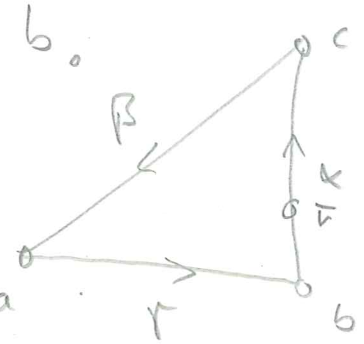
§2 CAT(0)-Räume

1. Eine *Geodätische* in einem metrischen Raum X ist eine Kurve $\gamma : J \to X$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, mit $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s-t|$ für alle $s,t \in J$. Ist $J = [a,b]$, so heißt γ Geodätische von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$. Ein metrischer Raum heißt *geodätisch*, wenn zwei Punkte immer durch eine Geodätische verbindbar sind.

Bsp $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ ist geodätisch (jeder normierte Vektorraum ist geodätisch).

Ein *geodätisches Dreieck* $\Delta(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ besteht aus Punkten $a,b,c \in X$ und Geodätischen α, β, γ von b nach c nach a nach b.



Die Dreiecks-Ungleichung garantiert, dass es in $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ Punkte $\bar a, \bar b, \bar c$ gibt mit

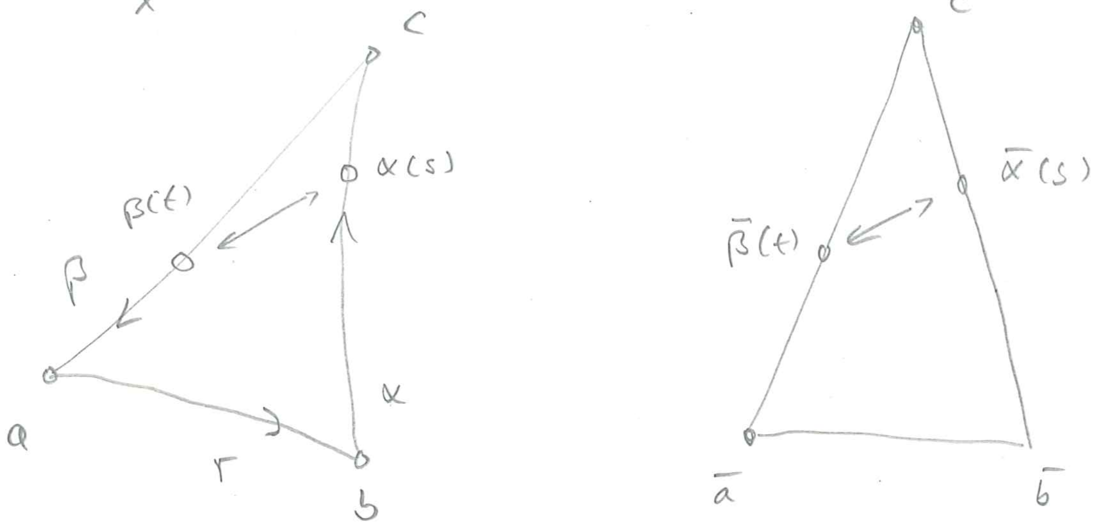
$$d(a,b) = \|\bar a - \bar b\|_2$$
$$d(b,c) = \|\bar c - \bar b\|_2$$
$$d(c,a) = \|\bar a - \bar c\|_2$$

und Geodätische $\bar\alpha(t) = \bar a + t \frac{\bar b - \bar a}{\|\bar b - \bar a\|_2}$ usw. Ist $v = \alpha(s)$ so heißt $\bar v = \bar\alpha(s)$ Vergleichspunkt, und $\Delta(\bar a, \bar b, \bar c, \bar\alpha, \bar\beta, \bar\gamma)$ heißt *Vergleichsdreieck* zu $\Delta(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$.

Beachte: alle Vergleichsdreiecke sind kongruent in $\mathbb{R}^2$.

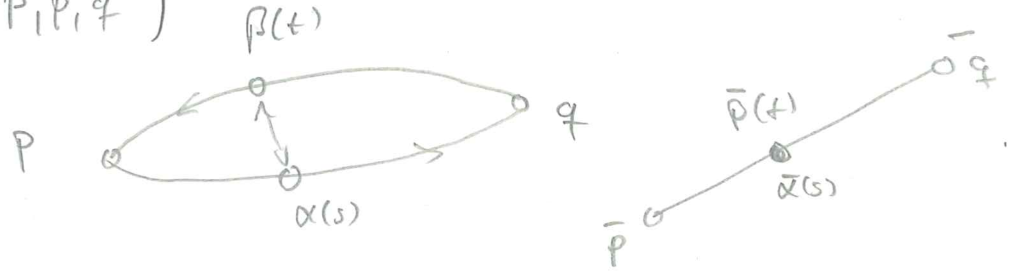
Ein geodätischer metrischer Raum X heißt <u>CAT(0) Raum</u> (Cartan-Alexandrov-Toponogov, Krümmung ≤ 0), wenn gilt: für jedes geodätische Dreieck $\Delta(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ in X mit Vergleichsdreieck $\Delta(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma})$ in $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ und alle $s \in [0, d(b,c)]$, $t \in [0, d(c,a)]$ ist

$$d_X(\alpha(s), \beta(t)) \leq \| \bar{\alpha}(s) - \bar{\beta}(t) \|_2$$



<u>Beispiel</u> Für $n \geq 2$ ist $(\mathbb{R}^n, \|.\|_p)$ genau dann ein CAT(0)-Raum, wenn $p = 2$. (üA).
Allgemein ist ein Banachraum genau dann CAT(0), wenn er ein Hilbertraum ist.

<u>Beobachtung</u> Aus der CAT(0)-Bedingung folgt sofort, dass zwei Punkte $p, q \in X$ <u>durch genau eine Geodätische</u> verbunden sind (betrachte das Dreieck mit Ecken p, p, q)

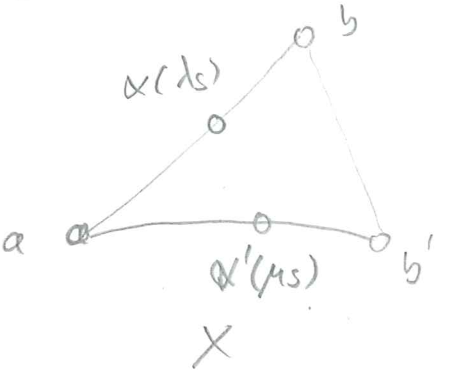


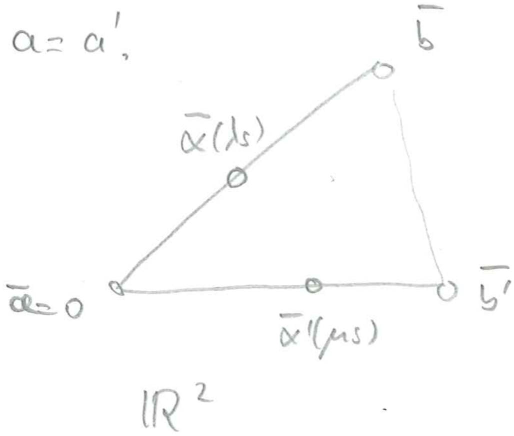
Tatsächlich gilt eine wesentlich stärkere Aussage

2. Lemma In einem CAT(0)-Raum (X,d) ist die Metrik konvex: sind $a,b,a',b' \in X$ und α, α' Geodätische von a nach b bzw. von a' nach b', so gilt mit $\lambda = d(a,b)$, $\mu = d(a',b')$, dass für alle $s \in [0,1]$

$$d(\alpha(\lambda s), \alpha'(\mu s)) \leq (1-s)\, d(a,a') + s\, d(b,b')$$

Beweis: Betrachte zuerst den Fall $a = a'$.





