Vorlesung

Räume nichtpositiver Krümmung

Münster, WS 12/13 (4-stündig)

Linus Kramer

§1 Neues und Altes über metrische Räume

1. Konventionen

(X, d_X) metr. Raum $d = d_X : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Manchmal erlauben wir $d(u,v) = \infty$ mit der Regel $\infty + t = \infty \geq t$ für alle $t \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (das wird dann explizit dazugesagt).

<u>Bälle</u> $B_r(x) = \{ v \in X \mid d(x,v) < r \}$

$\overline{B}_r(x) = \{ v \in X \mid d(x,v) \leq r \}$

Ein metr. Raum X heißt <u>beschränkt</u>, wenn $X = B_r(x)$ für ein $x \in X$, $r > 0$ gilt.

Ein topologischer (metrischer) Raum heißt <u>separabel</u>, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge hat.

2. Beispiele metrischer Räume

a) $\mathbb{R}^n$ mit der p-Norm, $1 \leq p < \infty$

$$\|x\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \qquad \|x\|_\infty = \max\{ |x_i| \mid 1 \leq i \leq n \}$$

ist normierter Vektorraum, sogar Banachraum (= vollständiger normierter Raum). $\boxed{\text{ÜA}}$

b) $\mathbb{R}$ mit Metrik $d^\varepsilon(u,v) = |u-v|^\varepsilon$ $\quad 0 < \varepsilon \leq 1$

Allgemein: Ist (X,d) metrischer Raum, so auch (X, d^ε) mit $d^\varepsilon(u,v) = d(u,v)^\varepsilon$ $\quad 0 < \varepsilon \leq 1$

$\boxed{\text{ÜA}}$

c) Erinnerung an Analysis II: X metr/top. Raum

$$L^\infty(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt} \}$$

$$C_b(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt} \}$$

$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)| \mid x \in X \}$ Supremumsnorm

Beides sind Banachräume bzgl $\|.\|_\infty$ $\boxed{\text{ÜA}}$

3. Isometrie Eine Abbildung $f : X \to Y$ von metrischen Räumen (X, d_X), (Y, d_Y) heißt isometrische Einbettung, wenn für alle $u, v \in X$ gilt $d_Y(f(u), f(v)) = d_X(u, v)$.
Wenn f zusätzlich surjektiv ist, heißt f Isometrie. Die Isometriegruppe von X ist

$$\mathrm{Iso}(X) = \{ f : X \to X \mid f \text{ Isometrie} \}$$

$\boxed{\text{ÜA}}$ Ist X kompakt und $f : X \to X$ eine isometrische Einbettung, so ist f schon eine Isometrie.

4. Theorem (Kuratowskis Einbettungssatz)
Ein metrischer Raum X läßt sich isometrisch in den Banachraum $(C_b(X), \|.\|_\infty)$ einbetten.

Beweis Wähle $p \in X$. Für $x \in X$ setze

$$s_x(v) = d(x,v) - d(p,v). \text{ Es folgt}$$

$$d(x,p) \geq |d(x,v) - d(p,v)| = |s_x(v)|$$

also $s_x \in C_b(X)$. Weiter gilt

$$|s_x(v) - s_y(v)| = |d(x,v) - d\cancel{(p,v)} - d(y,v) + d\cancel{(p,v)}|$$
$$\leq d(x,y)$$

Für $v = x$ und $v = y$ gilt Gleichheit, also

$$\|s_x - s_y\|_\infty = d(x,y) \qquad \square$$

Beachte: Die Einbettung $X \to C_b(X)$ hängt von der Wahl von $p \in X$ ab!

Variante: Wenn (X,d) beschränkt ist, so ist

$x \longmapsto d(x,-)$ eine $\overset{\text{isom.}}{\text{Einbettung}}$ $X \to C_b(X)$

Bemerkung Der Abschluß des Bildes $\{s_x \mid x \in X\}$ in $C_b(X)$ ist genau die Vervollständigung von X.

Wenn $Y \subseteq X$ dicht in X ist, so ist die natürliche Abbildung $C_b(Y) \leftarrow C_b(X)$,

$f \longmapsto f|_Y$ eine Isometrie von Banachräumen.

5. <u>Theorem</u> (Fréchets Einbettungssatz) Jeder separable metrische Raum X läßt sich in $L_\infty(\mathbb{N})$ isometrisch einbetten

<u>Beweis</u> Sei $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ dicht. Definiere

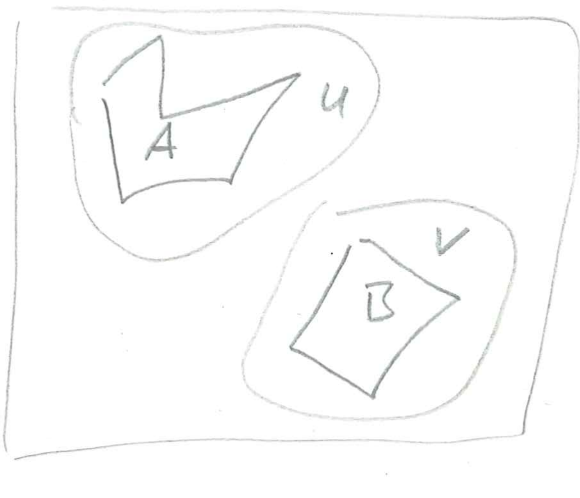
$S_k(x) = d(x, x_k) - d(x, x_0)$, betrachte

