbar</u>, wenn $D^k G = \{1\}$ für ein $k \geq 0$ gilt.

Weiter sei $C_0 G = G$ und $C_{k+1} G = [G, C_k G] \trianglelefteq G$.

$C_1 G = DG$, allgemein $D^k G \subseteq C_k G$.

Man nennt G <u>nilpotent</u>, wenn $C_k G = \{1\}$ für ein $k \geq 0$ gilt. Der <u>Nilpotenzgrad</u> von G ist $d = \{\min k \mid C_k G = \{1\}\}$. <u>Klar:</u>

- G ist abelsch $\Leftrightarrow d \leq 1 \Leftrightarrow DG = \{1\}$
- Untergruppen und Quotienten von nilpotenten / auflösbaren Gruppen sind nilpotent / auflösbar
- abelsch $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ nilpotent $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ auflösbar.

#

Wenn G Nilpotenzgrad $d \geq 1$ hat, so ist $\{1\} \neq C_{d-1} G \subseteq Cen(G)$; nichttriviale nilpotente Gruppen haben ein nichttriviales Zentrum.

Satz Ist G endlich erzeugte nilpotente Gruppe, so ist jede Untergruppe $H \leq G$ endlich erzeugt (und nilpotent) $\rightarrow$ Satz von Baer, vgl. L.K. Gruppentheorie SS 2011 § 3.22. $\square$

18. **Theorem** Sei N eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum und sei $N \to \mathrm{Iso}(X)$ eine halbeinfache isometrische Wirkg. Dann gibt es ein m-Flach $E \subseteq X$, $m \geq 0$, das N-invariant ist und auf dem N als eine Gruppe von Translation operiert, via $\tau: N \to (\mathbb{R}^m, +)$.

Beweis Induktion nach dem Nilpotenzgrad d von N. Ist $d \leq 1$, so ist N abelsch und die Beh. folgt aus § 3.16. Sei jetzt $d \geq 2$ und sei $A = \mathrm{Cen}(N) \neq \{1\}$. Für die A-Wirkg auf X wissen wir nach § 3.16, dass

$$\mu(A) \cong Y \times \mathbb{R}^k$$

wobei A trivial auf Y operiert und als Translationsgruppe auf $\mathbb{R}^k$. Da N die Gruppe A zentralisiert, operiert N auf $\mu(A)$

durch $n(v,w) = (n_1(v), w + \varrho(n))$

$\varrho : N \to (\mathbb{R}^k, +)$ Homomorphismus.

Da A auf Y trivial operiert, operiert dort die Gruppe N/A, deren Nilpotenzgrad kleiner als d ist. Folglich gibt es in Y ein N-invariantes l-Flach $E' \subseteq Y$, $E' \cong \mathbb{R}^l$, auf den N durch Translation operiert. Insgesamt operiert N auf $E' \times \mathbb{R}^k \subseteq X$ durch Translationen. $\square$

<u>Korollar</u> Sei N eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe, X ein vollständiger CAT(0)-Raum und sei $N \to \mathrm{Iso}(X)$ eine halbeinfache Wirkung. Dann gilt folgendes.

(i) Ist $g \in \mathrm{Iso}(X)$, $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$ und gilt $g^m \in [N,N] = DN$, so ist g elliptisch.

(ii) Hat N ein EZS aus elliptischen Elementen, so hat N einen Fixpunkt.

Beweis Sei $E \subseteq X$ ein n-invariante k-Fläche, auf der N durch Translation operiert,
$N \xrightarrow{I} (\mathbb{R}^k, +)$.