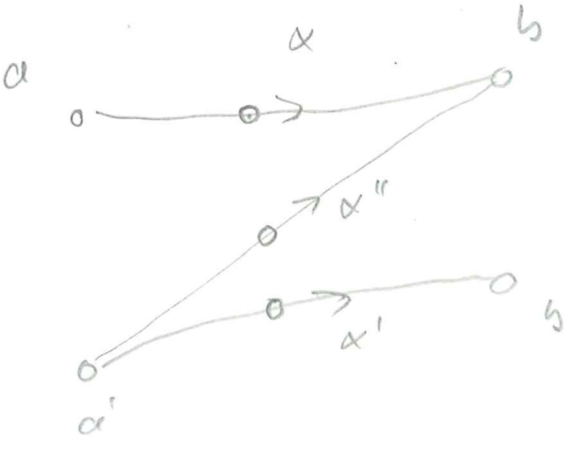
$$\bar\alpha(\lambda s) = s \cdot b \qquad \overline{\alpha'}(\mu s) = s \cdot b'$$

$$\| s\cdot b - s \cdot b' \|_2 = s \, \| b - b' \|_2$$

$$\Rightarrow d(\alpha(\lambda s), \alpha'(\mu s)) \leq s\, d(b,b') \quad (\checkmark)$$

Allgemeiner Fall $\nu = d(a',b)$ α'' Geodät. von a' nach b.

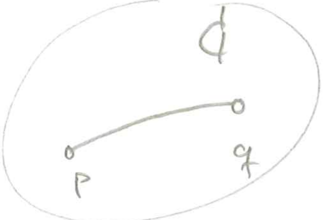
$$d(\alpha'(\mu s), \alpha''(\nu s)) \leq s \cdot d(b,b')$$
$$d(\alpha(\mu(1-s)), \alpha''(\nu(1-s))) \leq (1-s)\, d(a,a')$$



$\Rightarrow$ Beh.

□

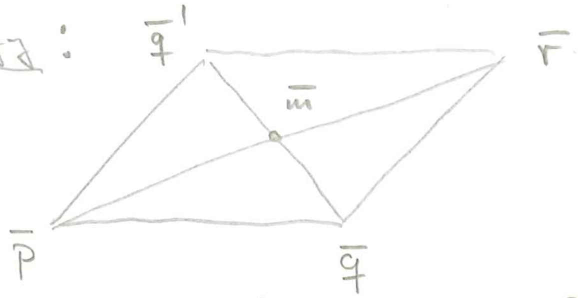
3. <u>Def</u> Sei X ein CAT(0)-Raum. Eine nichtleere Teilmenge $C \subseteq X$ heißt <u>konvex</u>, wenn zu allen $p,q \in C$ die Geodätische von p und q in C liegt.



Offensichtlich ist C dann wieder ein CAT(0)-Raum. Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

<u>Lemma</u> Ist X ein CAT(0)-Raum und ist $C \subseteq X$ eine konvexe vollständige Teilmenge, so gibt es zu jedem $p \in X$ genau ein $q \in C$ mit $d(p,q) = d(p,C)$. #

<u>Beweis</u> Sei $\delta = d(p,C)$. <u>Elementargeometrische Vorüberlegung</u>:



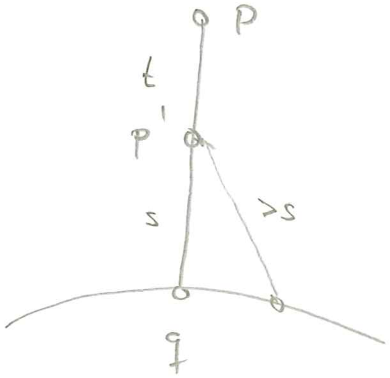
$$2\left(\|\bar p - \bar q\|_2^2 + \|\bar p - \bar q'\|_2^2\right) = \|\bar p - \bar r\|_2^2 + \|\bar q' - \bar q\|_2^2$$

Ist also $q, q' \in C$ und m der Mittelpunkt der Geodätischen von q und q', so gilt $\|\bar m - \bar p\|_2^2 \geq d(m,p)^2 \geq \delta^2$.

Mit
$$d(p,q)^2 = \|\bar p - \bar q\|_2^2 \leq (\delta+\varepsilon)^2 = \delta^2 + 2\delta\varepsilon + \varepsilon^2$$
$$d(p,q')^2 = \|\bar p - \bar q'\|_2^2 \leq \delta^2 + 2\delta\varepsilon + \varepsilon^2$$
folgt
$$4\delta^2 + 4\varepsilon^2 + 8\delta\varepsilon \geq 4\delta^2 + d(q,q')^2$$

Ist also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in C mit $\lim_n (p,q_n)=\delta$, so folgt, dass $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Da C vollständig ist, hat sie einen Grenzwert $q\in C$, und $d(p,q)=\delta$. Ebenso folgt die Eindeutigkeit von q. □

Wir setzen $q=\mathrm{proj}_C(p)$. Ist p' ein Punkt auf der Geodätische von p und q, so folgt $q=\mathrm{proj}_C(p')$



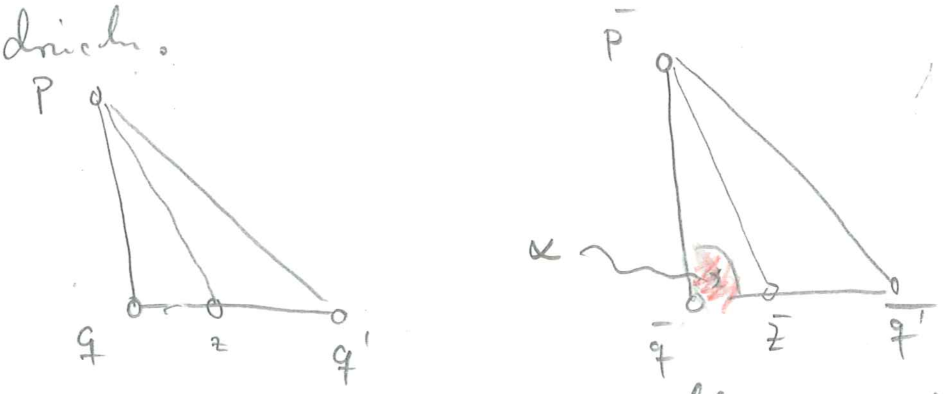
$d(p,q)=s+t<s'+t.$

4. <u>Satz</u> Sei X ein CAT(0)-Raum und sei $C\subseteq X$ konvex und vollständig. Dann ist die Abbildung
$X\longrightarrow C$, $p\longmapsto \mathrm{proj}_C(p)$ eine 1-Lipschitz Retraktion.

Für $s\in[0,1]$ und $p\in X$ sei $h_s(p)$ der Punkt auf der Geodätische von p und $q=\mathrm{proj}_C(p)$ mit $d(h_s(p),q)=s\,d(p,q)$. Dann ist $h: X\times[0,1]\longrightarrow X$ eine Homotopie zwischen id_X und proj_C. Insbesondere ist C Deformationsretrakt von X.

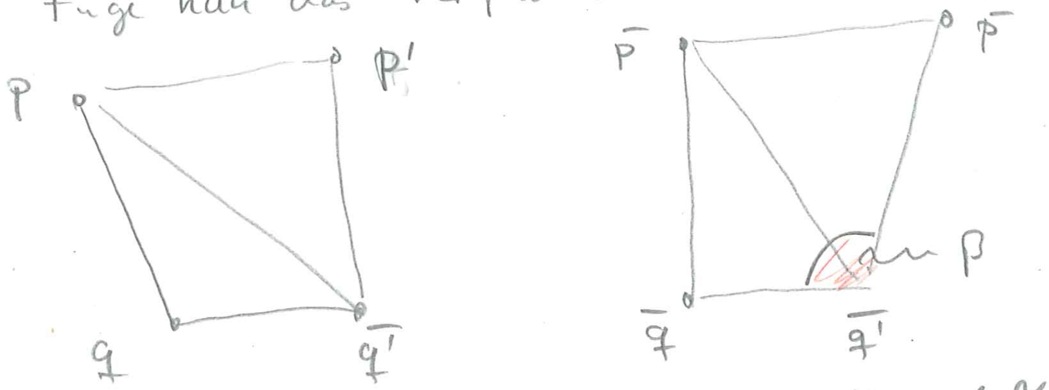
Bew.: Sei $p, p' \in X$ mit $q = \mathrm{proj}_{C}(p)$, $q' = \mathrm{proj}_{C}(q')$.

Beh.: $d(p,p') \geq d(q,q')$. Betrachte dazu Vergleichsdreiecke.



