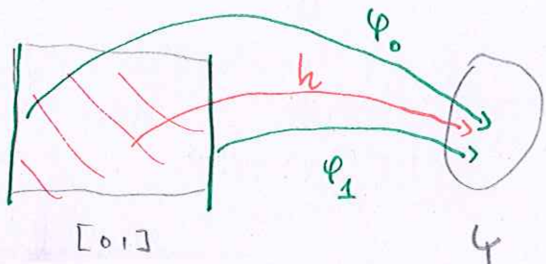
§3 Die Fundamentalgruppe

1. Homotopie Seien X, Y top. Räume, seien $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightrightarrows Y$ zwei stetige Abbildungen.

φ_0, φ_1 heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h: X \times [0,1] \to Y$ gibt, $h(p,s) = h_s(p)$, mit $h_0 = \varphi_0$ und $h_1 = \varphi_1$.



h heißt Homotopie zwischen φ_0 und φ_1.

Ist $A \subseteq X$ und $\varphi_0(a) = \varphi_1(a)$ für alle $a \in A$, so heißen φ_0 und φ_1 homotop relativ zu A (rel A), wenn es eine Homotopie h gibt mit $h_s(a) = a$ für alle $s \in [0,1]$, $a \in A$. ($A = \emptyset$ liefert Homotopie wie oben)

Schreibe $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ (φ_0 homotop zu φ_1)

$\varphi_0 \simeq \varphi_1$ (rel A) (φ_0 homotop zu φ_1 rel A)

Lemma $\varphi_0 \simeq \varphi_1 \simeq \varphi_2$ (rel A) $\Rightarrow$ $\varphi_0 \simeq \varphi_2$ (rel A)
und $\varphi_1 \simeq \varphi_0$ (rel A)
und $\varphi_0 \simeq \varphi_0$ (rel A)

Beweis $h : X \times [0,1] \to Y$
$h' : X \times [0,1] \to Y$ Homotopien (rel A)

Setze $h'' : X \times [0,1] \to Y$

$$h''_s(p) = \begin{cases} h_{2s}(p) & \text{für } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ h'_{2s-1}(p) & \text{für } \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases}$$

Stetig nach §1.12 $\square$

Beobachtg Sind $X \underset{\varphi_1}{\overset{\varphi_0}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\psi} Z$ Abbildung mit $\varphi_0 \simeq \varphi_1$ (rel A) so folgt $\psi \circ \varphi_0 \simeq \psi \circ \varphi_1$ (rel A) □

2. Die Fundamentalgruppe

Sei X ein top. Raum.

Für $\alpha, \beta \in C([0,1], X)$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ definiere $\alpha * \beta \in C([0,1], X)$ durch $(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$

(Stetig nach §1.12)

$\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t)$. Für $p \in X$ sei $\varepsilon_p(t) = p \quad 0 \le t \le 1$

Wir nennen α, β Pfade in X.

Beachte: • $\alpha * \beta$ ist nur definiert für $\alpha(1) = \beta(0)$

• im Allgemeinen ist $(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma)$

Wir setzen $[\alpha] = \{\alpha' \in C([0,1], X) \mid \alpha' \simeq \alpha \text{ rel } \{0,1\}\}$

mit $\partial = \{0,1\}$, d.h. $\alpha' \in [\alpha] \Leftrightarrow \alpha(0) = \alpha'(0)$, $\alpha(1) = \alpha'(1)$, es gibt Homotopie h mit $h_0 = \alpha$, $h_1 = \alpha'$, $h_s(0) = \alpha(0)$ $h_s(1) = \alpha(1)$ für alle $s \in [0,1]$

$\alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0,1\}$

Lemma A Sei $\alpha, \beta, \gamma \in C([0,1], X)$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$, $\beta(1) = \gamma(0)$. Dann gilt

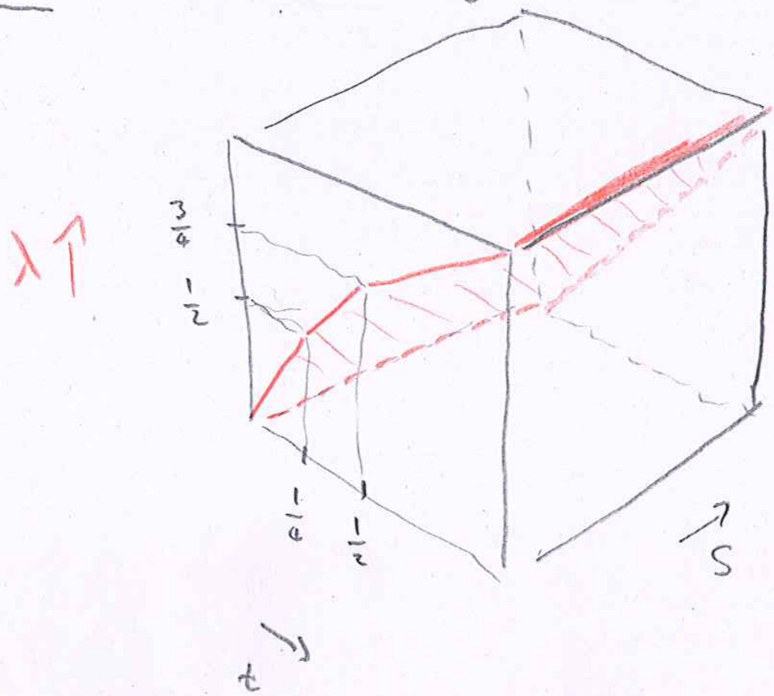
$[\alpha * (\beta * \gamma)] = [(\alpha * \beta) * \gamma]$

$[\alpha * \bar{\alpha}] = [\varepsilon_p] \qquad p = \alpha(0)$

$[\bar{\alpha} * \alpha] = [\varepsilon_q] \qquad q = \alpha(1)$

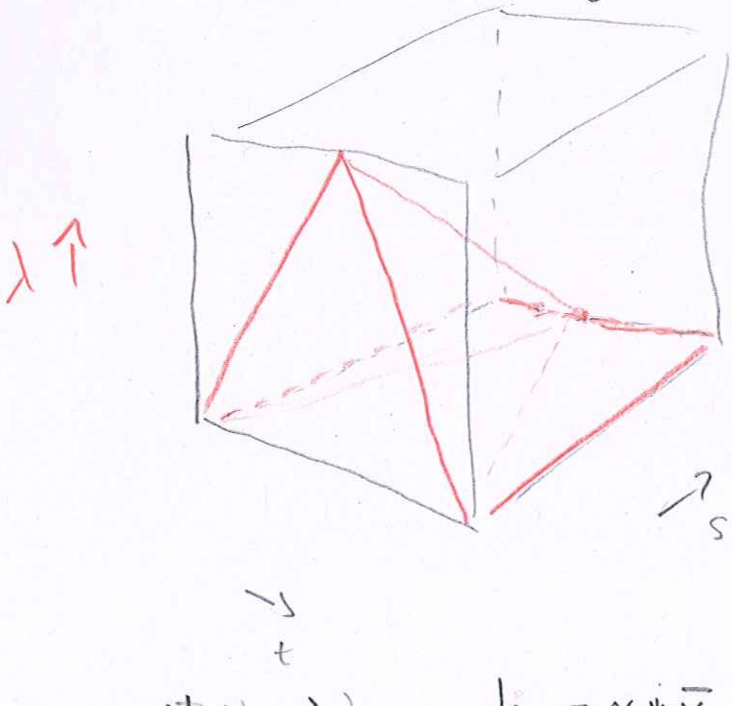
$[\alpha * \varepsilon_q] = [\alpha] \qquad [\varepsilon_p * \alpha] = [\alpha]$

