Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese

SS 15

9. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 19.06.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 9.1

Seien X, Y topologische Räume. Weiter sei Y ein kompakter Hausdorff-Raum.

(i) Zeigen Sie, dass die Projektion auf die erste Komponente

$$\mathrm{pr}_1 : X \times Y \to X$$

eine abgeschlossene Abbildung ist, d.h.: für $A \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist $\mathrm{pr}_1(A) \subseteq X$ abgeschlossen.

(ii) Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Die Abbildung f ist genau dann stetig, wenn ihr Graph $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 9.2

(i) Sei $K = [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$ und $\varphi : K \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$. Zeigen Sie: zu jedem $\epsilon > 0$ existieren Zahlen $a_k, b_k \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left|\varphi(p) - \sum_{k=0}^{m} a_k \cos(kp) + b_k \sin(kp)\right| < \epsilon$$

für alle $p \in K$ gilt.

(ii) Sei $K = [0, 1] \times [0, 1]$ und $\varphi : K \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: zu jedem $\epsilon > 0$ existieren Zahlen $a_{k,l} \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left|\varphi(u, v) - \sum_{0 \leq k,l \leq m} u^k v^l a_{k,l}\right| < \epsilon$$

für alle $(u, v) \in K$ gilt.

Aufgabe 9.3

Sei K ein kompakter metrischer Raum, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} \subseteq C(K, \mathbb{R})$. Zeigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Wenn jedes $f \in \mathcal{F}$ λ-Lipschitz-stetig ist, dann ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig.

(ii) Sei $K = [0, 1]$. Dann ist $\mathcal{F} = \{x \mapsto x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gleichgradig stetig.

-bitte wenden-

Aufgabe 9.4

Definition: Ein Punkt x in einem topologischen Raum X heißt **isoliert**, wenn die Menge $\{x\}$ offen in X ist.

Zeigen Sie: Ein kompakter Hausdorffraum ohne isolierte Punkte ist überabzählbar.

Anleitung: Es sei X ein kompakter Hausdorffraum ohne isolierte Punkte. Zeigen Sie:

(i) Sind ein $x \in X$ und eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq X$ beliebig gegeben, so existiert eine nichtleere offene Teilmenge $V \subseteq U$ mit $x \notin \overline{V}$.

(ii) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X. Dann gibt es eine absteigende Kette

$$\overline{V}_1 \supseteq \overline{V}_2 \supseteq \overline{V}_3 \supseteq \dots$$

abgeschlossener nichtleerer Teilmengen von X mit $x_n \notin \overline{V}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in X, so gibt es ein $y \in X$ mit $y \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) X ist nicht abzählbar.

***-Aufgabe**

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$U(a, b) = \{an + b \mid n \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Menge

$$\mathcal{B} := \{U(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, \operatorname{ggT}(a, b) = 1\}$$

ist eine Basis einer Topologie auf $\mathbb{N}$.

(ii) Die Menge $\{kp \mid k \in \mathbb{N}\}$ ist für $p \in \mathbb{N}$ prim abgeschlossen in $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$.

(iii) Die Menge $\operatorname{Int}(\{p \mid p \text{ prim}\})$ ist leer.

(iv) Der Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ ist zusammenhängend.

(v) Der Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ ist Hausdorffsch.

Zusammenfassung: Der Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$ ist ein abzählbarer zusammenhängender Hausdorffraum.