$x \longmapsto (S_k(x))_{k \in \mathbb{N}} \in L_\infty(\mathbb{N})$. Rest wie vorher $\square$

<u>Korollar</u> Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so gibt es einen Banachraum, der zu X und Y isometrische Teilmengen hat (nämlich $C_b(X) \oplus C_b(Y)$)

6. <u>Erinnerung an Analysis III</u>

Ein Hausdorff X heißt <u>normal</u>, wenn es zu disjunkten abg. Teilmengen $A, B \subseteq X$ stets disjunkte offene Teilmengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$



Jeder metrische Raum ist normal $\boxed{\text{ÜA}}$

<u>Satz</u> (<u>Urysohns Lemma</u>) Ein Hausdorffraum X ist genau dann normal, wenn es zu allen abg. disjunkten Teilmengen $A, B \subseteq X$ stets eine stetige Funktion $\varphi : X \to [0,1]$ gibt mit $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$ für alle $a \in A$, $b \in B$.

<u>Beweis</u> Dugundji VII 4.1 $\square$

Kramer, Analysis III § 3.1

7. <u>Lemma</u> Ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C_b(X)$ (X ein top. Raum) mit $\|f_k\|_\infty \leq a_k$ und konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} f \in C_b(X)$

<u>Beweis</u> $C_b(X)$ ist Banachraum bzgl $\|\cdot\|_\infty$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ ist eine Cauchyfolge. $\square$

#

8. <u>Lemma</u> Ist X normal, $A \subseteq X$ abg, $g : A \to \mathbb{R}$ stetig und $|g(a)| \leq c$ für alle $a \in A$, so gibt es $h : X \to \mathbb{R}$ stetig mit $|h(x)| \leq \frac{1}{3} c$ für alle $x \in X$, $|g(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3} c$ für alle $a \in A$.

<u>Beweis</u> Sei $A_+ = \{ a \in A \mid g(a) \geq \frac{1}{3} c \}$
$A_- = \{ a \in A \mid g(a) \leq \frac{-1}{3} c \}$.

Dann gibt es nach Urysohns Lemma $h : X \to [-\frac{1}{3}c, \frac{1}{3}c]$ $h(x) = \frac{1}{3} c$ auf A_+ $\quad h(x) = -\frac{1}{3} c$ auf A_- $\square$

9. <u>Theorem</u> (Tietzes Fortsetzungssatz) Sei X normal, $A \subseteq X$ abgeschlossen, $f: A \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f eine stetige Fortsetzung $F: X \to \mathbb{R}$ (d.h. $f(a) = F(a)$ für alle $a \in A$).
Wenn gilt $|f(a)| < c$ (bzw. $|f(a)| \leq c$) für alle $a \in A$, so kann man F so wählen, dass für alle $x \in X$ gilt $|F(x)| < c$ (bzw. $|F(x)| \leq c$).

<u>Beweis</u> (1) Angenommen, $|f(a)| \leq c$ für alle $a \in A$.
Nach Lemma 8 gibt es $h_0: X \to \mathbb{R}$ stetig mit
$\|h_0\|_\infty \leq \frac{1}{3} c$, $|f(a) - h_0(a)| \leq \frac{2}{3} c$ auf A.
Wende jetzt Lemma 8 an auf $f - h_0$, erhalte
$h_1: X \to \mathbb{R}$ mit $\|h_1\|_\infty \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} c$

$|f(a) - h_0(a) - h_1(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} c$ usw $\leadsto$

$$|f(a) - h_0(a) - \dots - h_n(a)| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n c$$
$$\|h_n\|_\infty \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n c.$$

Betrachte $F = \sum_{k=0}^{\infty} h_k$. Offensichtlich gilt

$F(a) = f(a)$ auf A und $\|F\|_\infty \leq \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n c = c$.

(2) Angenommen, $|f(a)| < c$ auf A. Die Funktion F aus (1) erfüllt $\|F\|_\infty \leq c$. Setze $B = \{x \in X \mid |F(x)| = c\}$ $\rightsquigarrow$ $A \cap B = \emptyset$. Sei $\varphi : X \to [0,1]$ Urysohn Funktion mit $\varphi(a) = 1$ auf A und $\varphi(b) = 0$ auf b. Betrachte $F \cdot \varphi = \tilde{F}$

(3) Angenommen, f ist unbeschränkt. Betrachte $\psi : \mathbb{R} \xrightarrow{\cong} (-1,1)$, $t \longmapsto t/(1+|t|)$ und wende (2) an auf $\psi \circ f : A \to (-1,1)$, verknüpfe das Ergebnis mit $\psi^{-1} : (-1,1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ $\square$

<u>Korollar</u> Ist X normal, $A \subseteq X$ abg, $f : A \to \mathbb{R}^n$ stetig, so gibt es eine Fortsetzung $F : X \to \mathbb{R}^n$

<u>Korollar</u> Ist X normal, $A \subseteq X$ abg, $f : A \to S^n$ stetig, so gibt es eine offene Menge $V \subseteq X$, mit $A \subseteq V$ und eine Fortsetzung

$$F : V \to S^n \quad \text{von } f.$$

<u>Beweis</u> Fasse f auf als Abbildung $f : A \to \mathbb{R}^{n+1}$. Nach dem ersten Korollar gibt es eine Fortsetzung $\tilde{F} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$. Setze $V = \{x \in X \mid \tilde{F}(x) \neq 0\}$ und

$$F(x) = \frac{1}{\|\tilde{F}(x)\|} \cdot \tilde{F}(x)$$ $\square$

Bem Ein metrischer Raum Z heißt
absoluter Extensor (AE) wenn gilt: ist X
ein metr. Raum, $A \subseteq X$ abg, $f: A \to Z$ stetig,
so gibt es eine Fortsetzung $F: X \to Z$.
Der Satz von Tietze sagt also: $\mathbb{R}$, $[0,1]$, $(0,1)$
sind AR
Man nennt Z absoluten Umgebungsextensor
(ANE) wenn gilt: ist X metr. Raum, $A \subseteq X$
abg, $f: A \to Z$ stetig, so läßt f sich
auf eine offene Umgebung $V \supseteq A$ fortsetzen.
Also ist S^n ein ANE.

