Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese

SS 15

6. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 22.05.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 6.1

Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Räume und seien $A_i \subseteq X_i$ für $i \in I$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\mathrm{Cl}(\prod_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathrm{Cl}(A_i).$$

Aufgabe 6.2

Definition Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt **zusammenhängend**, wenn er außer X und $\emptyset$ keine Teilmengen hat, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

(i) Zeigen Sie: X ist genau dann nicht zusammenhängend, wenn er sich als disjunkte Vereinigung $A \cup B$ nichtleerer offener (oder abgeschlossener) Mengen schreiben lässt.

(ii) Zeigen Sie: X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abildung $X \to \{0, 1\}$ konstant ist.

(iii) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, dass $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ zusammenhängend ist.

(iv) Sei X ein topologischer Raum und C Menge von zusammenhängenden Teilmengen in X mit $X = \bigcup C$. Zeigen Sie: Wenn $\bigcap C \neq \emptyset$, dann ist X zusammenhängend.

Aufgabe 6.3

Es sei $\{0, 1\}$ mit der diskreten Topologie versehen und $X := \prod_{\mathbb{N}} \{0, 1\}$ mit der Produkttopologie.

(i) Ein topologischer Raum heißt **total unzusammenhängend**, wenn nur einelementige Teilmengen zusammenhängend sind.
Zeigen Sie, dass X total unzusammenhängend ist.

(ii) Ein topologischer Raum heißt **perfekt**, wenn jeder Punkt ein Häufungspunkt ist.
Zeigen Sie, dass X perfekt ist.

Aufgabe 6.4

Sei X ein normaler zusammenhängender Raum, der mindestens zwei verschiedene Punkte enthält. Zeigen Sie, dass X nicht abzählbar ist.

*-Aufgabe

Sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(i) Wenn $A \subseteq G$ zusammenhängend ist mit $e \in A$, dann ist $\langle A \rangle \subseteq G$ zusamenhängend.

(ii) Sei
$$G^\circ = \bigcup \{A \subseteq G \mid A \text{ zusammenhängend}, e \in A\}$$
Dann ist G°zusammenhängend und ein Normalteiler.

(iii) Die Faktorgruppe G/G° ist immer eine Hausdorffsche topologische Gruppe.

(iv) Die Faktorgruppe G/G° ist total unzusammenhängend.