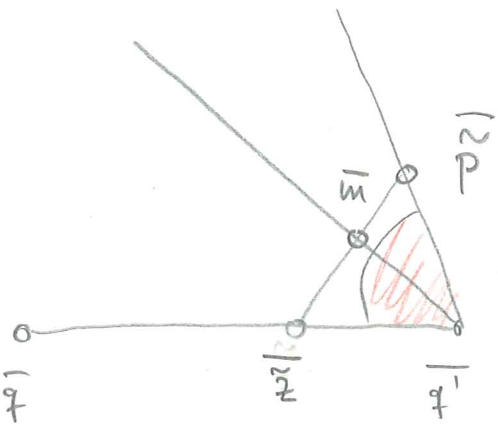
Wegen $d(p,z) \leq \|\bar{z} - \bar{p}\|_2$ für alle $\bar{z}$ folgt sofort $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$.

Füge nun das Vergleichsdreieck in $p - q' - p'$ an.



Wir behaupten, dass $\beta \geq \frac{\pi}{2}$.

Wäre das falsch, hätten wir für $\tilde{p}$ und $\tilde{z}$ wie unten,



dass

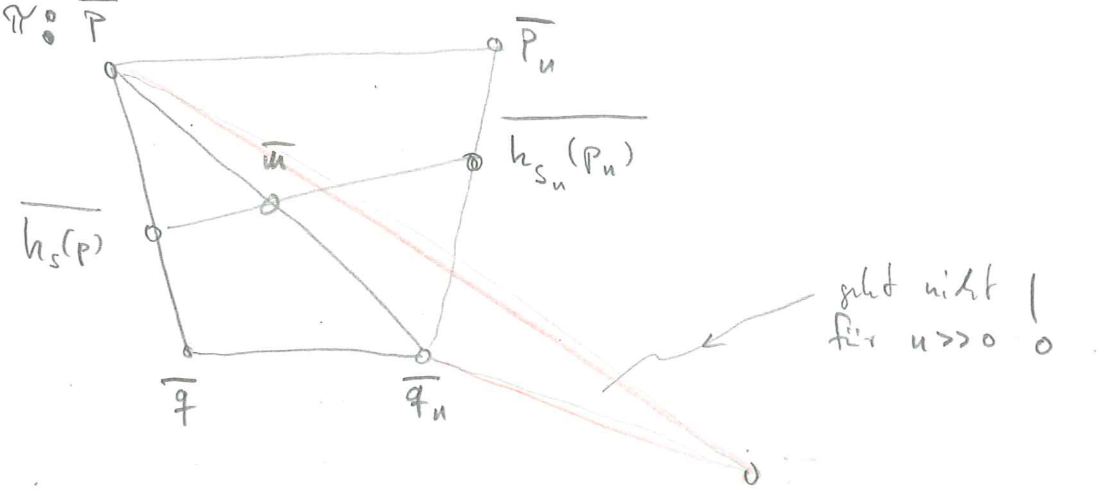
$$\begin{aligned} d(\tilde{z}, \tilde{p}) &\leq d(\tilde{z}, m) + d(m, \tilde{p}) \\ &\leq \|\bar{\tilde{z}} - \bar{m}\|_2 + \|\bar{m} - \bar{\tilde{p}}\|_2 \\ &= \|\bar{\tilde{z}} - \bar{\tilde{p}}\|_2 < \|\bar{\tilde{p}} - \bar{q}'\|_2 = d(\tilde{p}, q') \ \lightning \end{aligned}$$

Also ist $\beta \geq \frac{\pi}{2}$. Es folgt elementargeometrisch, dass $d(p,p') \geq d(q,q')$ (auch wenn $\beta > \pi$!)

Damit ist $\mathrm{proj}_{C} : X \to C$ 1-Lipschitz.

<u>Beh</u> $h : X \times [0,1] \to X$ ist stetig.

Angenommen, $\lim_n p_n = p$ und $\lim_n s_n = s$. Für n hinreichend groß ist dann der Winkel β im Vergleichs-dreieck $< \pi$:



Dann folgt auch

$$d(h_s(p), h_{s_n}(p_n)) \leq \| \overline{h_s(p)} - \overline{h_{s_n}(p_n)} \|_2 \quad \text{und}$$

die rechte Seite geht gegen 0 für $n \to \infty$.

$\square$

5. <u>Korollar</u> Jeder CAT(0)-Raum X ist kontrahierbar, jede konvexe nicht leere Teilmenge $C \subseteq X$ ist kontrahierbar. Jeder offene oder abgeschlossene Ball $B_r(x)$, $\bar{B}_r(x) \subseteq X$ ist kontrahierbar.

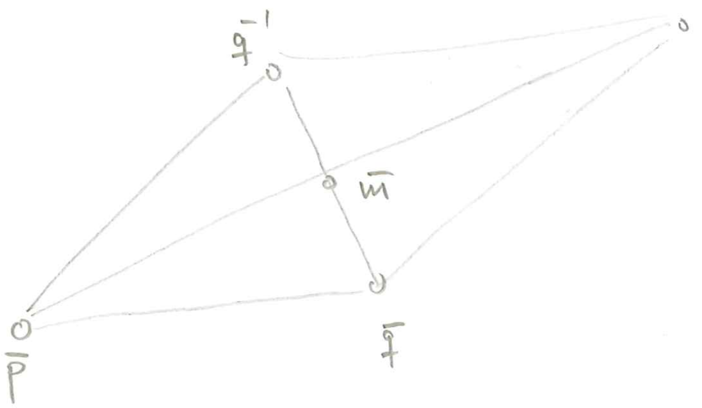
6. <u>Def</u> Der <u>Radius</u> einer beschränkten Teilmenge $E \subseteq X$ eines metrischen Raumes ist $\mathrm{rad}(E) = \inf\{r > 0 \mid$ es gibt $x \in X$ mit $E \subseteq \bar{B}_r(x)\}$

<u>Theorem</u> (Bruhat-Tits-Satz) Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei $E \subseteq X$ beschränkt. Dann gibt es genau einen Punkt $q \in E$ mit

$$\bar{B}_r(q) \supseteq E \quad \text{und} \quad r = \mathrm{rad}(E),$$

das <u>Zentrum</u> von E.

<u>Beweis</u> Sei $r = \mathrm{rad}(E)$, seien $q, q' \in X$ Punkte mit $\bar{B}_{r+\varepsilon}(q') \cap \bar{B}_{r+\varepsilon}(q) \supseteq E \ni p$



Wie in §2.3 gilt $4r^2 + 4\varepsilon^2 + 8r\varepsilon \geq 4r^2 + d(q,q')^2$

Ist also $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $\overline{B}_{r+\frac{1}{n}}(q_n) \supseteq E$, so ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge, mit Grenzwert q. Für jeden Punkt $p\in E$ folgt $\lim d(q_n, p) \leq r$, also $\overline{B}_r(q) \supseteq E$. Aus der Cauchyeigenschaft folgt auch die Eindeutigkeit von q.

<u>Korollar</u> Ist X vollständiger CAT(0)-Raum und ist $E\subseteq X$ kompakt (zB. E endlich), so ist E beschränkt und es gibt genau ein $q\in X$ mit $\overline{B}_r(q)\supseteq E$ und $r = \mathrm{rad}(E)$.

7. <u>Def</u> Sei X ein metrischer Raum und G eine Gruppe. Eine <u>isometrische Wirkung</u> von G auf X ist ein Homomorphismus $G \to \mathrm{Isom}(X)$. Die <u>Fixpunktmenge</u> von G ist $X^G = \{x\in X \mid g(x) = x$ für alle $g\in G\}$

<u>Lemma</u> Wenn $X^G \neq \emptyset$ und wenn X ein CAT(0)-Raum ist, so ist X^G abgeschlossen und konvex.

<u>Beweis</u> $\boxed{\text{ÜA}}$ $\square$

8. <u>Theorem</u> (Bruhat-Tits-Fixpunktsatz)

Sei X ein vollständiger CAT(0)-Raum, sei G eine Gruppe, die isometrisch auf X operiert. Dann sind äquivalent.

(1) Es gibt eine beschränkte G-Bahn $G(x) \subseteq X$

(2) Jede G-Bahn $G(x) \subseteq X$ ist beschränkt

(3) $X^G \neq \emptyset$, es gibt G-Fixpunkte.