10. Familien von Mengen und Überdeckungen

Sei X ein topologischer Raum. Eine Familie $(C_j)_{j\in J}$ von Teilmengen $C_j \subseteq X$ heißt

- <u>lokal endlich</u>, wenn jedes $v\in X$ eine Umgebung $W \subseteq$ hat, so dass $\{j\in J \mid C_j\cap W \neq \emptyset\}$ <u>endlich</u> ist.
- <u>offen</u> (<u>abg.</u>), wenn jede Menge C_j offen (abg.) in X ist.
- <u>Überdeckung</u>, wenn $X = \bigcup_{j\in J} C_j$ gilt.

Eine Überdeckung $(B_k)_{k\in K}$ <u>verfeinert</u> (die Überdeckung) $(C_j)_{j\in J}$, wenn es zu jedem $k\in K$ ein $j\in J$ gibt mit $B_k \subseteq C_j$.

11. Es gilt Folgendes:

a) Ist $(C_j)_{j\in J}$ lokal endlich, so gilt

$$\bigcup_{j\in J} \overline{C_j} = \overline{\bigcup_{j\in J} C_j} \qquad \boxed{\text{ÜA}}$$

und $\{\overline{C_j} \mid j\in J\}$ ist lokal endlich}

b) Ein Hausdorffraum X ist genau dann kompakt, wenn jede offene Überdeckung eine endliche offene Verfeinerung hat. $\boxed{\text{ÜA}}$

12. Def Ein Hausdorffraum X heißt parakompakt, wenn jede offene Überdeckung eine lokal endliche Verfeinerung hat. [Also sind kompakte Hausdorffräume parakompakt.]

Lemma Sei X parakompakt, $A, B \subseteq X$ abg. Angenommen, für jedes $b \in B$ gibt es offene Mengen U_b, V_b mit $A \subseteq U_b$, $b \in V_b$, $U_b \cap V_b = \emptyset$. Dann gibt es offene Mengen $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis Die offene Überdeckung $\{V_b \mid b \in B\} \cup \{X - B\}$ hat eine lokal endliche offene Verfeinerung $(W_j)_{j \in J}$. Sei $K = \{j \in J \mid W_j \cap B \neq \emptyset\}$. Für $k \in K$ gilt $A \cap \overline{W_k} = \emptyset$ und $B \subseteq \bigcup\{W_j \mid j \in K\}$. Weiter ist nach §1.11.a) $U = X - \bigcup\{\overline{W_j} \mid j \in K\}$ offen, $A \subseteq U$. Sei $V = \bigcup\{W_j \mid j \in K\} \supseteq B$ □

Korollar Parakompakte Räume sind normal.

Beweis Wende das Lemma an auf $A = \{a\}$, B abg, $a \notin B$. $\Rightarrow$ parakompakte Räume sind regulär (T_3). Noch mal das Lemma liefert die Normalität von X. □

13. **Lemma** (Schrumpf-Lemma)

Ist X parakompakt und ist $(U_j)_{j\in J}$ eine lokal endliche offene Überdeckung, so gibt es eine lokal endliche offene Überdeckung $(V_j)_{j\in J}$ mit $\overline{V_j}\subseteq U_j$.

Beweis: Zu jedem $j\in J$ und $x\in U_j$ wähle $Q_{x,j}$ offen mit $x\in Q_{x,j}\subseteq\overline{Q_{x,j}}\subseteq U_j$ (das geht, weil X regulär ist). Sei $(W_k)_{k\in K}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $\{Q_{x,j}\mid x\in X, j\in J\}$. Für jedes $k\in K$ wähle $\alpha(k)\in J$ mit $\overline{W_k}\subseteq U_{\alpha(k)}$. Setze

$V_j=\bigcup\{W_k\mid\alpha(k)=j\}\subseteq U_j$. Nach §1.11(a) gilt $\overline{V_j}=\bigcup\{\overline{W_k}\mid\alpha(k)=j\}\subseteq U_j$. Nach Konstruktion ist $X=\bigcup_{j\in J}V_j$, wegen $V_j\subseteq U_j$ ist $(V_j)_{j\in J}$ lokal endlich. □

14. Zerlegungen der Eins

Der **Träger** einer stetigen Abbildung $\varphi: X\to\mathbb{R}$ ist $\mathrm{supp}(\varphi)=\overline{\varphi^{-1}(\mathbb{R}-\{0\})}$. Eine Familie von stetigen Abbildungen $(\varphi_j: X\to[0,1])_{j\in J}$ heißt **Zerlegung der Eins**, wenn gilt:

- $(\mathrm{supp}(\varphi_j))_{j\in J}$ ist lokal endliche Überdeckung von X
- $\sum_{j\in J}\varphi_j(v)=1$ für alle $v\in X$

(das ist wegen der lokalen Endlichkeit wohldefiniert)

Ist $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung und gilt $\operatorname{supp}(\varphi_j)\subseteq U_j$, sagt man, die Zerlegung der Eins ist der offenen Überdeckung untergeordnet.