Dann operiert $[N, N]$ trivial auf E. Folglich ist g^m elliptisch, nach § 3.5 ist auch g elliptisch.
Wenn $g \in N$ elliptisch ist, $g(p) = p$, so fixiert g auch $\mathrm{proj}_E(p) \in E$, wirkt also elliptisch auf E.
Eine elliptische Translation auf E ist aber trivial. $\square$

19. Die Gruppe der (strikten) oberen Dreiecksmatrizen.

Sei R ein kommutativer Ring, sei $n \geq 2$ und $1 \leq l$

Sei $S(n,l,R) = \left\{ a \in R^{n\times n} \;\middle|\; \begin{array}{l} a(e_j) = 0 \quad j = 1, \dots, l \\ a(e_{j+l}) \in \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_j\} \end{array} \right\}$

$$= \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & * \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}}^{l} \Big\}{\scriptstyle l} \in R^{n\times n} \right\}$$

Für $a \in S(n,l,R)$ und $b \in S(n,m,R)$ gilt

$$ab \in S(n, l+m, R) \rightsquigarrow a^n = 0.$$

Sei $U(n,l,R) = \{ 1 + a \mid a \in S(n,l,R) \}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{0 \cdots 0}^{l-1} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \Big\}{\scriptstyle l-1} \in R^{n\times n} \right\}$$

Lemma $U(n,l,R)$ ist eine Gruppe.

Beweis Sei $b, a \in S(n,l,R)$

$$(1+a)(1+b) = (1+a+b+ab)$$

$$(1+a)\sum_{k=0}^{\infty}(-a)^k = (1+a)\sum_{k=0}^{n}(-a)^k = \mathbb{1}.$$ $\square$

Lemma $U(n,1,R)$ ist nilpotent mit Nilpotenzklasse $d \leq n-1$.

Beweis Sei $a \in S(n,1,R)$, $b \in S(n,l,R)$

$$[\mathbb{1}+a, \mathbb{1}+b] = (1+a)(1+b)\sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i \sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j$$

$$= \Big(\underbrace{(1+a)\sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i}_{=1} + b\sum_{i=0}^{\infty}(-a)^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j\Big)$$

$$= \Big((1+b) + \sum_{i=1}^{\infty} b(-a)^i\Big)\sum_{j=0}^{\infty}(-b)^j$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} b(-a)^i(-b)^j \in U(n,l+1,R)$$

d.h. $[U(n,1,R), U(n,l,R)] \subseteq U(n,l+1,R)$

Es folgt $C_{l+1}U(n,1,R) \subseteq U(n,l,R)$ $\square$

Beachte auch: $U(n,l,R)/_{U(n,l+1,R)} \cong (R,+)^{n-l}$

Ist also $(R,+)$ endlich erzeugt (z.B. $R=\mathbb{Z}$) so ist auch $U(n,l,R)$ endlich erzeugt.

20. <u>Die spezielle lineare Gruppe</u> Wir nehmen weiter an, dass R ein kommutativer Ring ist. Dann haben wir die Gruppen

$$GL_n(R) = \{ g \in R^{n\times n} \mid \det(g) \in R^* \}$$

$$SL_n(R) = \{ g \in R^{n\times n} \mid \det(g) = 1 \}$$

$$1 \longrightarrow SL_n(R) \longrightarrow GL_n R \xrightarrow{\det} (R^*,\cdot) \longrightarrow 1$$

$$GL_n(R) = SL_n R \rtimes \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} a & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix} \middle| a \in R^* \right\}}_{\cong (R^*,\cdot)}$$

Sei $i \neq j$, $r \in R$. Sei $T_{ij}(r)$ die lineare Abbildung

$$T_{ij}(e_k) = \begin{cases} e_k & j \neq k \\ e_k + e_i \cdot r & j = k \end{cases}$$

$$T_{ij}(r) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & r \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} - i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{r} | \\ j \end{array} \end{array}$$

(Für $i=j$ wird <u>keine</u> Abbildung definiert!)

Die $\tau_{ij}(r)$ heißen <u>Elementarmatrizen</u>. Es gelten folgende Rechenregeln (die <u>Steinbergrelationen</u>)

(ST1) $\tau_{ij}(r)\,\tau_{ij}(s) = \tau_{ij}(r+s)$

d.h. $\tau_{ij} : R \to SL_n R$ ist injektiver Homomorphismus

(ST2) $[\tau_{ij}(r), \tau_{k,l}(s)] = 1$ wenn $j \neq k$, und $i \neq l$

(ST3) $[\tau_{ij}(r), \tau_{jk}(s)] = \tau_{ik}(rs)$ wenn $i \neq k$.