<u>Beweis</u> (3) $\Rightarrow$ (2) Klar: $x \in X^G$, $y \in X \Rightarrow$ $G(y) \subseteq \overline{B}_r(x)$ mit $r = d(x,y)$.

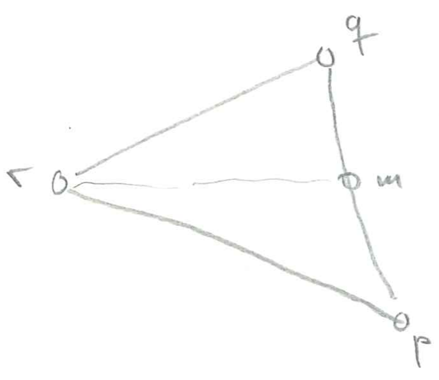
(2) $\Rightarrow$ (1) trivial

(1) $\Rightarrow$ (3) Ist $G(x) = E \subseteq X$ beschränkt, so gibt es genau ein $q \in X$ mit $\overline{B}_r(q) \supseteq E$, $r = \mathrm{rad}(E)$. Da E G-invariant ist, ist auch q G-invariant, d.h. $q \in X^G$. $\square$

#

9. Die CN-Ungleichung.

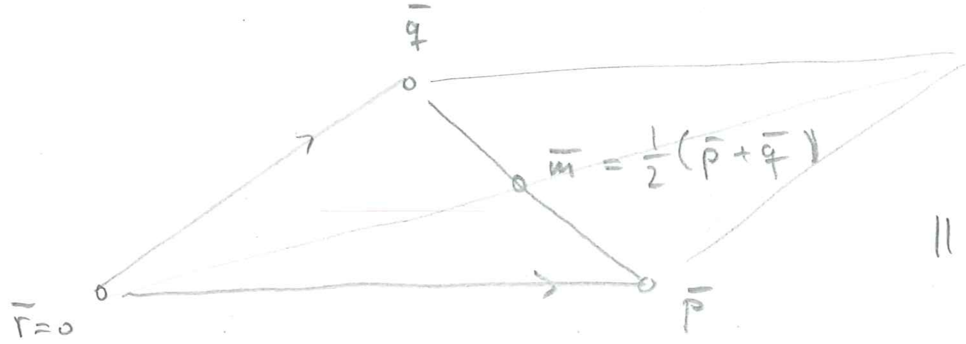
<u>Lemma</u> (Bruhat-Tits) Sei X ein CAT(0)-Raum. Sei $p, q, r \in X$ und sei $m \in X$ der Mittelpunkt von $\{p, q\}$, d.h. $d(p,m) = d(m,q) = \frac{1}{2} d(p,q)$



Dann gilt die <u>CN-Ungleichung</u> (courbure négative)

$$2\, d(r,m)^2 \le d(p,r)^2 + d(q,r)^2 - \frac{1}{2} d(p,q)^2$$

<u>Beweis</u> Nachrechnen im Vergleichsdreieck in $\mathbb{R}^2$



$$\|\bar m\|_2^2 \ge d(r,m)^2$$

$$2\,\|\bar p\|_2^2 + 2\,\|\bar q\|_2^2 = 4\,\|\bar m\|_2^2 + \|\bar p - \bar q\|_2^2 \qquad \square$$

<u>Korollar</u>. Sei X vollständiger CAT(0)-Raum, seien $E, E' \subseteq X$ beschränkt mit Zentren z, z' und Radien r, r'. Wenn $E \subseteq E'$ gilt, so gilt

$$d(z,z') \le \sqrt{2}\sqrt{r'^2 - r^2}$$

<u>Beweis</u> Für $z = z'$ ist nichts zu zeigen. Sonst sei m der Mittelpunkt von $\{z,z'\}$. Da m nicht das Zentrum von E ist, gibt es $q \in E$ mit $d(m,q) > r$

$$2r^2 < 2\, d(q,m) \le d(z,q)^2 + d(z',q)^2 - \frac{1}{2} d(z,z')^2$$
$$\le r^2 + r'^2 - \frac{1}{2} d(z,z')^2$$

$$\Rightarrow d(z,z')^2 \le (r'^2 - r^2)\,2 \qquad \square$$

Korollar Ein CAT(0)-Raum X ist genau dann vollständig, wenn er sphärisch vollständig ist.

Beweis Es gilt immer: sphärisch vollständig $\Rightarrow$ vollständig. Sei $(\overline{B}_{r_n}(z_n))_{n\geq 0}$ absteigende Folge von abg. Bällen, $\overline{B}_{r_0}(z_0) \supseteq \overline{B}_{r_1}(z_1) \supseteq \dots$ OE ist die Folge $(r_n)_{n\geq 0}$ monoton fallende Folge nicht negativer reeller Zahlen, also eine Cauchy-Folge. Nach dem vorig. Korollar ist auch $(z_n)_{n\geq 0}$ eine Cauchyfolge, mit Grenzwert $\lim\limits_n z_n = z$. Für jedes $m \geq n \geq 0$ gilt $z_m \in \overline{B}_{r_n}(z_n)$ www. $z \in \overline{B}_{r_n}(z_n)$ für alle $n \geq 0$. $\square$

10. **Def** Ein metrischer Raum (X,d) hat Mittelpunkte, wenn es zu allen $u,v \in X$ stets ein $m \in X$ gibt mit

$$d(u,m) = d(m,v) = \tfrac{1}{2}\, d(u,v)$$

Bsp • $\mathbb{Q}$ hat Mittelpunkte

• jeder geodätische Raum hat Mittelpunkte

Lemma Ein vollständiger metrischer Raum, X, der Mittelpunkte hat, ist geodätisch.

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$ Idee Sei $u,v \in X$ und sei $h = d(u,v)$. Sei $J = [0,h]$ und sei

$J_0 = \{0, h\}$

$J_1 = \{0, \tfrac{1}{2}h, h\}$

$J_2 = \{0, \tfrac{1}{4}h, \tfrac{2}{4}h, \tfrac{3}{4}h, h\}$

$\vdots$

Konstruieren per Induktion isometrische Einbettungen

$$r_k : J_k \to X$$

mit $r_{k+1}|_{J_k} = r_k$. Setze $J_\omega = \bigcup_{k=0}^{\omega} J_k \subseteq [a,b]$.

Das ist eine dichte Teilmenge. Da X vollständig ist, gibt es eine isometrische Fortsetzung $r : [a,b] \to X$. □

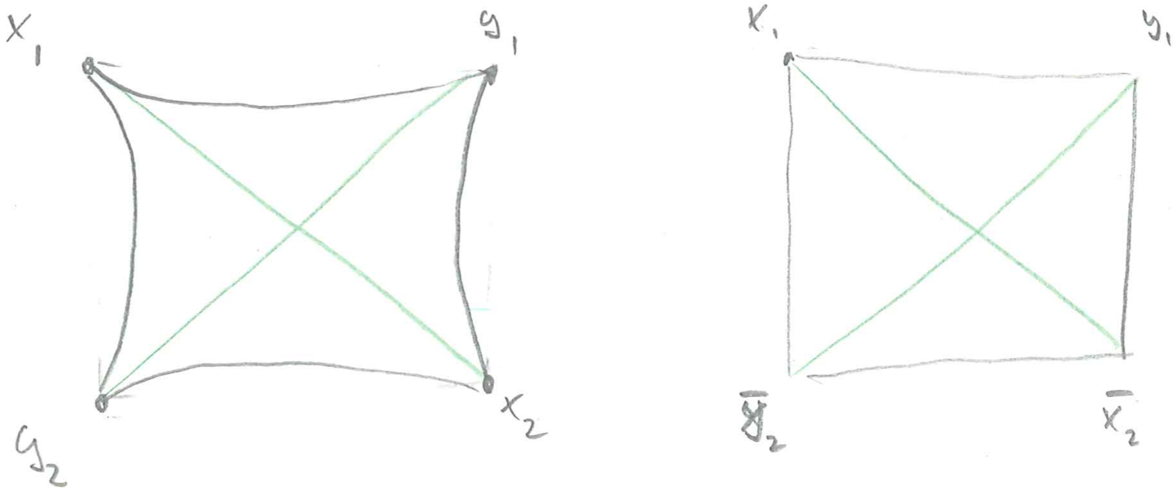
11. <u>Def</u> Ein metrischer Raum X hat <u>ungefähre Mittelpunkte</u>, wenn es zu allen $u, v \in X$, $\varepsilon > 0$ ein $m \in X$ gibt mit $d(u,m), d(m,v) \le \frac{1}{2} d(u,v) + \varepsilon$.