15. <u>Satz</u> Ist X parakompakt und ist $(U_j)_{j\in J}$ eine lokal endliche offene Überdeckung von X, so existiert eine untergeordnete Zerlegung der Eins.

<u>Bew:</u> Nach dem Schrumpf-Lemma §1.13 können wir lokal endliche Überdeckungen $(V_j)_{j\in J}$ und $(W_j)_{j\in J}$ finden mit $V_j\subseteq\overline{V_j}\subseteq W_j\subseteq\overline{W_j}\subseteq U_j$. Sei $\psi_j: X\to[0,1]$ eine Urysohn-Funktion mit $\psi_j|_{\overline{V_j}}=1$, $\psi_j|_{X-W_j}=0$ $\Rightarrow$ $\operatorname{supp}(\psi_j)\subseteq\overline{W_j}\subseteq U_j$. Zu jedem $v\in X$ gibt es j mit $v\in V_j$ $\Rightarrow$ $\psi_j(v)=1$. Damit ist

$$\psi(v)=\sum_{j\in J}\psi_j(v)$$

stetig (weil lokal stetig) und positiv. Setze $\varphi_j(v)=\psi_j(v)/\psi(v)$. □

Zerlegungen der Eins sind sehr nützlich, um topologische Probleme zu "lokalisieren": man macht eine Konstruktion im Kleinen (auf kleinen offenen Mengen zum Beispiel) und benutzt dann die Zerlegung der Eins, um die lokalen Daten zusammenzufügen.

Wir machen etwas anderes.

Wenn J endlich ist, so ist $\Phi : X \to \mathbb{R}^J$, $v \mapsto (\varphi_j(v))_{j \in J}$ eine stetige Abbildung. Das Bild liegt im Simplex.

$$\{ x \in \mathbb{R}^J \mid 0 \le x_j \le 1, \sum x_j = 1 \} \subseteq \mathbb{R}^J$$

16. Erinnerung: Ein (abstrakter) Simplizialkomplex ist eine Menge Δ von endlichen Teilmengen einer Menge V, mit $V = \bigcup \Delta$ und $a \subseteq b \in \Delta \Rightarrow a \in \Delta$. Die Elemente von Δ heißen Simplizes, genauer: die $(k+1)$-elementigen Teilmengen heißen k-Simplizes. Die Elemente von V heißen Vertizes.

Der Link von a (in Δ) ist

$$lk(a) = \{ b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset, a \cup b \in \Delta \}$$

und der Stern von a (in Δ) ist

$$st(a) = \{ b \in \Delta \mid a \cup b \in \Delta \}$$

Die Dimension von Δ ist $\max\{ k \mid$ es gibt ein k-Simplex in $\Delta \}$.

Die geometrische Realisierung $|\Delta|$ von Δ ist die Menge aller Funktionen $\varphi : V \to [0,1]$ mit

(1) $\operatorname{supp}(\varphi) \in \Delta$

(2) $\sum_{v \in V} \varphi(v) = 1$

Solch ein φ kann man mit dem Punkt $\sum \varphi(v) \cdot v \in \mathbb{R}^{(V)}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{(V)}$ mit Basis V auffassen.

Für $a \in \Delta$ sei $|a| = \{ \varphi \in |\Delta| \mid \operatorname{supp}(\varphi) \subseteq a \}$.

Darauf haben wir die "normale" Topologie von $\mathbb{R}^a$ $\cong \mathbb{R}^{\dim(a)+1}$

Die <u>schwache Topologie</u> auf $|\Delta|$ ist wie folgt definiert: $W \subseteq |\Delta|$ ist offen genau dann, wenn $W \cap |\alpha|$ offen in $|\alpha|$ ist, für jedes $\alpha \in \Delta$.
Der große Vorteil dieser Topologie ist, dass man stetige Abbildungen $|\Delta| \to Y$ simplex-weise konstruieren kann, und dass $|\Delta|$ ein CW-Komplex ist (also gute Homotopie-Eigenschaften hat).
Ist V endlich, so stimmt die schwache Topologie auf $|\Delta| \subseteq \mathbb{R}^{(V)}$ mit der Unterraumtopologie von $\mathbb{R}^{(V)}$ überein.
Siehe auch: Dugundji $\underline{\text{VIII}}.5$

17. <u>Nerven von Überdeckungen</u> Ist $(C_j)_{j \in J}$ eine (lokal endliche) Familie von Teilmengen von X, so ist der <u>Nerv</u> davon folgender Simplizialkomplex. Die Vertices sind diejenigen $j \in J$ mit $C_j \neq \emptyset$. Eine endliche Teilmenge $I \subseteq J$ bildet ein Simplex, wenn gilt

$$C_I = \bigcap_{j \in I} C_j \neq \emptyset$$

Wir schreiben für diesen Simplizialkomplex $\mathrm{Nerv}((C_j)_{j \in J})$.

18 **Lemma** Sei $(U_j)_{j\in J}$ eine lokal endliche offene Überdeckung des Raums X. Sei $(\varphi_j)_{j\in J}$ eine untergeordnete Zerlegung der Eins. Dann ist die Abbildung

$$\Phi : X \to |\mathrm{Nerv}(U_j)_{j\in J}| \qquad v \longmapsto \sum_{j\in J} \varphi_j(v)\cdot j \in \mathbb{R}^{(J)}$$

stetig.

