1. Übungszettel zur Vorlesung „Liegruppen“

WS 2018/19 — Prof. Dr. Linus Kramer
WWU Münster — Antoine Beljean

Aufgabe 1.1 (2+2 Punkte)
Es sei $q : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen, $B \subseteq Y$ eine beliebige Teilmenge und $A = q^{-1}(B)$. Frischen Sie Ihre Kenntnisse über Quotientenabbildungen auf und beweisen oder widerlegen Sie dann die folgenden Behauptungen.

(1) Wenn q eine Quotientenabbildung ist, dann ist auch die Einschränkung $q|_A^B : A \longrightarrow B$ eine Quotientenabbildung.
(2) Wenn q eine offene Abbildung ist, dann ist die Einschränkung $q|_A^B : A \longrightarrow B$ offen bezüglich der Teilraumtopologien auf A, B.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)
Es sei G eine Gruppe und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von G. Zeigen Sie: es gibt genau eine bezüglich "$\subseteq$" minimale Topologie $\mathcal{T}$ auf G mit $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, so dass G bezüglich $\mathcal{T}$ eine topologische Gruppe ist.

Hinweis: betrachten Sie die Menge aller Topologien auf G, bezüglich derer G eine topologische Gruppe ist.

Aufgabe 1.3 (1+1+2 Punkte)
Es sei $\mathcal{B} = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Zeigen Sie:

(1) $\mathcal{B}$ is die Basis einer Hausdorff'schen Topologie $\mathcal{S}$ auf $\mathbb{R}$.
(2) Bezüglich dieser Topologie $\mathcal{S}$ ist die Addition $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto x+y$ stetig.
(3) Bezüglich dieser Topologie $\mathcal{S}$ ist $\mathbb{R}$ keine topologische Gruppe.

Hinweis zu (3): benutzen Sie (1) und geben Sie eine Umgebungsbasis von 0 *an.*

Aufgabe 1.4 (4 Punkte)
Es sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie direkt: wenn G Hausdorff'sch ist, dann ist G regulär (ein T_3-Raum).

Hinweis: Zeigen Sie zuerst: wenn W eine offene Umgebung des Neutralelementes ist, dann gilt $\overline{W} \subseteq W \cdot W$.

***-Aufgabe** (1+1+1+1 Punkte)
Auf dem Intervall $I = [0, 1]$ definieren wir eine Verknüpfung $*$ durch $a * b = \min\{a, b\}$. Zeigen Sie:

(1) $(I, *)$ ist ein abelsches Monoid (eine kommutative Halbgruppe mit Neutralelement).
(2) Die Verknüpfung $*$ ist stetig auf $I \times I$.
(3) Ist $*$ differenzierbar?
(4) Es gibt keine Verknüpfung $\cdot$ auf I, bezüglich derer der topologische Raum I eine topologische Gruppe ist.

Hinweis zu (4): Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass jeder Homöomorphismus von I auf sich die Menge $\{0, 1\}$ invariant lässt.

Abgabe bis: Donnerstag, den 18.10.2018, 8 Uhr