Er erfüllt die <u>CAT(0)-4-Punkt-Bedingung</u>, wenn es zu allen $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$ stets $\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^2$ gibt mit

$$d(x_i, y_j) = \|\bar{x}_i - \bar{y}_j\|_2 \qquad i,j \in \{1,2\}$$

$$d(x_1, x_2) \le \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2$$

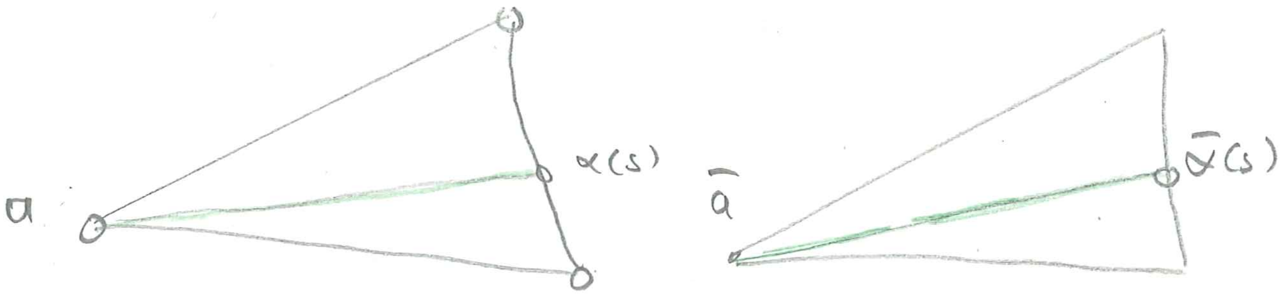
$$d(y_1, y_2) \le \|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|_2$$



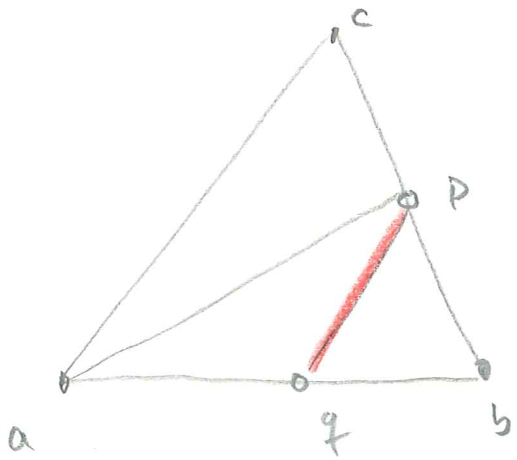
Wir werden gleich sehen, dass man CAT(0)-Räume darüber charakterisieren kann. Vorher noch ein Lemma.

12. <u>Lemma</u> Ein geodätischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn für jedes geodätische Dreieck $\Delta(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ mit Vergleichsdreieck $\Delta(\bar a,\bar b,\bar c,\bar\alpha,\bar\beta,\bar\gamma)$ im $(\mathbb{R}^2,\|.\|_2)$ gilt:

$$d(a,\alpha(s)) \le \|\bar a - \bar\alpha(s)\|_2 \qquad \text{für alle } s$$



<u>Beweis</u>



Im VD zu a,b,c gilt

$$d(a,p) \le \|\bar a - \bar p\|_2$$

Jetzt Vergleichsdreieck $\bar{\bar a},\bar{\bar b},\bar{\bar p}$ zu a,b,p $\Rightarrow$

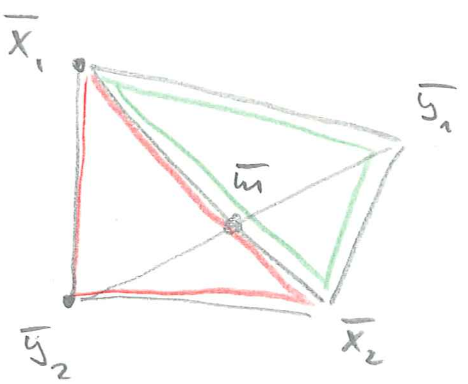
$$d(q,p) \le \|\bar{\bar q} - \bar{\bar p}\|_2 \le \|\bar q - \bar p\|_2$$

$\square$

13. Theorem Ein vollständiger metrischer Raum ist genau dann CAT(0), wenn er ungefähre Mittelpunkte hat und alle 4-Tupel von Punkten die CAT(0)-4-Punkt-Bedingung erfüllen.

Beweis: Angenommen, X ist CAT(0). Dann hat X Mittelpunkte, also auch ungefähre Mittelpunkte.

Sei $x_1, y_1, x_2, y_2 \in X$. Betrachte euklidische Vergleichsdreiecke zu $x_1 - x_2 - y_2$ und zu $x_1 - x_2 - y_1$



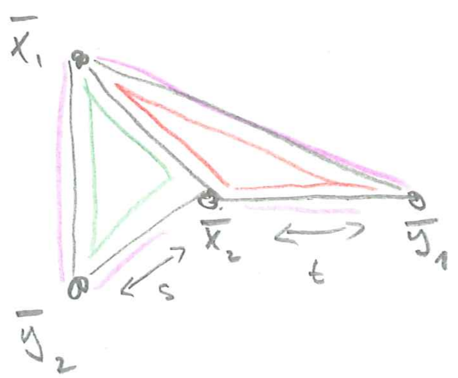
Wenn das resultierende Viereck **konvex** ist, so gilt

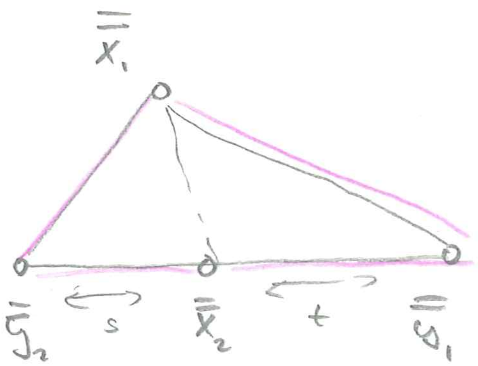
$$\underbrace{d(y_2, m) + d(m, y_1)}_{} \geq d(y_1, y_2)$$

$$= \underbrace{\|\bar{y}_2 - \bar{m}\|_2 + \|\bar{m} - \bar{y}_1\|_2}_{}$$

$$= \|\bar{y}_2 - \bar{y}_1\|_2 \qquad (\checkmark)$$

Wenn es nicht konvex ist, betrachte folgendes Dreieck in $\mathbb{R}^2$





$$\|\bar{\bar{x}}_1 - \bar{\bar{x}}_2\|_2 \geq \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|_2 = d(x_1, x_2)$$

$$\|\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{y}}_2\|_2 = \|\bar{\bar{y}}_1 - \bar{\bar{x}}_2\|_2 + \|\bar{\bar{x}}_2 - \bar{\bar{y}}_1\|_2 = d(y_1, x_2) + d(x_2, y_2)$$

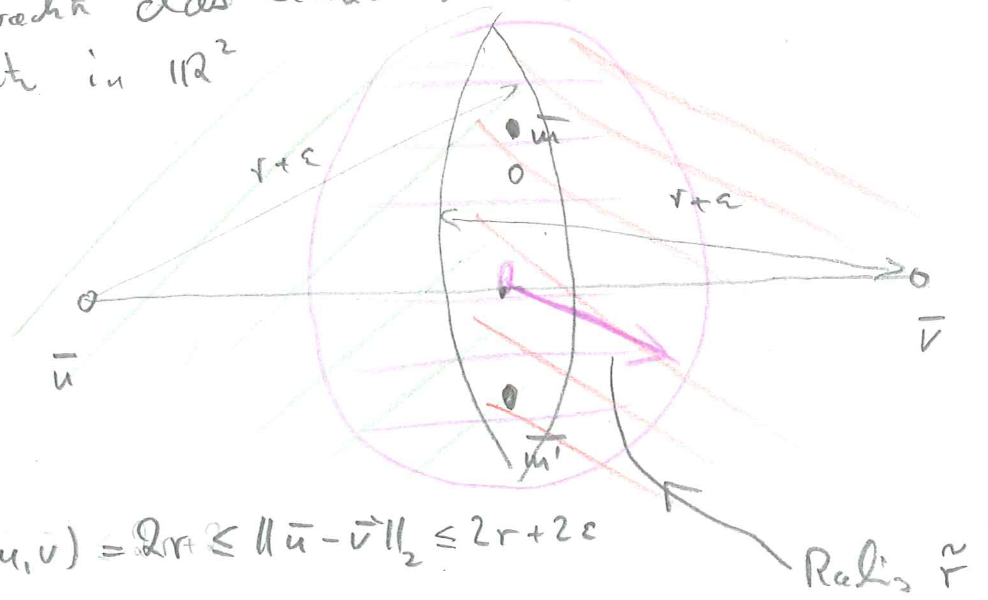
$$\geq d(y_1, y_2)$$

$\square$

Jetzt nehmen wir an, X ist vollständig, hat ungefähre Mittelpunkte und erfüllt die CAT(0) 4-Punkte-Bedingung.

