Prof. Dr. L. Kramer
PD Dr. K. Halupczok
Dipl.-Math. O. Varghese

WS 13/14

8. Hausaufgabenblatt zur Linearen Algebra I

(**Abgabe:** bis Freitag 13.12.2013, 8:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Stichworte zur Vorbereitung: Abelsche Gruppen, Aufgabe 5.3, Körper, K-Vektorräume, Untervektorräume.

Aufgabe 8.1

i) Zeigen Sie, dass die Parabel $P = \left\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$ kein Untervektorraum ist.

ii) Seien $X = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $Y = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ Teilmengen von $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass X und Y Untervektorräume sind, aber $X \cup Y$ kein Untervektorraum ist.

iii) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller reellen Folgen. Wir bezeichnen mit $K \subseteq V$ die Menge aller konvergenter Folgen und mit $N \subseteq V$ die Menge aller Nullfolgen. Zeigen Sie, dass N und K Untervektorräume sind.

iv) Sei K ein Körper. Wir definieren

$$U := \left\{(x, y, z) \in K^3 \mid x + y + z = 0\right\}.$$

Zeigen Sie, dass $U \subseteq K^3$ ein Untervektorraum ist.

Aufgabe 8.2

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Sei weiter $U \subseteq V$ eine nichtleere Menge, so dass für alle $u_1, u_2 \in U$ und $k \in K$ gilt: $u_1 + u_2 k \in U$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 8.3

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie, dass $U_1 \cup U_2$ genau dann ein Untervektorraum von V ist, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$ gilt.

Aufgabe 8.4

Sei $(V, +)$ eine nicht notwendig kommutative Gruppe und sei weiter $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Weiter sei eine Verknüpfung gegeben

$$\begin{aligned} V \times K &\to V \\ (v, a) &\mapsto va \end{aligned}$$

mit den Eigenschaften $(i), (ii), (iii)$ und (iv) aus §2 Definition 1. Zeigen Sie, dass $(V, +)$ abelsch ist.