Beweis Sei $W \subseteq X$ offen mit $I = \{ j \in J \mid W \cap U_j \neq \emptyset \}$ endlich. Auf W ist dann die Abbildung

$$w \longmapsto \sum_{j\in I} \varphi_j(w) \quad , \quad W \to \mathbb{R}^I \qquad \text{stetig.}$$

Also ist $W \to |\mathrm{Nerv}((U_j \cap W)_{j\in J})|$ stetig. Die Inklusion $|\mathrm{Nerv}((U_j\cap W)_{j\in J})| \hookrightarrow |\mathrm{Nerv}(U_j)_{j\in J}|$ ist Simplex-weise stetig, also auch stetig. Auf W haben wir damit

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\text{stetig}"] \arrow[dr, "\Phi"'] & {|\mathrm{Nerv}(U_j\cap W)_{j\in J}|} \arrow[d, "\text{stetig}"] \\ & {|\mathrm{Nerv}(U_j)_{j\in J}|} \end{tikzcd}$$

damit ist Φ auf W stetig, also stetig. $\square$

Wir nennen Φ die <u>kanonische Abbildung</u> der Zerlegung der Eins.

18. Ist $(V_k)_{k\in K}$ eine lokal endliche offene Verfeinerung von $(U_j)_{j\in J}$, dann gibt es eine Abbildung $\alpha : K \to J$ so, dass $V_k \subseteq U_{\alpha(k)}$ gilt. Diese Abbildung setzt sich linear fort zu einer stetigen Abbildung

$$\alpha : |Ner(V_k)_{k\in K}| \to |Ner(U_j)_{j\in J}|$$

__Lemma__ Angenommen, $(U_j)_{j\in J}$ und $(V_k)_{k\in K}$ sind lokal endliche offene Überdeckungen von X. Angenommen, $(\varphi_j)_{j\in J}$ und $(\psi_k)_{k\in K}$ sind untergeordnete Zerlegungen der Eins, mit kanonischen Abbildungen $\Phi : X \to |Ner(U_j)_{j\in J}|$ und $\Psi : X \to |Ner(V_k)_{k\in K}|$. Angenommen, $\alpha : K \to J$ ist eine Abbildung mit $V_k \subseteq U_{\alpha(k)}$ (d.h. $(V_k)_{k\in K}$ verfeinert $(U_j)_{j\in J}$). Dann sind $\alpha \circ \Psi$ und Φ homotop,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\Phi"'] & {|Ner(V_k)_{k\in K}|} \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, phantom, "\simeq"] \\
 & {|Ner(U_j)_{j\in J}|}
\end{tikzcd}$$

__Beweis__ Sei $J(x) = \{ j \in J \mid x \in U_j \}$ $K(x) = \{ k \in K \mid x \in V_k \}$.
Dann gilt $J(x) \in Ner((U_j)_{j\in J})$ und $\Phi(x) \in |J(x)|$, entsprechend für $K(x)$. Weiter ist $\alpha(K(x)) \subseteq J(x)$, also $\alpha|K(x)| \subseteq |J(x)|$.

d.h. $\alpha(\Psi(x)), \Phi(x) \in |\mathfrak{J}(x)|$. Damit ist die Abb

$$h : X \times [0,1] \longrightarrow |N_{\mathcal{U}}(U_j)_{j\in J}|$$
$$(x,t) \longmapsto h_t(x) = t\cdot\alpha(\Psi(x)) + (1-t)\cdot\Phi(x)$$

wohldefiniert. Ist $W \subseteq X$ offen und $J_0 = \{j \in J \mid U_j \cap W \neq \phi\}$ sowie $K_0 = \{k \in K \mid V_k \cap W \neq \phi\}$ endlich, so ist h stetig auf $W \times [0,1]$, also stetig. $\square$ #

19. Sind $(A_j)_{j\in J}$ und $(B_j)_{j\in J}$ Überdeckungen mit $A_j \subseteq B_j$ für alle $j \in J$, so gilt offensichtlich

$$N_{\mathcal{U}}((A_j)_{j\in J}) \subseteq N_{\mathcal{U}}(B_j)_{j\in J}.$$

Wenn "=" gilt, d.h. $A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m} \neq \phi \Leftrightarrow B_{j_1} \cap \ldots \cap B_{j_m}$ so heißt $(B_j)_{j\in J}$ <u>Verdickung</u> (und $(A_j)_{j\in J}$ <u>Verschlankung</u>).

<u>Lemma</u> Sei X parakompakt und $(F_j)_{j\in J}$ eine lokal endliche abg. Überdeckung von X. Dann gibt es eine lokal endliche offene Verdickung $(U_j)_{j\in J}$.

<u>Bew:</u> Zu jedem Punkt $x \in X$ wählen wir eine offene Umgebung V_x so, dass aus $V_x \cap F_j \neq \phi$ folgt $x \in F_j$. Da X normal ist, hat x eine offene Umgebung Q_x mit $\overline{Q_x} \subseteq V_x$. Sei $(W_k)_{k\in K}$ lokal endliche offene Verfeinerung von $\{Q_x \mid x \in X\}$. Sei

$$U_j = X - \bigcup\{\overline{W_k} \mid k \in K \text{ und } \overline{W_k} \cap F_j = \phi\}$$

Dann ist U_j offen und $F_j \subseteq U_j$. Insbes. ist $(U_j)_{j\in J}$ eine offene Überdeckung von X.

