Prof. Dr. L. Kramer SS 15
Dr. O. Varghese

5. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 15.05.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 5.1

Für $i = 1, 2$ seien X_i, Y_i topologische Räume und $f_i : X_i \to Y_i$ stetige Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 &\to Y_1 \times Y_2 \\ (x_1, x_2) &\mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2)) \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 5.2

Es sei X ein topologischer Raum und Y eine Menge. Weiter sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Es sei

$$\mathcal{T} = \left\{ U \subseteq Y \mid f^{-1}(U) \text{ offen in } X \right\}.$$

(i) Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist eine Topologie auf Y.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{T}'$ eine beliebige Topologie auf Y, bezüglich derer f stetig ist, so ist $\mathcal{T}'$ gröber als $\mathcal{T}$.

(iii) Es sei Z ein topologischer Raum und $g : Y \to Z$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Wenn $g \circ f$ stetig ist, dann ist auch g stetig bezüglich $\mathcal{T}$.

Bemerkung: Wenn die Abbildung f surjektiv ist, so nennt man $(Y, \mathcal{T})$ auch einen Quotientenraum von X (warum wohl?).

Aufgabe 5.3

Zeigen Sie:

(i) Die Sorgenfrey-Topologie auf $\mathbb{R}$ ist normal.

(ii) Wenn X normal und $Y \subseteq X$ abgeschlossen ist, so ist Y normal in der Unterrraumtopologie.

-bitte wenden-

Aufgabe 5.4

Wir betrachten das abzählbar unendliche kartesische Produkt des Einheitsintervalls $[0,1]$ mit sich selbst:

$$[0,1]^{\mathbb{N}} := \prod_{\mathbb{N}} [0,1] = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_i \in [0,1] \text{ für alle } i \in \mathbb{N}\}$$

Wir betrachten die folgenden topologischen Räume:

1. $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\text{Prod}})$ Dabei sei $\mathcal{T}_{\text{Prod}}$ die Produkttopologie auf $[0,1]^{\mathbb{N}}$, wobei $[0,1]$ mit der üblichen Topologie versehen ist.
2. $([0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{T}_{\infty})$ Dabei sei $\mathcal{T}_{\infty}$ die durch die Supremumsmetrik d_{∞} induzierte Topologie, wobei
$$d_{\infty}((x_i),(y_i)) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|.$$
3. $([0,1]^{\mathbb{N}} \cap l^2, \mathcal{T}_2)$ Dabei sei $\mathcal{T}_2$ die durch die Euklidische Metrik d_2 induzierte Topologie, wobei
$$d_2((x_i),(y_i)) = \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |x_i - y_i|^2} \text{ und } l_2 = \left\{ (x_i) \text{ reelle Folge} \,\middle|\, \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\}$$

Untersuchen Sie die Topologien auf Vergleichbarkeit, d. h. bestimmen Sie für jedes Paar obige Räume, welche Topologie auf dem jeweils gemeinsamen Punktraum feiner oder gröber ist oder ob sie nicht vergleichbar sind.

***-Aufgabe**

Definition: Sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G. Wenn die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \to & G \\ (g,h) & \mapsto & gh^{-1} \end{array}$$

stetig ist, heißt $(G, \mathcal{T})$ **topologische Gruppe**.

Sei G eine topologische Gruppe. Zeigen Sie:

(i) G ist Hausdorffsch genau dann, wenn $\{e\} \subseteq G$ abgeschlossen ist.

(ii) Die Abbildungen $g \mapsto g^{-1}$ und $(g,h) \mapsto gh$ sind stetig.

Sei N ein Normalteiler in G. Versehe G/N mit der Topologie aus Aufgabe 5.2 bezüglich $\pi : G \to G/N, g \mapsto gN$. Zeigen Sie:

(iii) Wenn $U \subseteq G$ offen ist, so ist $\pi(U) \subseteq G/N$ offen.

(iv) G/N ist eine topologische Gruppe.

(v) G/N ist Hausdorffsch genau dann, wenn $N \subseteq G$ abgeschlossen ist.