Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese SS 15

11. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 10.07.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 11.1

Zeigen Sie, dass die Alexandrovs Halbgerade einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 11.2

Definition: Ein topologischer Raum X heißt *separabel*, falls eine abzählbare Teilmenge $A \subseteq X$ mit $\overline{A} = X$ existiert.

i) Sei X ein separabler topologischer Raum und Y ein topologischer Raum. Weiter sei $f : X \to Y$ stetig und surjektiv. Zeigen Sie, dass Y separabel ist.
ii) Sei X ein metrischer separabler Raum. Zeigen Sie, dass X eine abzählbare Basis besitzt.

Aufgabe 11.3

i) Sei X ein regulärer topologischer Raum. Zeigen Sie, dass es für alle $p, q \in X$, mit $p \neq q$ Umgebungen U, V mit $p \in U$ und $q \in V$ mit $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$ existieren.
ii) Sei X ein regulärer topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge. Zeigen Sie, dass U als abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen geschrieben werden kann.

Aufgabe 11.4

Definition: Für (nichtleere) Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ definieren wir $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

i) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beliebig, so ist $A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.
ii) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $A + B \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen.

Aufgabe 11.5

i) Sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subseteq X$ kompakt. Weiter sei $y \in X \setminus K$ beliebig. Zeigen Sie, dass offene Mengen $U, V \subseteq X$ existieren mit $K \subseteq U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.
ii) Sei X ein T_1-Raum und sei $Z \subseteq X$ eine beliebige (nichtleere) Teilmenge. Dann gilt

$$Z = \bigcap \{U \subseteq X \mid U \text{ ist offen und } Z \subseteq U\}.$$