<u>Beh</u> X hat Mittelpunkte und ist daher geodätisch. #

Sind $u, v \in X$ mit $d(u,v) = 2r$ und ungefähren Mittelpunkten m, m', $d(u,m), d(u,m'), d(v,m), d(v,m') \leq r+\varepsilon$ betrachte das Quadrupel u, m, v, m' und Vergleichspunkte in $\mathbb{R}^2$



$d(u,v) = 2r \leq \|\bar{u} - \bar{v}\|_2 \leq 2r + 2\varepsilon$

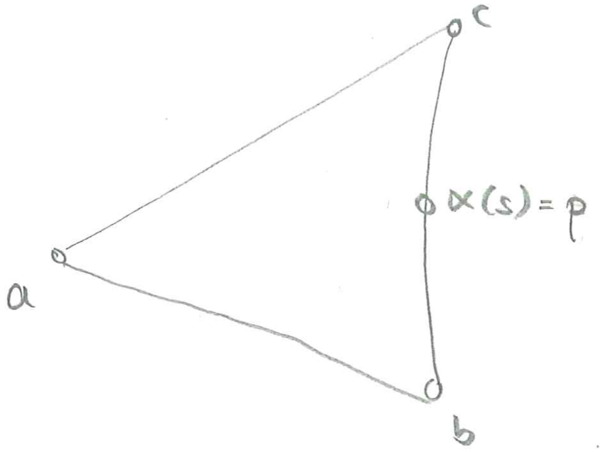
$\tilde{r}^2 \leq 2r\varepsilon + \varepsilon^2$

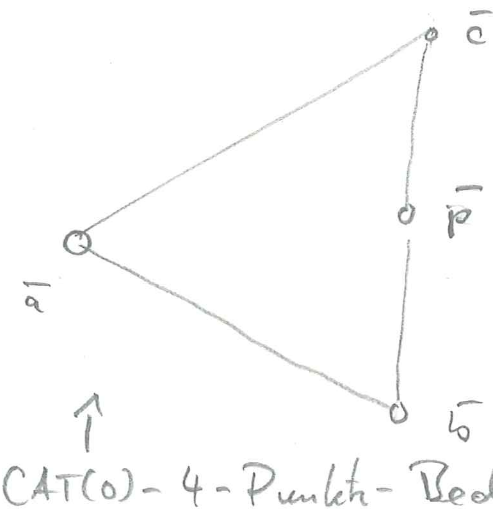
Ist also $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von ungefähren Mittelpunkten mit Fehlerterm $\varepsilon_n \leq \frac{1}{n}$, so ist $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Der Grenzwert $m = \lim_n m_n$ ist ein Mittelpunkt. □

Nach §2.10 ist X geodätisch.

Sei $\Delta(a,b,c,\alpha,\beta,\gamma)$ ein geodätisches Dreieck in X.

Wir benutzen die Bedingung aus §2.12.



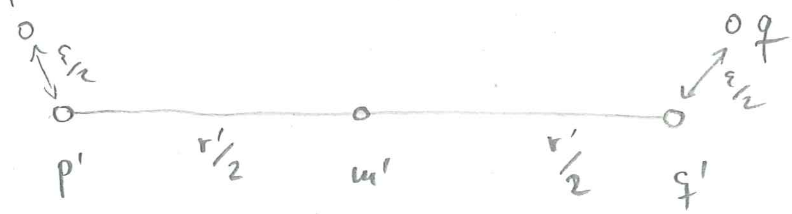


Wegen $\|\bar a - \bar c\|_2 \geq d(b,c) = d(b,p) + d(p,c) = \|\bar b - \bar p\|_2 + \|\bar p - \bar c\|_2$ ist $\bar p$ auf der Strecke von $\bar b$ nach $\bar c$, d.h. wir haben ein Vergleichsdreieck. Nun gilt $\|\bar a - \bar p\|_2 \geq d(a,p)$.

$\square$

14. <u>Theorem</u> Die metrische Vervollständigung eines CAT(0)-Raums ist ein CAT(0)-Raum.

<u>Beweis</u> Sei X CAT(0) mit Vervollständigung Z, d.h. Z ist vollständig und X ist dicht in Z. Wir zeigen, dass die Bedingungen aus Thm §2.13 erfüllt sind. Sei $p, q \in Z$, $\varepsilon > 0$. Wähle $p', q' \in X$ mit $d(p,p') < \varepsilon/2$, $d(q,q') < \varepsilon/2$ und $m' \in X$ Mittelpunkt von p'–q'. Sei $r = d(p,q)$ und $r' = d(p',q')$.



Es gilt $r' \leq r+\varepsilon$, also

$$d(p,m') \leq \frac{r'}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{r}{2}+\varepsilon$$
$$d(q,m') \leq \frac{r}{2}+\varepsilon$$

d.h. Z hat ungefähre Mittelpunkte.

Sei jetzt $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in Z^4$. Wähle Folge $(x_1(k), y_1(k), x_2(k), y_2(k))$ in X^4 mit diesem Grenzwert und CAT(0)-4-Punkt Vergleichspunkten $(\bar{x}_1(k), \bar{y}_1(k), \bar{x}_2(k), \bar{y}_2(k)) \in (\mathbb{R}^2)^4$, OE $\bar{x}_1(k)=0$ $\Rightarrow$ die Folge hat einen Häufungspunkt in $(\mathbb{R}^2)^4$ (weil beschränkt). Wir dürfen OE annehmen, dass wir Konvergenz haben, $\lim_n (\bar{x}_1(n), \bar{y}_1(n), \bar{x}_2(n), \bar{y}_2(n)) = (\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Dann folgt

$$d(x_i, y_j) = \|\bar{x}_i - \bar{y}_j\|_2 \qquad i,j \in \{1,2\}$$
$$d(x_1, y_1) \leq \|\bar{x}_1 - \bar{y}_1\|_2$$
$$d(x_2, y_2) \leq \|\bar{x}_2 - \bar{y}_2\|_2$$

$\square$

Wir studieren jetzt Beispiele. Jede vollständige 1-zush. Riem. Mf mit Schnittkrümmung ≤ 0 ist ein Beispiel; insbesondere der <u>hyperbolische Raum</u> H^m. Wir konstruieren ihn elementargeometrisch.