Beweis Betrachte geeignete stetige Funktion $\lambda : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$



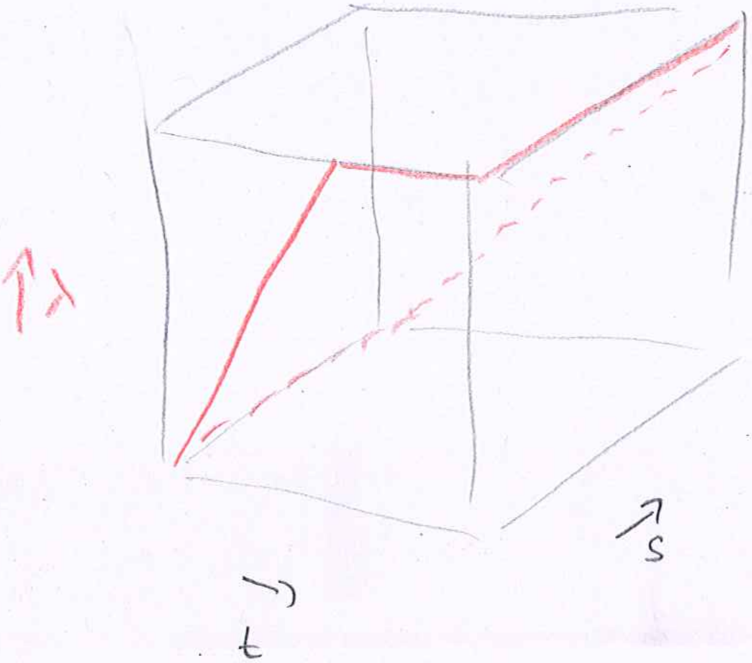
wichtig sind nur die Werte für $s = 0,1$ oder $t = 0,1$

$h_s(t) = \alpha * (\beta * \gamma)(\lambda(s,t))$ $\Rightarrow$ $h_1 = \alpha * (\beta * \gamma)$
$h_0 = (\alpha * \beta) * \gamma$



$h_s(t) = \alpha(\lambda(s,t))$ $h_0 = \alpha * \bar{\alpha}$
$h_1 = \varepsilon_p$

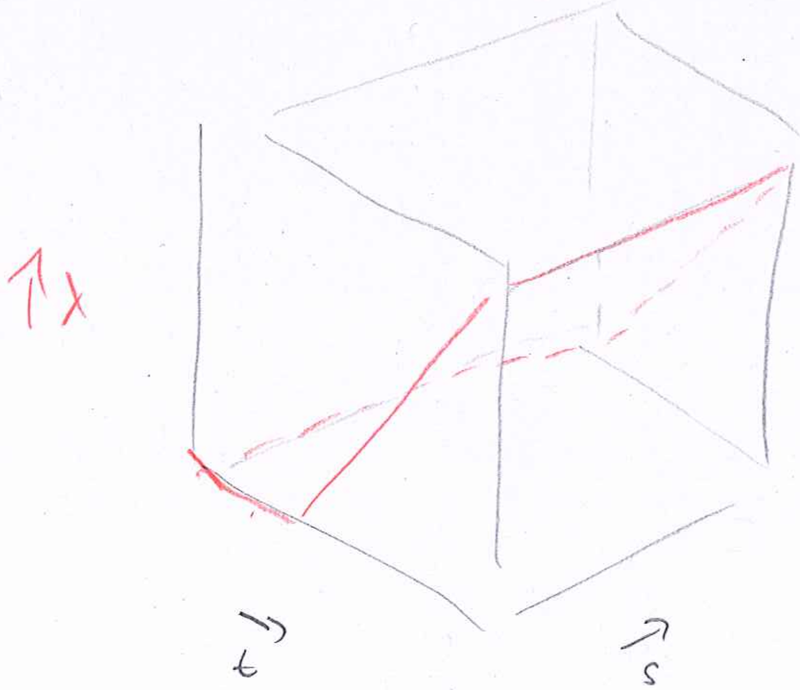
$\square$



$h_s(t) = \alpha(\lambda(s,t))$

$h_0 = \alpha * \varepsilon_q$

$h_1 = \alpha$



$h_s(t) = \alpha(\lambda(s,t))$

$h_0 = \varepsilon_p * \alpha$

$h_1 = \alpha$

Lemma B Wenn gilt $[\alpha]=[\alpha']$, $[\beta]=[\beta']$ und wenn $\alpha(1)=\beta(0)$, so folgt $[\alpha*\beta]=[\alpha'*\beta']$.

Beweis Seien h^α, h^β Homotopien rel $\{0,1\}$ mit

$$h_0^\alpha=\alpha \quad h_1^\alpha=\alpha', \quad h_0^\beta=\beta, \quad h_1^\beta=\beta'.$$

Dann ist $h_s(t)=\begin{cases} h_s^\alpha(2t) & 0\le t\le \frac{1}{2} \\ h_s^\beta(2t-1) & \frac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$ stetig nach § 1,12,

denn $h_s^\alpha(1)=h_s^\beta(0)=\alpha(1)$ für alle $s\in[0,1]$, und

h_s ist Homotopie zwischen $\alpha*\beta$ und $\alpha'*\beta'$ □

3. **Theorem** Sei X ein topologischer Raum, sei $p\in X$.

Sei $\pi_1(X,p)=\{[\alpha]\mid \alpha:[0,1]\to X \text{ stetig}, \alpha(0)=\alpha(1)=p\}$.

Dann ist $\pi_1(X,p)$ eine Gruppe mit Verknüpfung

$$[\alpha]*[\beta]=[\alpha*\beta],$$

die Fundamentalgruppe von X (bezüglich des Grundpunktes p).

Beweis Nach § 3.2 Lemma B ist die Verknüpfung wohldefiniert. Nach Lemma A ist sie assoziativ und es gilt $[\alpha]*[\bar\alpha]=[\varepsilon_p]=[\bar\alpha]*[\alpha]$, sowie

$[\alpha]*[\varepsilon_p]=[\alpha]=[\varepsilon_p]*[\alpha]$ □

#

<u>Korollar</u> (zur Abhängigkeit vom Grundpunkt) Sei X ein top. Raum, sei $p, q \in X$, sei $\xi : [0,1] \to X$ stetig mit $\xi(0) = p$, $\xi(1) = q$ (ξ ist ein <u>Pfad von p nach q</u>). Dann ist

$$C_\xi : \pi_1(X, p) \longrightarrow \pi_1(X, q)$$
$$[\alpha] \longmapsto [\bar{\xi}] * [\alpha] * [\xi]$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

<u>Beweis</u> Aus §3.2 Lemma A, B folgt

$$\begin{aligned} C_\xi([\alpha] * [\beta]) &= [\bar{\xi}] * [\alpha] * [\beta] * [\xi] \\ &= [\bar{\xi}] * [\alpha] * [\xi] * [\bar{\xi}] * [\beta] * [\xi] \\ &= C_\xi([\alpha]) * C_\xi([\beta]) \end{aligned}$$

$\Rightarrow C_\xi$ ist Homomorphismus. Weiter

$$(C_\xi \circ C_{\bar{\xi}})[\alpha] = [\bar{\xi}] * [\xi] * [\alpha] * [\bar{\xi}] * [\xi] = [\alpha]$$

genauso $C_{\bar{\xi}} \circ C_\xi [\beta] = [\beta]$ $\square$

4. <u>Satz</u> Sei X, Y top. Räume, sei $p \in X$, sei $\varphi: X \to Y$ stetig, sei $q = \varphi(p)$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_\#: \pi_1(X,p) \longrightarrow \pi_1(Y,q)$$
$$[\alpha] \longmapsto [\varphi \circ \alpha]$$

ein Homomorphismus von Gruppen. Wenn $\psi: X \to Y$ stetig ist mit $\varphi \simeq \psi$ (rel p), so gilt $\varphi_\# = \psi_\#$

<u>Beweis</u> Es gilt $(\varphi \circ \alpha) * (\varphi \circ \beta) = \varphi \circ (\alpha * \beta)$ nach Definition, also $\varphi_\#([\alpha] * [\beta]) = \varphi_\#[\alpha] * \varphi_\#[\beta]$.