Die von den $\tau_{ij}(r)$ erzeugte Gruppe ist

$$E_n(R) = \langle \tau_{ij}(r) \mid i \neq j,\ r \in R \rangle \subseteq SL_n(R)$$

Beachte auch: $U(n,1,\mathbb{Z}) = \langle \tau_{ij}(1) \mid i<j \rangle$.

<u>Satz</u> Wenn R ein euklidischer Ring ist (z.B. $R = \mathbb{Z}$, oder R ein Körper), so gilt

$$E_n(R) = SL_n(R)$$

<u>Beweis</u> Sei $\delta : R \to \mathbb{Z}$ die Gradfunktion. Sei $g = (g_{ij}) \in GL_n R$.

(1) In der ersten Spalte der Matrix, finde den Eintrag $g_{i1} \neq 0$ mit minimalem Grad. Wenn g_{i1} eine Einheit in R ist, können wir durch Addition von Vielfachen der i-ten Zeile alle anderen

Einträge der 1ten Spalte zu 0 machen.

Wenn $g_{i1} \neq 0$ keine Einheit ist, so gibt es ein j mit $g_{j1} \notin R g_{i1}$, sonst wären die Einträge der erst. Spalte in einem echten Ideal.

Schritt $g_{j1} = g_{i1} \cdot q + r \qquad \delta(r) < \delta(g_{i1})$ und $r \neq 0$. Also können wir den Grad des Eintrags an der j-ten Stelle echt verringern, bis dort eine Einheit steht.

Durch Multiplikation mit $\tau_{1i}(1)\tau_{i1}(-1)\tau_{1i}(1)$
$$= \begin{pmatrix} 0 & & 1 & \\ & \ddots & & \\ -1 & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$
erhalten wir eine Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} a_1 & * & * \\ 0 & & \\ \vdots & \boxed{\quad X \quad} & \\ 0 & & \end{pmatrix} \quad \text{und schließlich} \quad \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$
alle $a_j \in R^*$ Einheiten. Damit erhalten wir
$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$
Wegen
$$\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ -a^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
erhalten wir dann eine Matrix der Form
$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \quad a \in R^*, \quad a = \det(g).$$

□

<u>Bemerkung</u> An (ST3) sieht man sofort: für $n \geq 3$ ist die Gruppe $E_n(R)$ <u>perfekt</u>, d.h. $[E_n(R), E_n(R)] = E_n(R)$ (insbesondere ist diese Gruppe dann <u>nicht</u> auflösbar oder nilpotent...).

Ein kommutativer Ring R ist <u>endlich erzeugt</u> (als Ring), wenn es $\{r_1, \dots, r_s\} \subseteq R$ gibt, so dass jedes $r \in R$ eine ganzzahlige Linearkombination von Produkten der r_j ist. Anders gesagt: zu jedem $r \in R$ gibt es $f \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_s]$ mit
$r = f(r_1, \dots, r_s)$.

21. <u>Satz</u> Wenn $n \geq 3$ ist und R ein endlich erzeugter kommutativer Ring ist, so ist die Gruppe $E_n(R)$ endlich erzeugt.

<u>Beweis</u> Sei $H = \langle \tau_{ij}(r_k) \mid i \neq j, k = 0, \dots s \rangle$ wobei $\{r_0 = 1, r_1, \dots, r_s\} \subseteq R$ ein EZS ist. Mit (ST3) folgt, dass $\tau_{ij}(r) \in H$ gilt für alle $r \in R$, $i \neq j$. $\square$

<u>Korollar</u> Sei $\{r_0 = 1, r_1, \dots, r_s\} \subseteq R$ ein EZS für R, sei $n \geq 3$. Dann erzeugen die $n \cdot (1+s)$ Matrizen

$\{ \tau_{1,2}(r_k), \tau_{2,3}(r_k), \dots, \tau_{n-1,n}(r_k), \tau_{n,1}(r_k) \mid k=0\dots s \}$
die Gruppe $E_n(R)$.