Angenommen, $W_k \subseteq Q_x$ und $U_j \cap W_k \neq \emptyset$. Dann ist $F_j \cap \overline{W_k} \neq \emptyset$, also $F_j \cap V_x \neq \emptyset$, also $x \in F_j$.

Damit ist $\{j \in J \mid U_j \cap U_k \neq \emptyset\}$ endlich. Falls gilt $z \in W_k \cap U_{j_1} \cap \ldots \cap U_{j_m}$, so gilt $x \in F_{j_1} \cap \ldots \cap F_{j_m}$ $\square$

Mit dem vorigen Lemma und einer $(U_j)_{j\in J}$ untergeordneten Zerlegung der Eins $(\varphi_j)_{j\in J}$ erhalten wir eine stetige Abbildung

$$\Phi : X \longrightarrow |N_{\sigma}((F_j)_{j\in J})\ldots|$$

Ist $(U_j')_{j\in J}$ eine andere Verdickung (mit Zerlegung der Eins $(\varphi_j')_{j\in J}$), so ist auch $(U_j \cap U_j')_{j\in J}$ eine Verdickung (mit Zerlegung der Eins $(\varphi_j'')_{j\in J}$), so gilt nach § 1.18 $\Phi' \simeq \Phi'' \simeq \Phi$, der Homotopietyp von Φ ist also unabhängig von der Wahl der Verdickung.

Wir konstruieren jetzt Abbildungen $|N_{\sigma}(F_j)_{j\in J}| \to X$. Dazu brauchen wir ein paar Begriffe aus der Homotopietheorie, sowie Baryzentrische Unterteilungen.

20. __Baryzentrische Unterteilung__ Sei Δ ein Simplizialkomplex. Die Baryzentrische Unterteilung $sd(\Delta)$ ist der Simplizialkomplex mit Eckenmenge Δ. Die nichtleeren Simplices von $sd(\Delta)$ sind endliche Ketten $\{a_0 \subseteq a_1 \subseteq .. \subseteq a_m\} \subseteq \Delta$, $a_0 \neq \emptyset$ von Simplices. Geometrische Idee: jedem Simplex $a \in \Delta$ wird ein neuer Vertex, sein Schwerpunkt zugeordnet

Wir haben einen kanonischen Homöomorphismus

$$\rho : |sd(\Delta)| \xrightarrow{\cong} |\Delta|$$

wie folgt. Jedem Simplex $a \in \Delta$ ordnen wir $\rho(a) \in |a|$ zu, $\rho(a) = \frac{1}{\# a} \sum_{v \in a} v$. Diese Abbildung setzen wir affin linear fort zu einem Homöomorphismus. $\boxed{\text{ÜA}}$

Das __n-Gerüst__ von Δ ist $\Delta^{(n)} = \{a \in \Delta \mid \dim(a) \leq n\}$, ein Unterkomplex von Δ

21. __Def__ Ein topologischer Raum Z heißt __n-zush.__, wenn für jedes $k \leq n$ jede stetige Abbildung $f : S^k \to Z$ eine stetige Fortsetzung $F : D^{k+1} \to Z$ hat ($D^{k+1} = \{v \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \|v\|_2 \leq 1\}$).

0-zush = wegzush

1-zush = wegzush + $\pi_1(Z,p) = 0$ $\boxed{\text{ÜA}}$

Lemma Ein kontrahierbarer Raum ist n-zush., für alle $n \geq 0$.

Beweis $\boxed{\text{ÜA}}$ $\square$

22. Lemma vom azyklischen Träger

Sei Δ ein Simplizialkomplex. Für jedes Simplex $a \in \Delta$ sei ein Unterraum $C_a \subseteq X$ in einem topologischen Raum X gegeben, so dass $a \subseteq b \Rightarrow C_a \subseteq C_b$.

(1) Wenn jedes C_a $\dim(a)$-zusammenhängend ist, so gibt es eine stetige Abbildung $|\Delta| \xrightarrow{\alpha} X$ mit $\alpha(|a|) \subseteq C_a$ für alle $a \in \Delta$.

(2) Ist $\beta : |\Delta| \to X$ stetig mit $\beta(|a|) \subseteq C_a$ für alle $a \in \Delta$ und ist jedes C_a $\dim(a)+1$-zush., so sind α (aus (1)) und β homotop.

Beweis (1) Für jedes 0-Simplex $a = \{v\}$ wähle $\alpha(a) \in C_a$. Damit ist $\alpha : |\Delta^{(0)}| \to X$ stetig. Ist nun α auf $|\Delta^{(n)}|$ definiert und ist a ein $(n+1)$ Simplex, so ist $|\Delta^{(n)}| \cap |a| \cong S^n$ $\boxed{\text{ÜA}}$. Da C_a $(n+1)$-zush. ist, gibt es eine Fortsetzung auf $|\Delta^{(n)}| \cup |a|$. Nach Definition der schwachen Topologie passen diese Fortsetzungen zusammen zu einer stetigen Abbildung $|\Delta| \xrightarrow{\alpha} X$.