Ist h eine Homotopie mit $h_0 = \varphi$, $h_1 = \psi$, $h_s(p) = q$ für alle $s \in [0,1]$, so folgt

$$[\varphi \circ \alpha] = [\psi \circ \alpha] \quad \text{(Einsetzen)} \qquad \square$$

Wie kann man $\pi_1(X,p)$ berechnen?

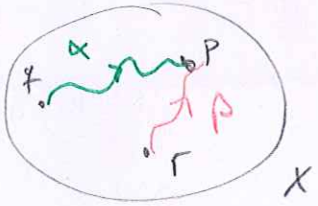
5. <u>Bsp</u> • $X = \{p\} \Rightarrow C([0,1], X) = \{\varepsilon_p\}$
$\Rightarrow \pi_1(\{p\}, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ triviale Gruppe.

• $X = \mathbb{R}^n$, $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Ist $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\alpha(0) = \alpha(1) = p$, so setze

$$h_s(t) = s \cdot \alpha(t) + (1-s)p.$$ Es folgt $h_1 = \alpha$, $h_0 = \varepsilon_p$, $h_s(0) = p = h_s(1)$ für alle $s \in [0,1]$

also $[\alpha] = [\varepsilon_p] \rightsquigarrow \pi_1(\mathbb{R}^n, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ triviale Gruppe.

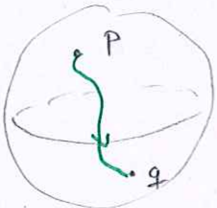
6. <u>Def</u> Ein top. Raum $X \neq \emptyset$ heißt <u>wegzusammenhängend</u> oder <u>0-zusammenhängend</u>, wenn es für alle p, q ein $\alpha : [0,1] \to X$ stetig gibt mit $\alpha(0) = p$, $\alpha(1) = q$.
Äquivalent dazu: es gibt ein Punkt $p \in X$ so, dass es zu jedem $q \in X$ ein Weg von p und q gibt. Denn: $q, r \in X$, α, β Weg von q, r nach $p \Rightarrow$ $\alpha * \bar{\beta}$ Weg von q und r



Mit §2.32 folgt: jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.

<u>Bsp</u> • $\mathbb{R}^n$ und Alexandrovs Halbgerade sind wegzush.

• S^n ist wegzush. für $n \geq 1$



$S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} v_i^2 = 1 \}$

$S^0 = \{\pm 1\}$ nicht (weg) zusammenhängend.

Wenn X wegzusammenhängend ist, so gilt nach §3.3 Korollar $\pi_1(X, p) \cong \pi_1(X, q)$ für alle $p, q \in X$.

<u>Def</u> Ein wegzusammenhängender Raum heißt <u>einfach zusammenhängend</u> oder <u>1-zusammenhängend</u>, wenn für alle $p \in X$ gilt: $\pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ (triviale Gruppe).

Also: • $\mathbb{R}^n$ ist einfach zusammenhängend für alle $n \geq 0$

• Alexandrovs Halbgerade ist einfach zush. (Ü1).

7. <u>Def</u> Ein top. Raum $X \neq \emptyset$ heißt <u>kontrahierbar</u>, wenn es $h: X \times [0,1] \to X$ stetig gibt mit $h_0 = id_X$, $h_1(x) = p$ konstant.

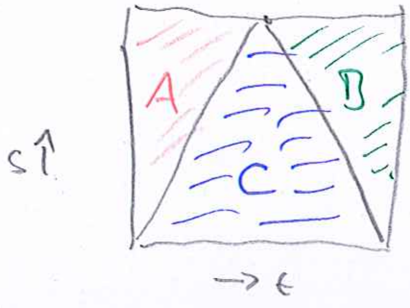
<u>Bsp</u>. $\mathbb{R}^n$ ist kontrahierbar für alle $n \geq 0$, mit $h_s(u) = (1-s)u$

<u>Satz</u> Jeder kontrahierbare Raum X ist einfach zusammenhängend.

<u>Bew.</u> Sei $h: X \times [0,1] \to X$ wie oben, $h_0 = id_X$, $h_1(x) = p$ für alle $x \in X$. Sei $q \in X$. Dann ist $\alpha(t) = h_t(q)$ ein Weg von q nach p, also ist X wegzusammenhängend.

Sei jetzt $\alpha: [0,1] \to X$ ein Weg mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p$. Zu zeigen: $[\alpha] = [\varepsilon_p]$. <u>Problem</u>: $(t,s) \mapsto h_s(\alpha(t))$ erfüllt zwar $h_0(t) = \alpha(t)$, $h_1(t) = p$, aber es ist nicht klar, dass $h_s(p) = p$ für alle $s \in [0,1]$ gilt.

<u>Lösung:</u> Betrachte $[0,1] \times [0,1] = A \cup B \cup C$



A: $s \geq 2t$

B: $s \geq 2-2t$

C: $s \leq 2t$ und $s \leq 2-2t$

Definiere jetzt

$$h'_s(t) = \begin{cases} h_{2t}(p) & (s,t) \in A \\ h_{2-2t}(p) & (s,t) \in B \\ h_s\left(\alpha\left(\frac{t}{1-s} - \frac{s}{2(1-s)}\right)\right) & (s,t) \in C \end{cases} \qquad (*)$$

Das ist wohldefiniert (prüfe $s = 2t$ bzw $s = 2t-2$) stetig auf A, B, C also stetig nach § 1.12. Weiter

$$h'_s(0) = h_0(p) = p$$
$$h'_s(1) = h_0(p) = p$$
$$h'_0(t) = h_0(\alpha(t)) = \alpha(t)$$
$$h'_1(t) = \begin{cases} h_{2t}(p) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ h_{2-2t}(p) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \qquad \gamma(t) = h'_t(p)$$

also $[\alpha] = [\gamma * \bar{\gamma}] = [\varepsilon_p]$ $\square$

Ein topologischer Raum mit nicht trivialer Fundamentalgruppe ist also nicht kontrahierbar.

Wir werden später sehen:

$$\pi_1(S^n, p) \neq \{[\varepsilon_p]\}$$

gilt genau für $n = 1$.

