Prof. Dr. L. Kramer
Dr. O. Varghese SS 15

10. Hausaufgabenblatt zur Grundlagen der Analysis, Topologie und Geometrie

(**Abgabe:** bis Freitag 03.07.2015, 14:15 Uhr in die Zettelkästen im Hörsaalgebäude)

Aufgabe 10.1

Definition: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es ein Punkt $a_0 \in A$ existiert, so dass für alle $a \in A$ gilt: $\{at + a_0(1-t) \mid t \in [0,1]\} \subseteq A$.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(i) Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann sternförmig, wenn sie konvex ist.

(ii) Wenn $A \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmig ist, dann ist A einfach zusammenhängend.

Aufgabe 10.2

(i) Sei X 0-zusammenhängend. Zeigen Sie: jede Abbildung $\varphi : \mathbb{S}^0 = \{0,1\} \to X$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{\varphi} : [0,1] \to X$.

(ii) Sei X 1-zusammenhängend. Zeigen Sie: jede stetige Abbildung $\varphi : \mathbb{S}^1 \to X$ hat eine stetige Fortsetzung $\overline{\varphi} : D \to X$, wobei $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Hinweis: Setzen Sie $p = \varphi(0,1)$ und betrachten Sie $\alpha(t) = \varphi(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ sowie $\rho : [0,1] \times [0,1] \to D, \rho_s(t) = sp + (1-s)\alpha(t)$. Benutzen Sie §2.31 2. Korollar.

Aufgabe 10.3

(i) Gegeben seien zusammenhängende Räume $X_1, \dots, X_n$. Zeigen Sie, dass $\prod_{i=1}^{n} X_i$ zusammenhängend ist.

(ii) Gegeben sei eine beliebige Indexmenge I und eine Familie von zusammenhängenden Räumen $\{X_i\}_{i \in I}$. Sei weiter $x = (x_i) \in X := \prod_{i \in I} X_i$ fest gewählt.

(a) Für $K \subseteq I, \#K < \infty$ definieren wir

$$X_K := \{y = (y_i)_{i \in I} \in X \mid y_i = x_i \text{ für } i \in I - K\}$$

Zeigen Sie, dass X_K zusammenhängend ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$Y := \bigcup_{K \subseteq I, \#K < \infty} X_K$$

zusammenhängend ist.

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $\overline{Y} = X$.

(d) Zeigen Sie, dass X zusammenhängend ist.

Aufgabe 10.4

Sei $p : E \to B$ eine Überlagerung. Weiter sei B zusammenhängend. Zeigen Sie: Wenn es ein $b_0 \in B$ existiert mit $\#p^{-1}(b_0) = n$ für ein $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $b \in B$: $\#p^{-1}(b) = n$.

-bitte wenden-

***-Aufgabe**(Abgabe bis zum 10. 07. 2015)

Wir definieren $U_i \subseteq [0,1]$ wie folgt:

$$\begin{aligned} U_1 &= (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ U_2 &= (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{4}{9}, \frac{5}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) \\ U_m &= \bigcup_{k=0}^{3^{m-1}-1} (\frac{3k+1}{3^m}, \frac{3k+2}{3^m}) \end{aligned}$$

und

$$X := [0,1] - \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$$

Weiter sei $C = \prod_{\mathbb{N}} \{0,1\}$ die Cantormenge.

(i) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : C &\rightarrow X \\ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} &\mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2x_j}{3^{j+1}} \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist.

(ii) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : C &\rightarrow [0,1] \\ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} &\mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{2^{j+1}} \end{aligned}$$

stetig ist.

(iii) Zeigen Sie, dass C homöomorph ist zu $C \times C$ via

$$\begin{aligned} \phi : C &\rightarrow C \times C \\ (x_j) &\mapsto ((x_{2j})_{j\in\mathbb{N}}, (x_{2j+1})_{j\in\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

(iv) Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} X \overset{\varphi^{-1}}{\cong} C \xrightarrow{\phi} C \times C &\overset{(\psi,\psi)}{\rightarrow} [0,1] \times [0,1] \\ t \qquad \mapsto \qquad & (\alpha(t), (\beta(t))) \end{aligned}$$

stetig und surjektiv ist.

(v) Wir erweiteren die Abbildung α zu

$$\begin{aligned} \overline{\alpha} : [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ t &\mapsto \frac{1}{2}(\alpha(\max\{x \in X \mid x \leq t\}) + \alpha(\min\{x \in X \mid x \leq t\})) \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\overline{\alpha}$ stetig ist.

(vi) Wir erweitern die Abbildung β genauso. Zeigen Sie, dass $\overline{\beta}$ stetig ist.

Zusammenfassung: Damit erhalten wir eine surjektive stetige Abbildung

$$\begin{aligned} [0,1] &\rightarrow [0,1] \times [0,1] \\ t &\mapsto (\overline{\alpha}(t), \overline{\beta}(t)) \end{aligned}$$

eine **Peano-Kurve**.