② Genauso konstruieren wir $h: |\Delta| \times [0,1] \to X$. Dazu brauchen wir nur, dass $|\Delta| \times [0,1]$ die schwache Topologie bzgl. der Mengen $|a| \times [0,1]$, $a \in \Delta$, trägt $\boxed{\text{ÜA}}$. Ist h auf $|\Delta^{(n)}| \times [0,1]$ definiert und a ein $(n+1)$-Simplex, so ist $|a| \times \{0,1\} \cup \bigcup_{b \subsetneq a} (|b| \times [0,1]) \cong S^{n+1}$ und eine Fortsetzung existiert nach Voraussetzung. $\square$

23. Theorem (Nerv-Satz) Sei X parakompakt, sei $(C_j)_{j \in J}$ eine lokal endliche offene oder abg. Überdeckung von X. Falls die C_j abg sind, sei $(U_j)_{j \in J}$ eine Verdickung; sonst sei $U_j = C_j$. Sei $\Delta = \mathrm{Nerv}(C_j)_{j \in J}$ und $\Phi: X \to |\Delta|$ kanonische Abb. bzgl. einer $(U_j)_{j \in J}$ untergeordneten Zerlegung der Eins $(\varphi_j)_{j \in J}$. Für $a \in \Delta$ sei $C_a = \bigcap_{j \in a} C_j$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn gilt:

jedes C_a ist $(n - \dim(a))$-zush

so existiert eine stetige Abbildung $\alpha: |\Delta^{(n+1)}| \to X$ so, dass $\Phi \circ \alpha$ homotop ist zu

$$\mathrm{inc}: |\Delta^{(n+1)}| \hookrightarrow |\Delta|.$$

Wenn das für jedes $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, erhalten wir

$\alpha : |\Delta| \to X$ mit $\Phi \circ \alpha \simeq id_{|\Delta|}$.

<u>Beweis</u> Das Problem ist zunächst, dass $a \leq b \Rightarrow C_a \supseteq C_b$!

Deswegen betrachten wir $sd(\Delta)$. Für einen m-Simplex

$\underline{a} = \{a_0 \subset a_1 \subset \dots \subset a_m\} \in sd(\Delta)$ sei

$C_{\underline{a}} = C_{a_0}$. Nun gilt: $\underline{a} \leq \underline{b} \Rightarrow C_{\underline{a}} \leq C_{\underline{b}}$

Weiter gilt $\dim_\Delta(a_m) - \dim_\Delta(a_0) \geq m$

$\Rightarrow \quad n - \dim_\Delta(a_0) \geq m$

Da C_{a_0} $(n - \dim(a_0))$ zush ist, können wir § 1.22 (1) anwenden und erhalten

$$\alpha : |sd(\Delta^{(n)})| \longrightarrow X$$

mit $\alpha(\underline{a}) \subseteq C_{a_0}$. Weiter gilt $\Phi(U_j) \subseteq |st_\Delta(\{j\})|$

und allgemein $\Phi(\bigcap\limits_{j \in a_0} C_j) \subseteq \Phi(\bigcap\limits_{j \in a_0} U_j) \subseteq |st_\Delta(a_0)|$

Nun ist $|st_\Delta(a)|$ kontrahierbar, falls $a \neq \emptyset$. $\boxed{\text{Ü1}}$

Es gilt $|\underline{a}| \subseteq |st(a_0)|$, nach § 1.22.(2) sind die Abbildungen homotop.

$\square$

24. <u>Theorem</u> (Topologischer Helly-Satz)

Sei Z parakompakt und seien $C_0, \dots, C_m \subseteq Z$ abg. Teilmengen. Für $a \subseteq \{0, \dots, m\}$ sei $C_a = \bigcap_{j \in a} C_j$. Angenommen, für jedes $\emptyset \neq a \subsetneq \{0, \dots, m\}$ ist C_a kontrahierbar. Dann ist entweder $C_0 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$, oder es gibt stetige Abbildung

$$\begin{tikzcd} S^{m-1} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, equal, "\simeq"'] & X \subseteq Z \arrow[d, "\Phi"] \\ & S^{m-1} \end{tikzcd} \quad \text{mit} \quad \Phi \circ \alpha \simeq \mathrm{id}_{S^m}.$$

$$X = C_0 \cup \dots \cup C_m$$

<u>Beweis</u> Sei $X = C_0 \cup \dots \cup C_m \subseteq Z$. Dann ist X abg. in Z, also parakompakt. Angenom $C_0 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$. Dann ist $|\mathrm{Nerv}((C_j)_{j=0}^m)| \simeq S^{m-1}$. Wir erhalten die Beh. aus § 1.23. $\square$

In Anwendungen will man typischerweise zeigen, dass die Alternative

$$\begin{tikzcd} S^{m-1} \arrow[r] \arrow[dr, equal, "\simeq"'] & X \subseteq Z \arrow[d] \\ & S^{m-1} \end{tikzcd}$$

unmöglich ist.

Dazu braucht man etwas algebraische Topologie.

25. <u>Homotopiefaktoren</u> Ein Homotopie(ko)funktor ist ein (Ko)Funktor $\underline{\mathrm{HTop}} \xrightarrow{H} \underline{\mathrm{Ab}}$, d.h.

① Für jeden top. Raum X ist $H(X)$ eine abelsche Gruppe

② Für jede stetige Abb $X \xrightarrow{f} Y$ ist $H(f): H(X) \to H(Y)$ (bzw $H(f): H(X) \leftarrow H(Y)$) ein Homomorphismus

③ $H(f \circ g) = H(f) \circ H(g)$ (bzw $H(f \circ g) = H(g) \circ H(f)$) und $H(id_X) = id_{H(X)}$

④ Sind f und f' homotop, so gilt $H(f) = H(f')$.

<u>Beispiele:</u> singuläre (Ko)Homologie, Čech- oder Alexander Kohomologie, K-Theorie, ...