Aber S^n ist für kein $n \geq 0$ kontrahierbar ($\to$ alg. Topologie)

#

(*) Dabei setzen wir für $s = 1$

$$h_s\left(\alpha\left(\frac{t}{1-s} - \frac{s}{2(1-s)}\right)\right) = p$$

Das wird stetig! Denn: Sei $U \subseteq X$ eine offene Menge mit $p \in U$. Für jedes $y \in [0,1]$ gibt es eine offene Umgebung $V_y \subseteq [0,1] \times [0,1]$ von $(1,y)$ mit

$$h_u(\alpha(v)) \in U \quad \text{für alle} \quad (u,v) \in V_y$$

Da $\{1\} \times [0,1]$ kompakt ist, finden wir $\varepsilon > 0$ so, dass $h_u(\alpha(v)) \in U$ für alle $u \in (1-\varepsilon, 1]$ und $v \in [0,1]$. Es folgt

$$h_s\left(\alpha\left(\frac{t}{1-s} - \frac{s}{2(1-s)}\right)\right) \in U \quad \text{für alle} \quad 1-\varepsilon < s < 1$$

$\Rightarrow$ stetig für $s = 1$ $\square$

8. Satz Seien X, Y topologische Räume, $p \in X$, $q \in Y$. Seien $pr_X : X \times Y \to X$ die Projektionen.
$pr_Y : X \times Y \to Y$

Dann ist

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (p,q)) \longrightarrow \pi_1(X,p) \times \pi_1(Y,q)$$
$$[\alpha] \longmapsto \left((pr_X)_\# [\alpha], (pr_Y)_\# [\alpha]\right)$$

ein Isomorphismus von Gruppen

Beweis Φ ist surjektiv: Seien $\beta : [0,1] \to X$
$\gamma : [0,1] \to Y$

Pfade mit $\beta(0) = \beta(1) = p$, $\gamma(0) = \gamma(1) = q$

$\alpha(t) = (\beta(t), \gamma(t)) \Rightarrow \Phi([\alpha]) = ([\beta], [\gamma])$

Φ ist injektiv: zeige $\ker \Phi = \{[\varepsilon_{(p,q)}]\}$

$pr_X [\alpha] = [\varepsilon_p] \rightsquigarrow$ Homotopie $h^X : [0,1] \times [0,1] \to X$ rel $\{0,1\}$

$\beta = pr_X \circ \alpha$ $\qquad h^X_0 = pr_X \circ \alpha = \beta$

$h^X_1 = \varepsilon_p$

Genauso Homotopie $h^Y : [0,1] \times [0,1] \to Y$ rel $\{0,1\}$

$\gamma = pr_Y \circ \alpha$ $\qquad h^Y_0 = \gamma \qquad h^Y_1 = \varepsilon_q$

$\Rightarrow h_s(t) = (h^X_s(t), h^Y_s(t))$ Homotopie rel $\{0,1\}$

mit $\left.\begin{aligned} h_0(t) &= \alpha(t) \\ h_1(t) &= (p,q) \end{aligned}\right\}$

Ist also $\Phi([\alpha]) = ([\varepsilon_p], [\varepsilon_q])$, so folgt $[\alpha] = [\varepsilon_{(p,q)}]$ $\square$

Mit Induktion folgt sofort:

$$\pi_1(X_1 \times \dots \times X_n, (p_1, \dots, p_n)) \cong \prod_{i=1}^{n} \pi_1(X_i, p_i)$$

9. <u>H-Räume</u> Ein top. Raum $X \neq \emptyset$ heißt <u>H-Raum</u> (<u>Hopf-Raum</u>), wenn es auf X eine stetige Verknüpfung mit Neutralelement $e \in X$ gibt. Genauer: es gibt $m: X \times X \to X$ stetig mit $m(e,x) = m(x,e) = x$ für alle $x \in X$.

<u>Beispiel:</u> Jede topologische Gruppe ist ein H-Raum.

Beachte aber: über Assoziativität oder Inverse wird nichts vorausgesetzt.

<u>Satz</u> Sei X ein H-Raum mit $e \in X$ Neutralelement. Dann ist $\pi_1(X, e)$ abelsch.

<u>Bew.</u> Für $\alpha, \beta: [0,1] \rightrightarrows X$ stetig definiere

$$\alpha \cdot \beta: [0,1] \to X, \quad t \mapsto m(\alpha(t), \beta(t))$$

Angenommen, $\alpha(0) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(1) = e$. Dann folgt

$$(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta) = \alpha * \beta$$
$$(\varepsilon_e * \alpha) \cdot (\beta * \varepsilon_e) = \beta * \alpha$$

Nun: $\left.\begin{array}{l} [\alpha] = [\alpha'] \\ [\beta] = [\beta'] \end{array}\right\} [\alpha \cdot \beta] = [\alpha' \cdot \beta']$

denn: $h_0^\alpha = \alpha$ $\quad h_0^\beta = \beta$ $\quad$ Homotopien rel $\{0,1\}$

$h_1^\alpha = \alpha'$ $\quad h_1^{\beta'} = \beta'$

$(s,t) \longmapsto m(h_s^\alpha(t), h_s^\beta(t))$ ist Homotopie rel $\{0,1\}$

zwischen $\alpha \cdot \beta$ und $\alpha' \cdot \beta'$

Es folgt

$$\begin{array}{l} [\alpha \cdot \beta] = [(\alpha * \varepsilon_e) \cdot (\varepsilon_e * \beta)] = [\alpha * \beta] \\ \quad \| \\ [(\varepsilon_e * \alpha) \cdot (\beta * \varepsilon_e)] = [\beta * \alpha] \end{array}$$

$\square$

<u>Beacht:</u> Wir haben gezeigt: $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha * \beta] = [\beta * \alpha] = [\beta \cdot \alpha]$.

<u>Bem</u> Ein (tiefer) Satz von Adams besagt:
Wenn eine Sphäre S^n ein H-Raum ist, dann ist $n = 0, 1, 3, 7$. Für $n = 0, 1, 3$ lässt sich S^n sogar zu einer topologischen Gruppe machen, für $n = 7$ <u>nicht</u>.

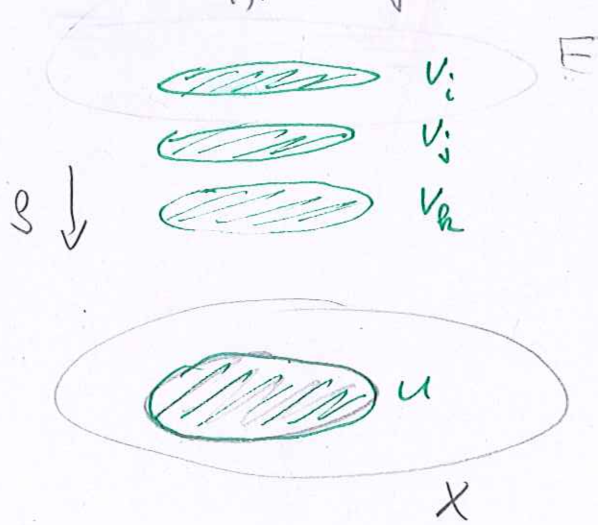
10. Überlagerungen

Sei $E \xrightarrow{g} B$ eine stetige surjektive Abbildung. Für $A \subseteq B$ schreib $E_A = g^{-1}(A) \subseteq E$. Wir nennen $E \xrightarrow{g} B$ eine Überlagerung (von B), wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung $U \subseteq B$ hat mit folgender Eigenschaft:

(*) es gibt eine Indexmenge $I \neq \emptyset$ mit
$E_U = \bigcup\{V_i \mid i \in I\}$, $V_i \subseteq E$ offen,
$V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und

$$V_i \xrightarrow{g} U$$

ist für jedes $i \in I$ ein Homöomorphismus.