Beweis Mit (ST3) sieht man, dass die Matrizen
$\{ \tau_{1,2}(r_k), \dots, \tau_{n-1,n}(r_k) \}$ die Gruppe $U(n,1,R)$
erzeugen. Insbesondere erhalten wir die Matrix
$\tau_{1,n}(1)$. Nun gilt

$$\tau_{1,n}(1)\,\tau_{n,1}(-1)\,\tau_{1,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: \sigma$$

und $\sigma \tau_{1,n-1}(r) \sigma^{-1} = \tau_{n,n-1}(-r)$. Auf
diese Weise erhalten wir die $(n-1)$ Matrizen
$\tau_{2,1}(r_k), \dots, \tau_{n,n-1}(r_k)$ und damit alle $\tau_{ij}(r_k)$,
$i \neq j$, $k = 0, \dots, s$. $\square$

Korollar Ist R von $\{r_0 = 1, r_1, \dots, r_s\}$ erzeugt,
$n \geq 3$ und ist

$$H_i = \langle \tau_{i,i+1}(r_k) \mid k=0,\dots,s \rangle \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$H_n = \langle \tau_{n,1}(r_k) \mid k=0,\dots,s \rangle$$

so gilt Folgendes:

(1) $E_n(R) = \langle H_1 \cup \dots \cup H_n \rangle$

(2) Ist $a \subsetneq \{1,\dots,n\}$ und $H_a = \langle H_i \mid i \in a \rangle$,
so ist H_a nilpotent (und endlich erzeugt).

22. <u>Lemma</u> Sei R ein kommutativer Ring, X ein vollständiger CAT(0)-Raum, $n \geq 3$. und sei $E_n(R) \to \mathrm{Iso}(X)$ eine halbeinfache Wirkung. Dann ist jedes $\tau_{ij}(r)$ elliptisch.

<u>Beweis</u> Es genügt, den Fall $(i,j) = (1,3)$ zu betrachten. Die Gruppe

$$\langle \tau_{1,2}(1), \tau_{2,3}(r) \rangle = N \text{ ist nilpotent,}$$

weil in $U(n,1,R)$ enthalten, endlich erzeugt und $\tau_{1,3}(r) = [\tau_{1,2}(1), \tau_{2,3}(r)]$ ist ein Kommutator.

Die Beh. folgt nun mit § 3.18. $\square$

<u>Beispiele</u> (1) $R = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{Q}_p$. Dann operiert $SL_n(R) = E_n(R)$ halbeinfach auf dem Bruhat-Tits-Gebäude X dieser Gruppe, einem simplizialen vollständigen $(n-1)$-dimensionalen CAT(0)-Raum. Die Wirkung ist transitiv auf den $(n-1)$-dimensionalen Simplizes, insbesondere ist sie fixpunktfrei. Dagegen haben die Untergruppen $SL_n(\mathbb{Z}) \leq SL_n(\mathbb{Z}_p)$ einen globalen

ganze p-adische Zahlen

Fixpunkt.

(2) Die Gruppe $SL_n(\mathbb{R})$ operiert auf dem Riemannschen symmetrischen Raum $X = SL_n(\mathbb{R})/SO(n)$ isometrisch und X ist ein vollständiger CAT(0)-Raum der Dimension $\frac{n(n+1)}{2} - 1$. Diese Wirkung ist <u>nicht</u> halbeinfach und <u>kein</u> $E_{ij}(r)$, $r \neq 0$, hat einen Fixpunkt in X.