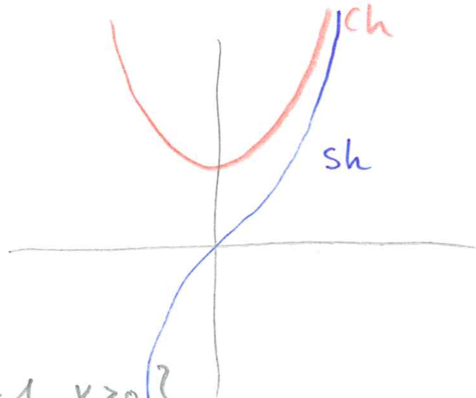
15. Der (reelle) Hyperbolische Raum H^m

Erinnerung an Analysis 1: $ch(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$

$sh(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$

$sh(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Homöomorphismus

$ch(t) : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_{\geq 1}$, Homöomorphismus $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$



Es gilt also $ch^2 - sh^2 = 1$

Jeder Punkt auf der Hyperbel

$H^1 = \{ (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2 \mid x_0^2 - x_1^2 = 1, x_0 > 0 \}$

lässt sich eindeutig schreiben als $(x_0, x_1) = (ch(s), sh(s))$

für ein $s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow[\text{Homöo}]{} H^1$

(vgl. Parametrisierung des Einheitskreises $S^1 = \{ (\cos(s), \sin(s)) \mid s \in \mathbb{R} \}$)

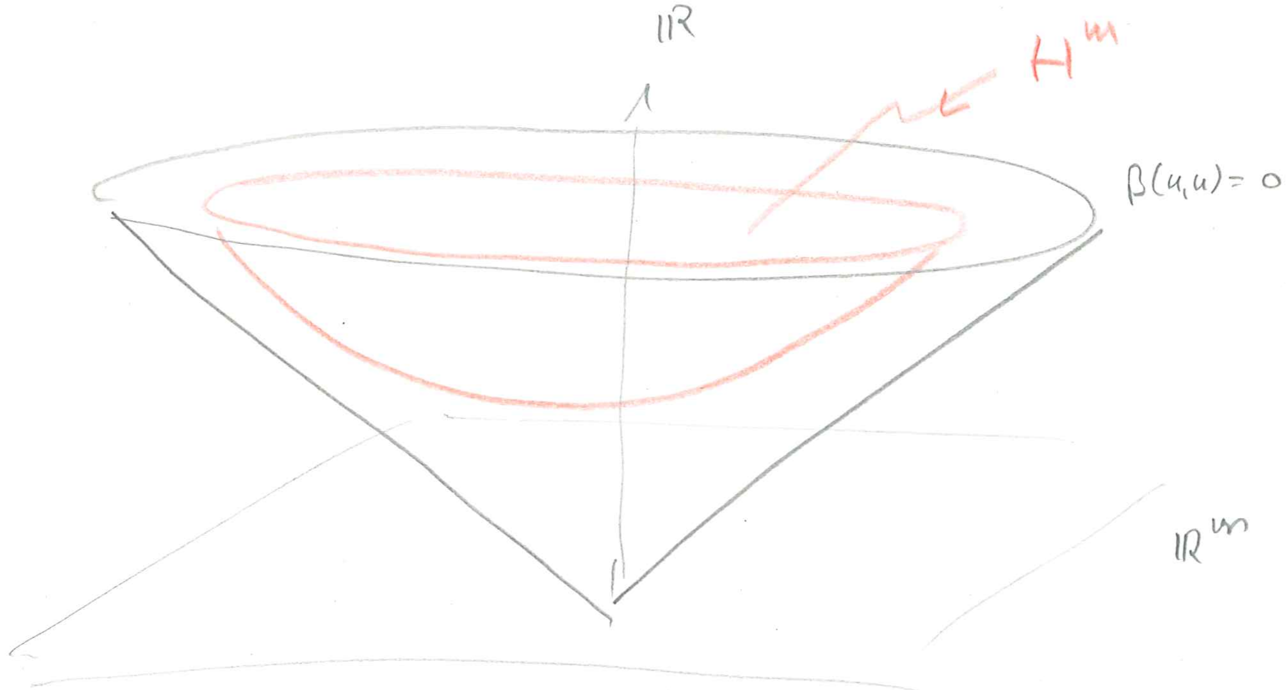
Betrachte jetzt $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m$, schreibe $u \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m$ als $u_0 \oplus \tilde{u}$ $u_0 \in \mathbb{R}$ $\tilde{u} \in \mathbb{R}^m$ und betrachte die sym. Bilinearform

$$\beta(u,v) = u_0 v_0 - \langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle$$

$$\langle \tilde{u}, \tilde{v} \rangle = \sum_{j=1}^{m} \tilde{u}_j \tilde{v}_j \qquad \text{Euklidisches Skalarprodukt.}$$

Definiere den <u>m-dim. hyperbol. Raum</u>

$$H^m = \{ u \in \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m \mid u_0 > 0 \,,\ \beta(u,u) = 1 \}$$



Homöomorphismus $\mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi} H^m$, $\tilde{u} \longmapsto \sqrt{1 + \|\tilde{u}\|_2^2} \oplus \tilde{u}$

H^1 ist der obere Zweig der Hyperbel in $\mathbb{R}^2$.

Die orthogonale Gruppe $SO(m) = \left\{ g \in \mathbb{R}^{m \times m} \;\middle|\; \begin{array}{l} \det(g) = 1 \\ g^T g = 1 \end{array} \right\}$

operiert auf $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^m$ via $g(u_0 \oplus \tilde{u}) = u_0 \oplus g(\tilde{u})$

und läßt β offensichtlich invariant. Der Homöom. φ ist äquivariant bzgl. dieser Wirkung.

Die Gruppe $SO^+_{1,1}\mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix} \;\middle|\; c = ch(t),\ s = sh(t),\ t \in \mathbb{R} \right\}$

$$\cong (\mathbb{R}, +)$$

operiert transitiv auf H^1 und läßt β dort invariant.

Wir setzen die Wirkung fort auf H^m durch die Einbettung $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^m$ mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} c & s & & & \\ s & c & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} c = ch(t) \\ s = sh(t) \end{array}$$

Diese Gruppe läßt β invariant. Die von $SO(m)$ und $SO^+_{1,1}\mathbb{R}$ erzeugte Gruppe nennen wir $\Omega_{1,m}$.

Sind $p, q \in H^m$, so gibt es $g \in \Omega_{1,m}$ mit

$g(p) = (1, 0 - 0) \qquad g(q) = (c, s, 0 - 0)$

<u>denn</u>: $p = p_0 \oplus \tilde{p}$ Wähle $g_1 \in SO(m)$ mit $g_1(\tilde{p}) \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^m$, dann $g_2 \in SO^+_{1,1}\mathbb{R}$ mit $g_2 g_1(p) = (1, 0 - 0)$. Dann wähle $g_3 \in SO(m)$ mit $g_3 g_2 g_1(q) \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^m$. Da $g_3(1, 0 - 0) = (1, 0 - 0)$ gilt, folgt mit $g = g_3 g_2 g_1$ die Behauptung.

#

Für $p = (1,0-0)$ und $q = (ch(t), s(t), 0-0)$

gilt nun $\beta(p,q) = ch(t) \geq 1$

$$\beta(p,q) = 1 \Leftrightarrow t = 0$$

16 Satz: Auf H^m erhalten wir durch

$$ch(d(p,q)) = \beta(p,q)$$

eine Metrik $d: H^m \times H^m \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Die Metrik ist invariant unter $\Omega_{1,m}$ (d.h. $\Omega_{1,m}$ operiert isometrisch auf H^m). Mit dieser Metrik ist H^m geodätisch.

Beweis: Aus der Rechnung oben folgt $\beta(p,q) \geq 1$ und $\beta(p,q) = 1 \Leftrightarrow p = q$ (mit der $\Omega_{1,m}$-Wirkung). Offensichtlich ist

$$\gamma(t) = (ch(t), sh(t), 0-0)$$

eine Geodätische. Jedes Paar von Punkten p,q läßt sich durch eine Isometrie in $\Omega_{1,m}$ auf diese Geodätische bewegen.

Es bleibt die Dreiecksungleichung zu beweisen.

Wir können annehmen, dass

$$p = (1, 0 \ldots 0) \qquad s, t \geq 0$$
$$q = (ch(t), sh(t), 0 \ldots 0)$$
$$r = (ch(s), sh(s) r_1, \ldots, sh(s) r_m) \qquad r_1^2 + \ldots + r_m^2 = 1$$
$$|r_1| \leq 1$$

$$d(p,q) = t \qquad d(p,r) = s$$

$$\beta(q,r) = ch(s) ch(t) - sh(s) sh(t) r_1$$
$$\leq ch(s) ch(t) + sh(s) sh(t) = ch(s+t)$$
$$\Rightarrow d(q,r) \leq s + t = d(q,p) + d(p,r) \qquad \square$$

17. Polarkoordinaten

Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^m$ lässt sich darstellen als

$$x = \xi \hat{x} \quad \text{mit} \quad \xi \geq 0, \quad \|\hat{x}\|_2 = 1. \quad \text{Ist } x \neq 0$$

so ist diese Darstellung eindeutig. Wir definieren

$\varphi : \mathbb{R}^m \to H^m$ durch

$$\varphi(x) = \varphi(\xi \hat{x}) = ch(\xi) \oplus sh(\xi) \hat{x}$$

Die Abbildung φ ist C^∞-glatte Bijektion. Wir bestimmen ihre Ableitung am Punkt $x = \xi \hat{x}$.