("Pfannkuchenabbildung")

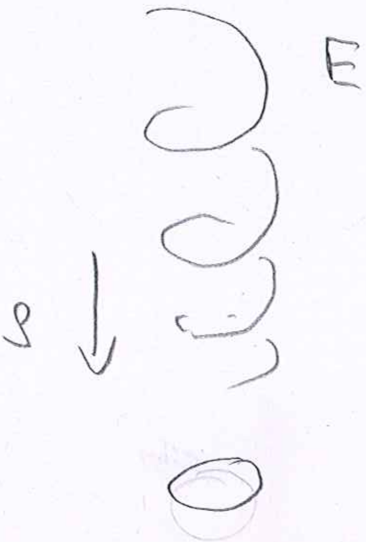
Bsp (a) $E = B$, $g = id$, $U = B$, $I = \{1\}$

(b) $E = B \times I$ I mit diskreter Topologie

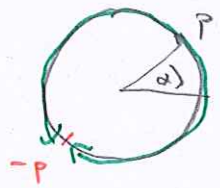
$g(b,i) = b$ $g: E \to B$

(c) $E = \mathbb{R}$, $B = S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$

$\rho(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$



Das ist eine Überlagerung, denn:

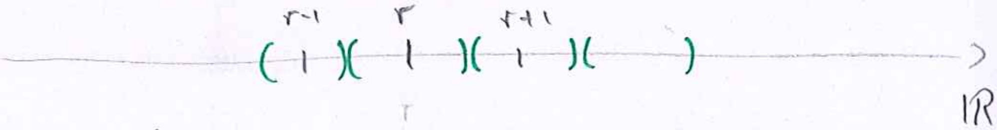


$p = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$

$\alpha = 2\pi r \quad 0 \le r < 1$

$U = S^1 - \{-p\}$

$E_U = \bigcup\{(k+r-\frac{1}{2}, k+r+\frac{1}{2}) \mid k \in \mathbb{Z}\}$



Ist $E \xrightarrow{\rho} B$ eine Überlagerung, so nennt man B Basisraum, E Totalraum (étalé) und $E_b = \rho^{-1}(b)$ Faser über b ($\# E_p = \# I$)

Def Sind

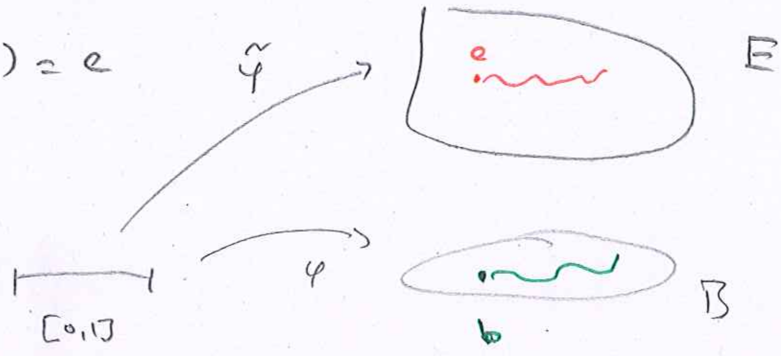
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"] & B \end{tikzcd}$$

stetige Abbildungen

und ist $\tilde{\varphi}: X \to E$ stetig mit $\rho \circ \tilde{\varphi} = \varphi$, so heißt $\tilde{\varphi}$ Lift (Anhebung) von φ.

11. <u>Theorem</u> Sei $E \xrightarrow{g} B$ eine Überlagerung, sei $\varphi : [0,1]^n \to B$ stetig, sei $b = \varphi(0,\dots,0) \in B$, sei $e \in E$ mit $g(e) = b$.

Dann existiert genau ein Lift $\tilde{\varphi}$ von φ mit $\tilde{\varphi}(0,\dots,0) = e$



<u>Bew.:</u> <u>1. Schritt</u> Wenn es $U \subseteq B$ offen gibt mit §3.10(*), wobei $\varphi([0,1]^n) \subseteq U$ gilt, stimmt das.

<u>Denn</u> $E_U = \bigcup \{ V_i \mid i \in I \}$ $\quad e \in V_k$

$g : V_k \to U$ Homöomorphismus mit Inversem $\lambda : U \to V_k$,
setze $\tilde{\varphi} = \lambda \circ \varphi : [0,1]^n \to U \xrightarrow{\lambda} V_k$, es folgt
$\tilde{\varphi} = g \circ \varphi$ sowie $\tilde{\varphi}(0,\dots,0) = e$, weil $g(e) = b$.
Ist $\psi : [0,1]^n \to$ ein weiterer Lift von φ mit
$\psi(0,\dots,0) = e$, so folgt $\psi([0,1]^n) \subseteq V_k$, denn
$\underline{\psi([0,1]^n)}$ ist zush., weil $[0,1]^n$ wegzush. ist:

$$E_U = \underbrace{V_k}_{\substack{\text{off} \\ \neq \emptyset}} \cup \underbrace{\dot{\bigcup} \{ V_j \mid j \neq k \}}_{\text{off} \neq \emptyset}$$

Es folgt $\psi = \lambda \circ \varphi = \tilde{\varphi}$. $\square$

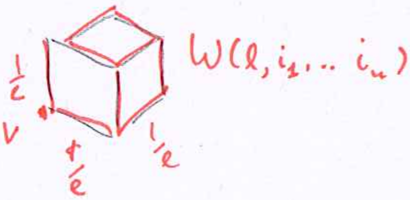
#

2. <u>Schritt</u> Für $l \geq 1$ und $0 \leq i_1, \dots, i_n \leq l$ setze

$$W(l, i_1, \dots, i_n) = \left[i_1 \tfrac{1}{l}, (i_1+1)\tfrac{1}{l}\right] \times \dots \times \left[i_n \tfrac{1}{l}, (i_n+1)\tfrac{1}{l}\right]$$

Würfelchen mit Kantenlänge $\frac{1}{l}$ und Basisecke

$v = \frac{1}{l}(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{R}^n$



Es gilt nun:

$$[0,1]^n = \bigcup \left\{ \varphi^{-1}(U) \mid U \subseteq B \text{ offen erfüllt } (*) \text{ aus §3.10} \right\}$$

Nach Lebesgues Lemma §2.13 Lemma B existiert ein $l \gg 1$ so, dass für alle l^n Würfelchen $W(l, i_1, \dots, i_n)$ gilt: es gibt $U \subseteq B$ mit $(*)$

$U = U_{i_1 \dots i_n}$ mit $\varphi(W(l, i_1, \dots, i_n)) \subseteq U$

3. <u>Schritt</u> Wir wählen l wie im 2. Schritt. Für jedes $(i_1, \dots, i_n)$ konstruieren wir mit Schritt 1 einen Lift

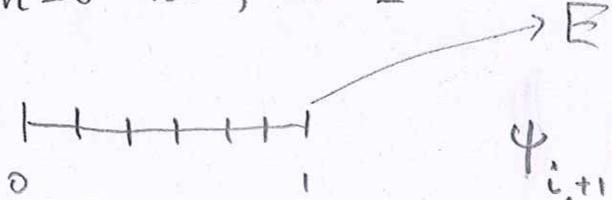
$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d] \\ W(l, i_1, \dots, i_n) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \qquad \psi = \psi_{i_1, \dots, i_n}$$

Wir beginnen mit $i_1 = \dots = i_n = 0$, $\psi_{00\dots0}(0 \dots 0) = e$

Damit sind die Lifts der 2^n Ecken des Würfelchens festgelegt. Erhöhe i_1 um eins usw, dann erhöhe $i_2 = 0, \dots, l-1$, dann $i_3 = 0 \dots l-1$ bis $i_n = 0, \dots, l-1$ $\rightsquigarrow$ Lift $\psi_{i_1 \dots i_n}$ für jedes der l^n Würfelchen

4. Schritt Die einzelnen $\varphi_{i_1,\dots,i_n}$ passen zusammen zu einem eindeutigen stetigen Lift $\tilde{\varphi}$.

$n=0$ klar, $n=1$



$\varphi_{i_1+1}\left((i_1+1)\frac{1}{\ell}\right) = \varphi_{i_1}\left(i_1\frac{1}{\ell}\right)$ für $i_1 = 0,\dots,\ell-1 \rightsquigarrow$ stetige Abbildung $[0,1] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} E$ mit $\tilde{\varphi}(0)=e$ und $\varrho\circ\tilde{\varphi}=\varphi$. Ist $\psi: [0,1] \to E$ stetig mit $\varrho\circ\psi=\varphi$ so folgt mit Schritt 1 und Induktion, dass auf jedem Teilintervall $[i_1\frac{1}{\ell}, (i_1+1)\frac{1}{\ell}]$ $\tilde{\varphi}$ und ψ übereinstimmen $\Rightarrow \psi = \tilde{\varphi}$. $\Rightarrow n=1$ fertig.