(3) $R = \mathbb{F}_q[t, t^{-1}]$ Ring der Laurent-Polynome über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ mit $q = p^\nu$ Elementen. Dieser Ring ist endlich erzeugt. Die Gruppe $SL_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])$ operiert auf dem Bruhat-Tits-Gebäude von $SL_n(\mathbb{F}_q(t))$, einem simplizialen vollständigen $(n-1)$-dimensionalen CAT(0)-Raum. Die Wirkung der endlich erzeugten Gruppe $E_n(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])$ ist transitiv auf den maximalen Simplizes, hat also keine Fixpunkte. Die Wirkung ist aber halbeinfach.

#

23. <u>Theorem</u> (B. Farb 2008) Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe und $G \to \mathrm{Iso}(X)$ eine isometrische Wirkung. Seien $G_0, \ldots, G_m \subseteq G$ Untergruppen mit

$$G = \langle G_0 \cup \ldots \cup G_m \rangle.$$

Für $a \subseteq \{0, \ldots, m\}$ sei $G_a = \langle G_j \mid j \in a \rangle$ und $C_a = X^{G_a} = \bigcap_{j \in a} X^{G_j}$. Angenommen, die beiden folgenden Bedingungen sind erfüllt.

(a) $C_a \neq \emptyset$ für alle $a \subsetneq \{0, \ldots, m\}$

(b) $\tilde{H}_{m-1}(U) = 0$ (bzw $\tilde{H}_{m-1}(K) = 0$) für alle offenen $U \subseteq X$ (bzw alle kompakten $K \subseteq X$).

Dann hat G einen Fixpunkt in X,

$$X^G \neq \emptyset.$$

<u>Bew:</u> Die C_a sind konvex und abgeschlossen, also kontrahierbar. Wir wenden §1.24. an.

Angenommen, $X^G = \bigcap \{C_a \mid a \subsetneq \{0, \ldots, m\}\} = \emptyset$.

Nach §1.24 und §1.9 (Tietze) gibt

$K \subseteq U \subseteq X$ und stetige Abbildung

$$\begin{tikzcd} S^{m-1} \arrow[r, "\alpha"] & K \subseteq U \subseteq X \arrow[d, "\Phi"] \\ & S^{m-1} \end{tikzcd}$$

mit $\Phi \circ \alpha \simeq \mathrm{id}_{S^{m-1}}$. Nun gilt $\tilde{H}_{m-1}(S^{m-1}) \cong \mathbb{Z}$.

Das steht im Widerspruch zu

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_{m-1}(S^{m-1}) \arrow[r, "\alpha_*"] \arrow[drr, equal] & \tilde{H}_{m-1}(K) \arrow[r] & \tilde{H}_{m-1}(U) \arrow[d, "\Phi_*"] \\ & & H_{m-1}(S^{m-1}) \end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Bemerkung</u> Ist $\dim(X) = l$, X CAT(0), so gilt $\tilde{H}_k(U) = 0$ für alle $k \geq l$, $U \subseteq X$ offen (B. Kleiner 1997). Für $k > l$ wissen wir das aus §1 ganz allgemein, der Fall $k = l$ erfordert etwas Topologie.

<u>Korollar</u> (B. Farb) Ist X vollständiger CAT(0)-Raum, R ein endlich erzeugter Ring, $n \geq 3$ und gilt $\dim(X) \leq n-2$, so hat jede halbeinfache $E_n(R)$-Wirkung auf X einen Fixpunkt.

Für $R = \mathbb{Z}$ gilt eine viel stärkere Aussage.

24. <u>Theorem</u> (M. Bridson ~ 2012) Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $n \geq 3$. Angenommen, $SL_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Iso}(X)$ ist eine isometrische Wirkung. Falls ein $\tau_{ij}(z)$ für ein $z \in \mathbb{Z} - \{0\}$ einen Fixpunkt hat, so hat $SL_n(\mathbb{Z})$ einen Fixpunkt.

<u>Bew.</u> Angenommen, $\tau_{ij}(z) = \tau_{ij}(1)^z$ ist elliptisch. Dann ist auch $\tau_{ij}(1)$ elliptisch nach §3.5. Ist $k = l$, so ist $\tau_{kl}(1)$ in $SL_n(\mathbb{Z})$ konjugiert zu $\tau_{ij}(1)$. Also sind <u>alle</u> $\tau_{kl}(t)$ elliptisch, für alle $k \neq l$, $t \in \mathbb{Z}$.