Wichtig für uns: m-dimensionale singuläre Homologie $X \mapsto H_m(X)$ ist so ein Homotopiefunktor, mit folgenden Eigenschaften:

① $$H_m(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = n > 0 \quad \text{oder} \quad m = 0 < n \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & m = 0 = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

② Ist M eine top. n-Mannigfaltigkeit (z B $M = \mathbb{R}^n$, oder offene Teilmenge davon), so ist
$$H_m(M) = 0 \quad \text{für} \quad m > n$$

③ Ist Δ ein n-dim. Simplizialkomplex, so ist $H_m(|\Delta|) = 0$ für $m > n$

④ $$H_m(\{pt\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ (gilt auch für kontrahierbare Räume)

26 Satz (Hellys Theorem für Mannigfaltigkeiten)

Sei M eine parakompakte n-Mannigfaltigkeit, seien $C_0, \dots, C_m \subseteq M$ abg. Für $a \subseteq \{0, \dots, m\}$ sei $C_a = \bigcap_{j \in a} C_j$. Wenn für jedes $\emptyset \neq a \subsetneq \{0, \dots, m\}$ C_a kontrahierbar ist und wenn $m-1 > n$ ist, so ist $C_0 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$.

Beweis Wir wenden $(m-1)$-dim. singuläre Homologie auf das Diagramm aus §1.24 an auf $C_0 \cup \dots \cup C_m \subseteq W \subseteq M$

$\uparrow$ §1.9 offene Teilmenge $\leadsto$ Mannf.

$$\begin{tikzcd} H_{m-1}(S^{m-1}) \arrow[r] \arrow[dr, equal] & H_{m-1}(W) = 0 \arrow[d] \\ & H_{m-1}(S^{m-1}) \end{tikzcd}$$

$\square$

Korollar Sind $C_0, \dots, C_m$ abg. konvexe Mengen im $\mathbb{R}^n$, $m-1 \geq n$, und gilt für alle $\emptyset \neq a \subsetneq \{0, \dots, m\}$ $C_a \neq \emptyset$, so ist $C_0 \cap \dots \cap C_m \neq \emptyset$.

Beweis Die C_a sind konvex, also kontrahierbar. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt $H_{m-1}(W) = 0$, falls $m-1 \geq n$ ist. $\square$

Für die Räume, die uns später interessieren, brauchen wir einen topologischen Dimensionsbegriff.

27. Def Ein normaler Raum X hat Überdeckungsdimension (Čech-Lebesgue-Dimension) $\dim(X) \leq n$, wenn gilt: jede endliche offene Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ hat eine endliche offene Verfeinerung $(W_k)_{k \in K}$ mit $\dim(\mathrm{Nerv}(W_j)_{j \in J})) \leq n$. Man setzt $\dim(\emptyset) = -1$ und $\dim(X) = \min\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid \dim(X) \leq n\}$.

Vgl Engelking, Ch 7

Fakten ① Ist $A \subseteq X$ abg, so ist $\dim(A) \leq \dim(X)$

② Es gilt $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (das ist ein schwerer Satz!), für jede parakompakte n-Mf $M \neq \emptyset$ gilt $\dim(M) = n$.

Theorem (Engelking 7.2.4) Ein normaler Raum X hat $\dim(X) \leq n$ genau dann, wenn es zu jeder lokal endlichen offenen Überdeckung $(U_j)_{j \in J}$ von X eine offene Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ mit $V_j \subseteq U_j$ gibt, so dass

$$\dim \mathrm{Nerv}((V_j)_{j \in J}) \leq n.$$

$\square$

28. Satz (Hellys Theorem für n-dimensionale Räume)

Sei X parakompakt mit $\dim(X) \leq n$, seien $C_0, \ldots, C_m \subseteq X$ abg. Sei $m-1 > n$. Wenn für jedes $\emptyset \neq a \subsetneqq \{0, \ldots, m\}$ gilt, dass

$$C_a = \bigcap_{j \in a} C_j \quad \text{kontrahierbar ist, so ist}$$

$C_0 \cap \ldots \cap C_m \neq \emptyset$.

<u>Beweis</u> Wir betrachten den Raum $Z = C_0 \cup \ldots \cup C_m$. Es gilt $\dim(Z) \leq n$. Sei $\{U_0, \ldots, U_m\}$ Verdickung von $\{C_0, \ldots, C_m\}$. Es gibt eine Verfeinerung $(V_k)_{k \in K}$ mit $\dim(\mathrm{Nerv}(V_k)_{k\in K}) \leq n$.

$$\begin{tikzcd}
{|\mathrm{Nerv}((C_j)_{j\in J})|} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\cong"'] & Z \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\Phi\ \cong\ \S 1.18"] & {|\mathrm{Nerv}((V_k)_{k\in K})|} \arrow[dl] \\
 & {|N((C_j)_{j\in J})|} &
\end{tikzcd}$$

Wenn $C_0 \cap \ldots \cap C_m = \emptyset$, so ist $|\mathrm{Nerv}(C_j)_{j\in J}| \cong \mathbb{S}^{m-1}$. Anwenden von H_{m-1} liefert

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{H_{m-1}(\mathbb{S}^{m-1})}_{\neq 0} \arrow[r] \arrow[dr, equal] & H_{m-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{m-1}(|\mathrm{Nerv}(V_k)|) = 0 \arrow[dl] \\
 & H_{m-1}(\mathbb{S}^{m-1}) &
\end{tikzcd}$$

ein Widerspruch. $\square$