Jetzt mit Induktion nach $n \geq 1$ weiter.
An der Stelle, wo wir den Lift des Würfelchens $W = W(\ell, i_1,\dots,i_n)$ konstruieren, ist (höchstens) für die Würfelseiten mit Koordinaten $(s_1,\dots,s_n)$ mit $s_i = n_i\frac{1}{\ell}$ schon ein Lift festgelegt

Diese n Seiten sind Würfel der Dimension $n-1$; der neu konstruierte Lift für W stimmt also dort mit den bereits vorher konstruierten Lifts überein (wegen Induktionsannahme zur Eindeutigkeit). Die ℓ^n Lifts der Würfelchen passen also zusammen zu einem stetigen Lift $\tilde{\varphi}$.

Dieser Lift $\tilde{\varphi}$ ist eindeutig, da für $q \in [0,1]^n$ setze $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\varphi}(t \cdot q)$. Dann ist $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift von $\alpha(t) = \varphi(t \cdot q)$ mit Startpunkt e, folglich liegt $\tilde{\varphi}(q)$ eindeutig fest durch α. □

12. <u>Satz</u> Sei $p \in S^1$. Dann gilt
$$\pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$$

<u>Beweis</u> Wir dürfen annehmen dass $p = (1,0)$, da S^1 wegzusammenhängend ist. Sei
$$\mathbb{R} = E \xrightarrow{g} S^1, \quad g(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$
wie in §3.10 Bsp (c). Für $\alpha : [0,1] \to S^1$ mit $\underset{=\alpha(1)}{\alpha(0)} = p$ setze $\Phi(\alpha) = \tilde{\alpha}(1)$, wobei $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift von α mit $\tilde{\alpha}(0) = 0$ ist.

<u>Beh 1</u> $[\alpha] = [\alpha'] \in \pi_1(S^1, p) \Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$.

Denn: Ist $h : [0,1] \times [0,1] \to S^1$ Homotopie rel $\{0,1\}$ zwischen α und α', so sei $\tilde{h}$ der eindeutige Lift mit $\tilde{h}(0,0) = 0 \in \mathbb{R} = E$. Wegen $h_s(0) = p = h_s(1)$ folgt $\tilde{h}_s(0) = \tilde{\alpha}(0)$ und $\tilde{h}_s(1) = \tilde{\alpha}(1)$ für alle s
$\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}'(1)$. Wir erhalten also eine wohldefinierte Abbildung $\Phi : \pi_1(S^1, p) \to \mathbb{Z}$
$$[\alpha] \longmapsto \tilde{\alpha}(1)$$

<u>Beh 2 Φ ist ein Homomorphismus</u>

Sind $\tilde{\alpha}$ und $\tilde{\beta}$ Lifts von α, β mit $\tilde{\alpha}(0) = 0 = \tilde{\beta}(0)$,

so ist $t \mapsto \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{\beta}(2t-1) + \tilde{\alpha}(1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$

ein Lift von $\alpha * \beta$. Es folgt $\Phi([\alpha * \beta]) = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\beta}(1)$

<u>Beh 3 Φ ist surjektiv</u>

Für $l \in \mathbb{Z}$ setze $\alpha(t) = (\cos(2\pi l t), \sin(2\pi l t))$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}(t) = lt$, $\Phi([\alpha]) = l$

<u>Beh 4 $\operatorname{Ker} \Phi = [\varepsilon_p]$, d.h. Φ ist injektiv</u>

$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) = 0 \Rightarrow \tilde{\alpha} \in \pi_1(\mathbb{R}, 0) = [\varepsilon_0]$

vgl §3.5 $\Rightarrow \tilde{\alpha} \simeq \varepsilon_0$ rel $\{0,1\}$ $\Rightarrow$

$\alpha \simeq \varrho \circ \varepsilon_0 = \varepsilon_p$ rel $\{0,1\}$ $\Rightarrow [\alpha] = [\varepsilon_p]$

$\square$

<u>Bem</u> Ist $p \in S^1$ ein anderer Grundpunkt,

$r \in \mathbb{R}$ mit $\varrho(r) = p$, so erhält man ein

Isomorphismus $\Phi : \pi_1(S^1, p) \to \mathbb{Z}$ durch

$$\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) - r$$

wobei $\tilde{\alpha}$ der eindeutige Lift von α ist mit

$\tilde{\alpha}(0) = r$ (direkt nachrechnen).

13. Def Sei $\mathbb{D}^{n+1} = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} v_i^2 \leq 1\}$

$\mathbb{S}^n = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^{n} v_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{D}^{n+1}$

Def Sei X ein topologischer Raum, sei $A \subseteq X$. Dann heißt A Retrakt von X, wenn es eine stetige Abbildung $\varphi : X \to A$ gibt mit $\varphi(a) = a$ für alle $a \in A$.

Satz Für $n = 0, 1$ ist $\mathbb{S}^n$ kein Retrakt von $\mathbb{D}^{n+1}$

Beweis $n = 0$: $[0,1]$ ist zusammenhängend, aber $\mathbb{S}^0$ nicht $\Rightarrow$ es gibt keine stetige surjektive Abbildung $[0,1] \to \mathbb{S}^0$ vgl § 2.32

$n = 1$: Angenommen, $\mathbb{S}^1$ ist Retrakt von D^2.

Betrachte das Diagramm
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}^1 \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, equal] & D^2 \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{S}^1 \end{tikzcd}$$

Sei $p \in \mathbb{S}^1$. Wir erhalten ein Diagramm
$$\begin{tikzcd} \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \arrow[r, "i_\#"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(D^2, p) \arrow[d, "\varphi_\#"] \\ & \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \end{tikzcd}$$

Aber $\pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$

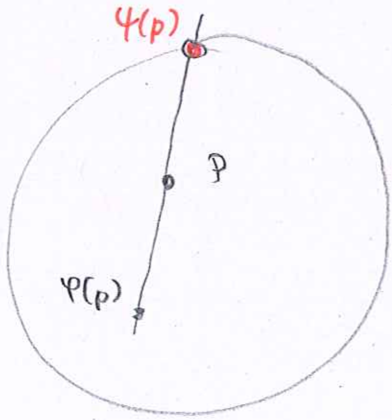
$\pi_1(D^2, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ $\quad$ ↯ $\quad$ $\square$

Bem Für alle $n \geq 0$ gilt: $\mathbb{S}^n$ ist kein Retrakt von D^{n+1} $\to$ algebraische Topologie

14. <u>Korollar: Brouwers Fixpunktsatz</u> Sei $n \leq 2$, sei $\varphi : D^n \to D^n$ stetig. Dann gibt es $p \in D^n$ mit $\varphi(p) = p$.