Jedes $g \in SL_n(\mathbb{Z})$ läßt sich nun schreiben als

$$g = g_N^{t_N} \cdot g_{N-1}^{t_{N-1}} \cdot \ldots \cdot g_1^{t_1} \qquad t_j \in \mathbb{Z}$$

wobei $g_1, \ldots, g_N$ feste (von g unabhängige) Elementarmatrizen sind. Sei $C_j = \mu(g_j)$ die Fixpunktmenge. Wir wählen $x \in X$ und setzen

$$d_j = d(x, C_j) = d(x, \mathrm{proj}_{C_j}(x)) \qquad j = 1, \ldots N.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} d(x, g_j^{t_j}(x)) &\leq d(x, C_j) + d(C_j, g_j^{t_j}(x)) \\ &= d(x, C_j) + d(C_j, x) = 2d_j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(x, g(x)) &\leq d(x, g_N^{t_N} \cdots g_2^{t_2}(x)) + d(g_N^{t_N} \cdots g_2(x), g(x)) \\ &\leq d(x, g_N^{t_N} \cdots g_2^{t_2}(x)) + 2 \cdot d_1 \\ &\;\;\vdots \\ &\leq 2(d_N + d_{N-1} + \ldots + d_1) \end{aligned}$$

d.h. x hat eine beschränkte $SL_n(\mathbb{Z})$-Bahn. Nach dem Bruhat-Tits-Fixpunktsatz §2.8 gibt es einen Fixpunkt. $\square$

<u>Frage</u>: Wo haben wir $R = \mathbb{Z}$ benutzt?

Erinnerung an § 3.4: wenn S, T Gruppen sind, $S \to \mathrm{Iso}(X) \leftarrow T$ isometrische Wirkungen auf einen vollständigen CAT(0)-Raum und wenn S und T vertauschen, $st(x) = ts(x)$ $\forall x \in X$, $s \in S$, $t \in T$ (kurz: $[S, T] = 1$) und wenn $X^S \neq \phi \neq X^T$ gilt, so gilt auch

$$X^S \cap X^T \neq \phi$$

25. Satz (M. Bridsons "Bootstrap Lemma", 2009)
Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $m \geq 0$, für alle kompakten $K \subseteq X$ (oder alle offenen $U \subseteq X$) gilt $\tilde{H}_k(K) = 0$ (oder $\tilde{H}_k(U) = 0$) für alle $k \geq m$ – etwa wegen $\dim(X) \leq m$.
Seien $k_1, \ldots, k_n \geq 1$ mit

$$k_1 + \ldots + k_n > m$$

Seien $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathrm{Iso}(X)$ Teilmengen mit folgenden Eigenschaften:

(a) $[S_i, S_j] = 1$ für $i \neq j$

(b) Ist $(g_1, \ldots, g_{k_j}) \in S_j^{k_j}$, so gibt es $x \in X$ mit $g_1(x) = g_2(x) = \cdots = g_{k_j}(x) = x$.

Dann gibt es (mindestens) ein j so, dass für alle $k \geq 1$ und alle $(g_1, \dots, g_k) \in S_j^k$ gilt

$g_1(x) = \dots g_k(x) = x$ für ein $x \in X$.