Für die Kurve $\gamma(t) = (\xi + t)\hat{x}$ gilt $\dot{\gamma}(0) = \hat{x}$

und $\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}(0) = \frac{d}{dt}\left[ch(\xi + t) \oplus sh(\xi + t)\hat{x}\right]\Big|_{t=0}$

$$= sh(\xi) \oplus ch(\xi) \hat{x}$$

$$\Rightarrow D\varphi(x)(\hat{x}) = sh(\xi) \oplus ch(\xi) \hat{x}$$

Jetzt $\rho(t)=\xi(\cos(t)\hat{x}+\sin(t)\,v)$ mit $\|v\|_2=1$, $\langle v,\hat{x}\rangle=0$, $\xi>0$

$\dot{\rho}(0)=\xi v$

$$\dot{\widehat{\varphi\circ\rho}}(0)=\frac{d}{dt}\Big[ch(\xi)\oplus sh(\xi)(\cos(t)\hat{x}+\sin(t)v)\Big]\Big|_{t=0}$$

$$=0\oplus sh(\xi)\,v$$

$$\Rightarrow D\varphi(x)(\xi v)=0\oplus sh(\xi)\,v \qquad \frac{sh(\xi)}{\xi}=1+\frac{\xi^2}{3!}+\frac{\xi^4}{5!}+\dots$$

$$D\varphi(x)(v)=0\oplus\frac{sh(\xi)}{\xi}\,v$$

18 <u>Satz</u> Die Umkehrabbildung $\psi=\varphi^{-1}: H^m\to\mathbb{R}^m$ ist 1-Lipschitz stetig. Auf Geodätischen durch den Punkt $(1,0-0)$ ist sie isometrisch.

<u>Beweis</u> Für eine Geodätische γ in H^m gilt

$$d(\gamma(s),\gamma(t))=|s-t|=\left|\int_s^t\sqrt{-\beta(\dot{\gamma}(v),\dot{\gamma}(v))}\,dv\right|$$

denn für die Geodätische $\gamma(t)=(ch(t),sh(t),0-0)$ ist $\dot{\gamma}(t)=(sh(t),ch(t),0-0)$

$\leadsto \beta(\dot{\gamma}(t),\dot{\gamma}(t))=-1$

Ist nun $\alpha:[0,h]\to\mathbb{R}^m$ eine Kurve mit $\varphi\circ\alpha=\gamma$, für eine Geodätische $\gamma:[0,h]\to H^m$, so haben wir mit

$$\dot{\gamma}(t)=D\varphi(\gamma(t))\,\dot{\alpha}(t)$$

und $\dot{\alpha}(t)=\xi\hat{x}$ $\qquad \dot{\alpha}(t)=a\hat{x}+bw \qquad \|v\|_2=1$, $\langle\hat{x},v\rangle=0$

$\|\dot{\alpha}(t)\|_2^2=a^2+b^2$

Also $D\varphi(\alpha(t))(\dot{\alpha}(t)) = a(sh(\xi) \oplus ch(\xi)x)$

$$+\, b\left(0 \oplus \frac{sh(\xi)}{\xi} v\right) =: w$$

$$\beta(w,w) = a^2 sh^2(\xi) - a^2 ch^2(\xi) - b^2\left(\frac{sh(\xi)}{\xi}\right)^2$$

$$= -a^2 - b^2\left(\frac{sh(\xi)}{\xi}\right)^2 \overset{!}{=} -1$$

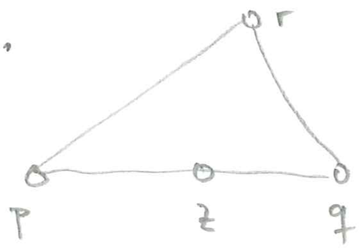
Es folgt $\|\dot{\alpha}\|_2 \leq 1$ und damit (*)

$$\int_0^h \|\dot{\alpha}(t)\|_2\, dt \leq h \rightsquigarrow \|\alpha(0) - \alpha(h)\|_2 \leq h \qquad \square$$

19. Korollar Der reelle Hyperbolische Raum H^m ist ein vollständiger CAT(0)-Raum.

Beweis Jeder abgeschlossene Ball $\bar{B}_r(p) \subseteq H^m$ ist kompakt, also ist H^m vollständig.

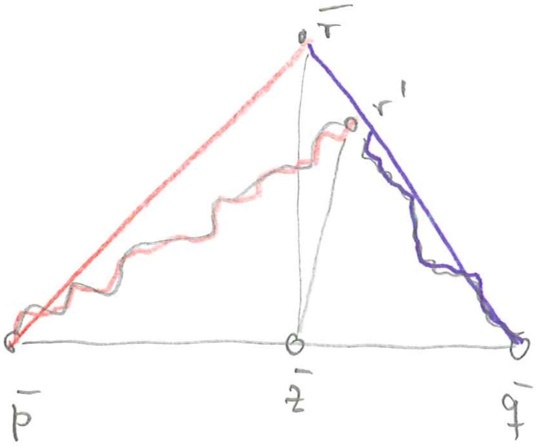
Sei $p, q, r \in H^m$ und sei z auf der Geodätische $p-q$.



Wir dürfen annehmen, dass $z = (1, 0, \dots, 0)$ gilt

Betrachte $\varphi: H^m \to \mathbb{R}^m$. Das Bild der Geodätische von p und q ist eine Geodätische in $\mathbb{R}^m$. Setze $\bar{p} = \varphi(p)$, $\bar{z} = \varphi(z)$, $\bar{q} = \varphi(q)$ und $r' = \varphi(r)$

Es folgt $d(z,r) = d(\bar{z}, r')$



Für den Vergleichspunkt $\bar r$ von r folgt wegen
$d(r',\bar q) \le d(r,q)$
$d(r',\bar p) \le d(r,p)$,
dass $d(\bar r,\bar z) \ge d(r',\bar z)$
$= d(r,z)$

□

#

(*) $\int_0^h \dot\alpha(t)\,dt = \alpha(h)-\alpha(0) \rightsquigarrow \|\alpha(h)-\alpha(0)\|$

$= \left\| \int_0^h \dot\alpha(t)\,dt \right\| \le \int_0^h \|\dot\alpha(t)\|\,dt$

20. Bem Der letzte Beweisschritt sagt: wenn X ein geodätischer metrischer Raum ist und wenn es zu jeder Geodätischen $\gamma : [0,h] \to X$ und zu jedem $t \in [0,h]$ eine 1-Lipschitzabbildung $X \xrightarrow{\Psi} \mathbb{R}^m$ gibt mit

(1) $\Psi \circ \gamma : [0,h] \to \mathbb{R}^m$ ist Geodätisch
(2) Für alle $p \in X$ gilt $d(p,\gamma(t)) = \|\Psi(p) - \Psi(\gamma(t))\|_2$

so ist X ein CAT(0)-Raum.

(Das Argument funktioniert auch für $m=1$!)

Korollar Die metrische Realisierung eines endlichen Gebäudes ist ein CAT(0)-Raum. □

(Betrachte Retraktion auf Apartment $X \to \mathbb{R}^m$)

21. <u>Def</u> Ein Unterraum $E \subseteq X$ eines $CAT(0)$-Raums X heißt <u>n-Flach</u>, wenn E isometrisch zu $(\mathbb{R}^n, \|.\|_2)$ für ein $n \geq 1$ ist. (Dann ist E automatisch konvex, vollständig und abgeschlossen.)

Der <u>Flach-Rang</u> ist $FR(X) = \max\{n \mid \text{es gibt ein } n\text{-Flach in } X\}$.

<u>Bsp</u> $FR(\mathbb{R}^m) = m$ (in der euklidischen Metrik)

$FR(H^m) = 1$ $\boxed{\text{ÜA}}$

<u>Offenes Problem in der Riemannschen Geometrie:</u> die einfach zush., (irreduzibel) vollst. Riem. Mf. von Flach-Rang ≥ 2 sind genau die (bekannten) symmetrischen Räume von nicht kompakten Typ.