<u>Beweis</u> <u>$n = 1$</u>: Setze $\psi(p) = p - \varphi(p)$, $\psi : [-1,1] \to \mathbb{R}$
Falls $\varphi(-1) = -1$ oder $\varphi(1) = 1$ fertig. Also OE
$\varphi(-1) > -1$, $\varphi(1) < 1$ $\Rightarrow$ $\psi(-1) < 0$ $\psi(1) > 0$
Zwischenwertsatz: es gibt p mit $\psi(p) = 0$ $\Rightarrow$ $\varphi(p) = p$. $\square$

<u>$n = 2$</u>: Angenommen, für alle $p \in D^2$ gilt $\varphi(p) \neq p$.
Setze $u(p) = p - \varphi(p)$, $\psi(p) = p + \lambda u(p)$
$\lambda > 0$ Lösung der Gleichung $\lambda^2 |u|^2 + \lambda (2\langle p,u \rangle) + |p|^2 = 1$



$\Rightarrow \psi : D^2 \to S^1$ <u>stetige</u> Retraktion

↯

$\square$

<u>Bem</u> Brouwers Fixpunktsatz gilt für alle $n \geq 0$.
$\to$ alg. Topologie

15. Der schwache Satz von Seifert-Van Kampen

Sei X ein topologischer Raum, sei $U, V \subseteq X$ offen mit $X = U \cup V$ und $p \in U \cap V$. Wenn $U \cap V$ wegzusammenhängend ist, dann wird $\pi_1(X,p)$ von den Bildern von $\pi_1(U,p)$ und $\pi_1(V,p)$ unter den Abbildungen

$$i : U \hookrightarrow X \qquad i_\# : \pi_1(U,p) \to \pi_1(X,p)$$
$$j : V \hookrightarrow X \qquad j_\# : \pi_1(V,p) \to \pi_1(X,p)$$

erzeugt.

<u>Bew.</u> Sei $\alpha : [0,1] \to X$ stetig mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p$. Nach Lebesgues Lemma (§ 2.13 Lemma B) gibt es $l \geq 1$ so, dass für jedes Teilintervall

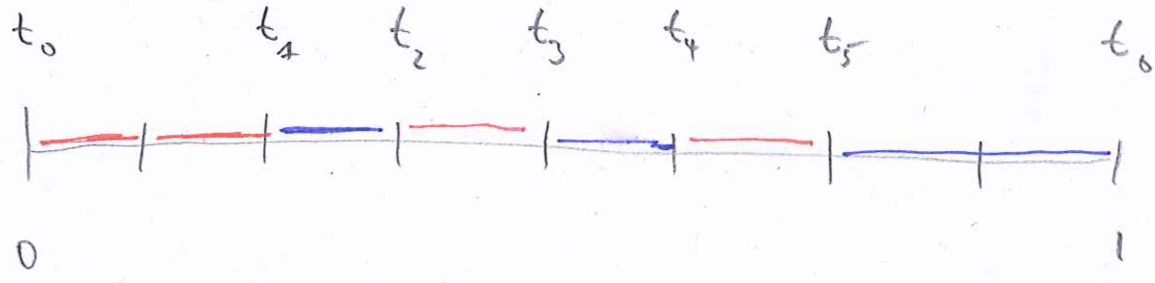
$$I_k = [k\tfrac{1}{l}, (k+1)\tfrac{1}{l}] \subseteq [0,1] \text{ gilt: } \alpha(I_k) \subseteq U$$

oder $\alpha(I_k) \subseteq V$.

Färbe die I_k mit $\alpha(I_k) \subseteq U$ <u>rot</u> und die restlichen I_k <u>blau</u>. Wir erhalten damit Punkte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = 1$ mit:

- $[t_i, t_{i+1}]$ ist einfarbig
- $[t_i, t_{i+1}]$ und $[t_{i+1}, t_{i+2}]$ haben verschiedene Farben

$(l = 8)$

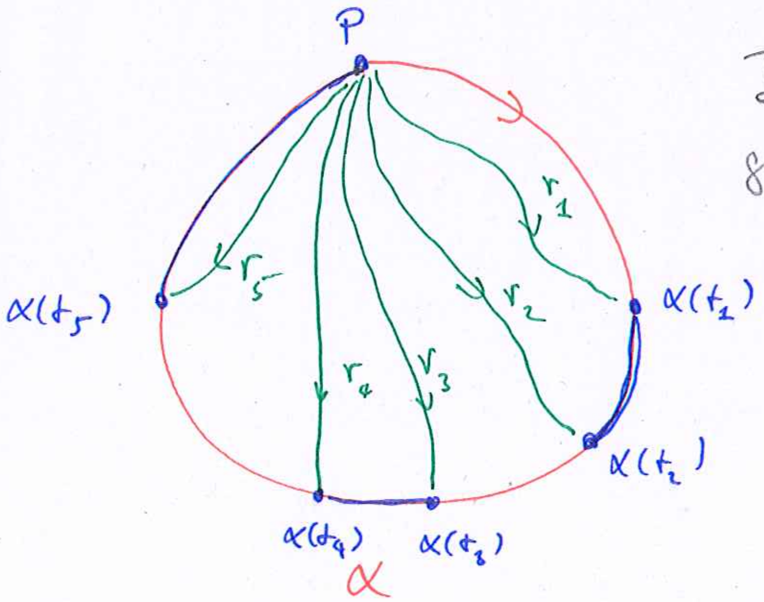


Es folgt $\alpha(t_i) \in U \cap V$ (denn rot geht nach U und blau geht nach V). Da $U \cap V$ wegzush. ist, gibt es Wege $r_k : [0,1] \to U \cap V$ mit $r_k(0) = p$, $r_k(1) = \alpha(t_k)$, $0 < k < m$.

Schreibe $\alpha = ((\alpha_1 * \alpha_2) * \ldots) * \alpha_m)$

$\alpha_k : [0,1] \to X$ durchläuft den Weg α von $\alpha(t_{k-1})$ bis $\alpha(t_k)$ (mit neuer Geschwindigkeit).

$$\Rightarrow [\alpha] = [\alpha_1] * \ldots * [\alpha_m]$$
$$= [\alpha_1] * [\bar{r}_1] * [r_1] * [\alpha_2] * \ldots * [r_m] * [\alpha_m]$$
$$= [\alpha_1 * \bar{r}_1] * [r_1 * \alpha_2 * \bar{r}_2] * \ldots * [r_m * \alpha_m]$$



Jedes Teilstück ist ein geschlossener Weg in U oder in V.

$\square$

<u>Bem</u> Der Satz von Seifert-Van Kampen in seiner starken Version besagt:

$$\pi_1(X,p) = \pi_1(U,p) \underset{\pi_1(U\cap V,p)}{*} \pi_1(V,p)$$

$\pi_1(X,p)$ ist das Koprodukt (amalgamiertes Produkt) von $\pi_1(U,p)$ und $\pi_1(V,p)$ über $\pi_1(U\cap V,p)$

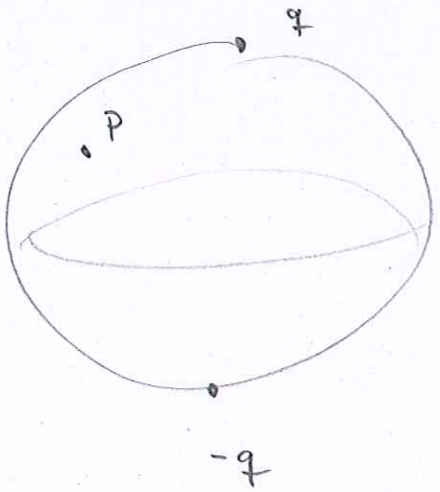
Vgl Munkres. Wir werden das in der Gruppentheorie-Vorlesung beweisen.