<u>Beweis</u> Wir nehmen an, das ist falsch. Dann gibt es für jedes $j = 1, \dots, m$ ein <u>minimales</u> $\tilde{k}_j > k_j$ und ein $\tilde{k}_j$-Tupel $(g_{j,1}, \dots, g_{j,\tilde{k}_j}) \in S_j^{\tilde{k}_j}$ ohne gemeinsamen Fixpunkt. Sei $C_{ji} = \{x \mid g_{ji}(x) = x\} \neq \phi$ (wegen $k_j \geq 1$!). Der Nerv der zugehörigen Überdeckung $\{C_{ji} \mid j = 1, \dots, m, \ i = 1, \dots, \tilde{k}_j\} = \Delta$ ist der Join der kombinatorischen $(\tilde{k}_j - 1)$-Sphären $|\mathrm{Nerv}(\{C_{ji} \mid i = 1, \dots, \tilde{k}_j\})| \cong \mathbb{S}^{\tilde{k}_j - 1}$

(der Join von zwei Posets ist das Produkt-Poset)

$$|\Delta| = \mathbb{S}^{\tilde{k}_1 - 2} * \dots * \mathbb{S}^{\tilde{k}_n - 2}$$
$$= \mathbb{S}^{\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_n - n}$$

und $\tilde{k}_1 + \dots + \tilde{k}_n - n \geq k_1 + \dots + k_n > m$ $\lightning$ $\square$

<u>Korollar</u> Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $m \geq 0$ und gelte für alle $k \geq m$ und alle $U \subseteq X$ offen (bzw. alle $K \subseteq X$ kompakt) $\tilde{H}_k(U) = 0$ (bzw. $\tilde{H}_k(K) = 0$), z.B. $\dim(X) \leq m$. Seien $H_1, \dots, H_n$ Gruppen mit endlichem EZS aus Elementen endlicher Ordnung. Ist $n > m$ und

$$H_1 \times \dots \times H_n \longrightarrow \mathrm{Iso}(X)$$

eine isometrische Wirkung, so hat mindestens ein H_j einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u> Das folgt mit $k_j = 1$. $\square$

<u>Beispiel</u> (a) $\mathbb{Z}/2$ operiert auf $\mathbb{Z}$ durch Multiplikation mit ± 1. Das semidirekte Produkt

$$\mathbb{Z}/2 \ltimes \mathbb{Z} \cong D_\infty$$

ist die "unendliche Diedergruppe". Anderes Modell:

$$D_\infty = \{ [x \longmapsto ax+b] \mid b \in \mathbb{Z} \quad a = \pm 1 \} \subseteq \mathrm{Isom}(\mathbb{R})$$

D_∞ wird erzeugt von $\alpha = [x \longmapsto -x]$ und $\beta = [x \longmapsto 2-x]$, beide Erzeuger sind Involutionen.

Ist also $\dim(X) \leq m < n$, so hat jede isometrische Wirkung von

$$\underbrace{D_\infty \times D_\infty \times \dots \times D_\infty}_{n} \longrightarrow \mathrm{Iso}(X)$$

die Eigenschaft, dass einer der n Faktoren einen Fixpunkt hat.

(b) Betrachte in $GL_n(\mathbb{Z})$ die Gruppen

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & 0 & \pm 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong (\mathbb{Z}/2)^{n-1}$$

sowie

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & x_{n-1} \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \right\} \cong \mathbb{Z}^{n-1}$$

Die Gruppe T normalisiert V und

$$T \cdot V \cong (D_\infty)^{n-1}$$

$$T \cdot V = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & 0 & x_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \pm 1 & x_{n-1} \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

26. <u>Theorem</u> (M. Bridson ~ 2012) Sei X vollst. CAT(0)-Raum, sei $\dim(X) \leq m$ (oder unsere homologische Bedingungen $\tilde{H}_k(U)=0$ ...). Ist $n \geq 3$ und $n \geq m+1$, so hat jede isometrische $GL_n(\mathbb{Z})$-Wirkung $GL_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Iso}(X)$ einen Fixpunkt.

<u>Beweis</u> Wir haben gerade gesehen, dass $GL_n\mathbb{Z}$ eine zu $(D_\infty)^{n-1}$ isomorphe Untergruppe enthält. Da D_∞ von zwei Involutionen erzeugt wird, können wir § 3.25 anwenden, mit $k_1 = \dots = k_{n-1} = 1$. Einer der $(n-1)$ Faktoren hat also einen Fixpunkt. Insbesondere gibt es eine Elementarmatrix in $GL_n(\mathbb{Z})$, die einen Fixpunkt hat. Nach § 3.24 hat dann $SL_n\mathbb{Z} \leq GL_n(\mathbb{Z})$ eine nicht leere Fixpunktmenge $F \subseteq X$. Da $[GL_n(\mathbb{Z}) : SL_n(\mathbb{Z})] = 2$ gilt, hat auch $GL_n(\mathbb{Z})$ einen Fixpunkt: der Quotient $GL_n(\mathbb{Z})/SL_n(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$ operiert auf dem CAT(0)-Raum F, hat also nach § 2.8 einen Fixpunkt. $\square$

27. Ausblick J.P. Serre definiert in seinem Buch "Trees": eine Gruppe H hat Eigenschaft FA, wenn jede isometrische Wirkung von H auf einen $\mathbb{Z}$-Baum (= simplizialen Baum) einen Fixpunkt hat und beweist, dass z.B. $SL_n\mathbb{Z}$ für $n \geq 3$ Eigenschaft FA hat. Das folgt auch aus § 3.26, denn so ein Baum hat Dimension $\dim(X) = 1$.

B. Farb und M. Bridson untersuchen folgende Eigenschaften einer Gruppe H ist (für $d \geq 1$)

$\boxed{FA_d}$ wenn jede isometrische Wirkung auf einen vollständigen CAT(0)-Raum X mit $\dim(X) \leq d$ einen Fixpunkt hat,

beziehungsweise

$\boxed{FA_d^{ss}}$ wenn das gleiche für alle halbeinfachen H-Wirkungen gilt.

FA_1^{ss} ist genau Serres FA.

(FA_d vererbt sich auf Quotienten)

Wir haben folgendes bewiesen:

- endliche Gruppen sind FA_d (und FA_d^{ss}) für alle $d \geq 1$ (Bruhat-Tits-Fixpunktsatz)

- Ist R endlich erzeugter Ring, $n \geq 3$, so ist $E_n(R)$, vom Typ FA_{n-2}^{ss} (B. Farb)

- Die Gruppe $GL_n\mathbb{Z}$, $n \geq 3$, ist vom Typ FA_{n-2} (M. Bridson)

- Olga Varghese und M. Bridson zeigen (unabhängig), dass $Aut(F_n)$ vom Typ FA_d für $d = \lfloor 2 \cdot \frac{n}{3} \rfloor$, $n \geq 3$ ist. $Aut(F_n)$ ist die Automorphismengruppe der freien Gruppe F_n. Die natürliche Abbildung

$$F_n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

liefert einen Epimorphismus

$$Aut(F_n) \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}^n) = GL_n(\mathbb{Z})$$

28. <u>Beispiel</u> Die Gruppe $\mathbb{Z}/m$ operiert auf $(D^\infty)^m$ durch Permutation der Faktoren. In der entsprechenden Gruppe

$$G = \mathbb{Z}/m \ltimes D_\infty^m$$

sind die m Kopien von D_∞ also alle konjugiert. Die Gruppe G operiert fixpunktfrei und halbeinfach auf $\mathbb{R}^m$ (die Gruppe $\mathbb{Z}/m$ permutiert die Koordinaten und die D_∞ operieren als $x_j \longmapsto a_j x_j + b_j$ $a_j = \pm 1$, $b_j \in \mathbb{Z}$), also ist G nicht vom Typ FA_m oder FA_m^{ss}. Ist aber X ein vollständiger CAT(0)-Raum mit $\dim(X) < m$, so hat nach §3.25 einer der D_∞-Faktoren in $(D_\infty)^m$ einen Fixpunkt in X. Da die D_∞-Faktoren in G konjugiert sind, hat <u>jeder</u> der Faktoren einen Fixpunkt, also auch die Gruppe $H = D_\infty^m \trianglelefteq G$, und damit hat G einen Fixpunkt, weil

$$[G:H] = m < \infty.$$

Also ist G vom Typ FA_{m-1}, aber <u>nicht</u> vom Typ FA_m.