16. <u>Korollar</u> Für $n \geq 2$ und $p \in S^n$ gilt

$$\pi_1(S^n,p) = \{[\varepsilon_p]\}$$

Alle Sphären S^n mit $n \geq 2$ sind 1-zush.

<u>Beweis</u> Sei $p, q \in S^n$ mit $q \neq \pm p$. (Das geht für $n \geq 1$). Setze $U = S^n - \{q\}$, $V = S^n - \{-q\}$



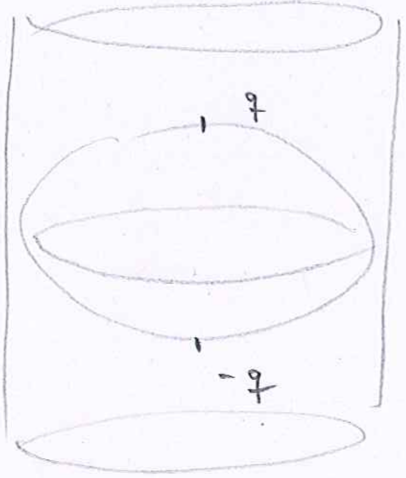
Es folgt (mit stereographischer Projektion) $U \cong \mathbb{R}^n \cong V$

homöomorph

Weiter ist $U \cap V = S^n - \{\pm q\}$ wegzusammenhängend, da $n \geq 2$, jeder Punkt $r \in S^n$ läßt sich durch einen Weg mit p verbinden, der weder durch q noch durch $-q$ läuft.

Oder auch: $\mathbb{S}^n - \{\pm q\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ ← wegzush.

Zylinderprojektion



Es folgt wegen

$\pi_1(U,p) = \{[\varepsilon_p]\}$

$\pi_1(V,p) = \{[\varepsilon_p]\}$,

dass $\pi_1(\mathbb{S}^n,p) = \{[\varepsilon_p]\}$. □

17. Korollar „Ein Autoreifen ist kein Fussball"

$\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ sind nicht homöomorph.

Denn $\pi_1(\mathbb{S}^2,p) = \{[\varepsilon_p]\}$

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, p) \underset{\uparrow \S 3.8}{\cong} \pi_1(\mathbb{S}^1,p_1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1,p_2) \underset{\uparrow \S 3.12}{\cong} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

$\mathbb{S}^2$

18. Korollar Sei $n \geq 3$. Dann sind

$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ jeweils nicht homöomorph

Bew. $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong S^{m-1} \times \mathbb{R}$ via

$\varphi: (u, \lambda) \longrightarrow \exp(\lambda) \cdot u$ $\quad u \in S^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Umkehrabbildung ψ

$v \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ $\quad \psi(v) = \{ |v|^{-1} \cdot v, \log(|v|) \}$

$|v| = (\sum v_i^2)^{\frac{1}{2}}$. Weiter: $\mathbb{R}^m - \{0\} \cong \mathbb{R}^m - \{q\}$ für alle $q \in \mathbb{R}^m$

Es folgt:
- Für alle $q \in \mathbb{R}^1$ ist $\mathbb{R}^1 - \{q\}$ nicht zusammenhängend
- Für alle $q \in \mathbb{R}^2$ ist $\mathbb{R}^2 - \{q\}$ zusammenhängend, aber nicht 1-zush.
- Für alle $q \in \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) ist $\mathbb{R}^n - \{q\}$ 1-zush. $\square$

Mit etwas mehr algebraischer Topologie folgt:

$\mathbb{R}^k$ und $\mathbb{R}^l$ sind genau dann homöomorph, wenn $k = l$ (Satz von der Dimensionsinvarianz)

19. <u>Satz</u> Sei $\varphi: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^2$ stetig. Dann existiert ein Punkt $z \in \mathbb{S}^2$ mit $\varphi(z) = \varphi(-z)$.

Anschaulich: es gibt auf der Erdoberfläche stets zwei entgegengesetzte (=antipodale) Punkte, wo gleiche Temperatur und gleicher Luftdruck herrschen.

<u>Beweis</u> Angenommen, für alle $z \in \mathbb{S}^2$ gilt $\varphi(z) \neq \varphi(-z)$. Setze $\psi(z) = \dfrac{\varphi(z) - \varphi(-z)}{|\varphi(z) - \varphi(-z)|_2}$ (wobei $|v|_2 = (\sum v_i^2)^{\frac{1}{2}}$). Dann ist $\psi: \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1$ stetig und für alle $z \in \mathbb{S}^2$ gilt $\psi(z) = -\psi(-z)$.

Definiere $\alpha: [0,1] \to \mathbb{S}^1$ durch

$$\alpha(t) = \psi\big((\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0)\big),$$

es folgt $\alpha(0) = \alpha(1) = p \in \mathbb{S}^1$ sowie

$$\alpha(t + \tfrac{1}{2}) = -\alpha(t) \quad \text{für alle } t \in [0,1]$$

Betrachte $\rho: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, $\rho(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ wie in §3.12. Sei $\tilde{\alpha}: [0,1] \to \mathbb{R}$ ein Lift von α, mit $\tilde{\alpha}(0) = r \in \mathbb{R}$

$$p = (\cos(2\pi r), \sin(2\pi r))$$

Nun folgt für jedes $t \in [0,\frac{1}{2}]$, dass es $y = y_t$ gibt mit $\tilde{\alpha}(t+\frac{1}{2}) = \tilde{\alpha}(t) + y_t$ und

$$y_t = \frac{2\ell_t + 1}{2}, \quad \ell_t \in \mathbb{Z}, \quad \text{d.h.}$$

$$2\left(\tilde{\alpha}(t+\tfrac{1}{2}) - \tilde{\alpha}(t)\right) \in 2\mathbb{Z}+1 \quad \text{für alle } t \in [0,\tfrac{1}{2}].$$

Die linke Seite ist eine stetige Funktion auf $[0,\frac{1}{2}]$ und $[0,\frac{1}{2}]$ ist zusammenhängend, also gibt es ein $\ell \in \mathbb{Z}$ (unabhängig von t) mit

$$\tilde{\alpha}(t+\tfrac{1}{2}) = \tilde{\alpha}(t) + \frac{2\ell+1}{2} \quad \text{für } 0 \le t \le \tfrac{1}{2}$$

Insbesondere
$$\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(\tfrac{1}{2}) + \frac{2\ell+1}{2}$$
$$\tilde{\alpha}(\tfrac{1}{2}) = \tilde{\alpha}(0) + \frac{2\ell+1}{2}$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}(1) = r + \underbrace{2\ell+1}_{\neq 0}$. Es folgt $[\alpha] \neq [\varepsilon_p]$, denn unter dem Homomorphismus $\Phi : \pi_1(S^1, p) \to \mathbb{Z}$ gilt $\Phi([\alpha]) = \tilde{\alpha}(1) - r$. Das ist ein Widerspruch, denn $[\alpha]$ liegt im Bild von $\pi_1(S^2, q) = \{[\varepsilon_q]\}$, $q = (1,0,0) \in S^2$. $\square$

Wir gehen jetzt zu Überlagerungen zurück.

20. <u>Lemma</u> Sei $E \xrightarrow{g} B$ eine Überlagerung, sei $x \in E$ und $b = g(x)$. Dann ist $g_\#: \pi_1(E,x) \to \pi_1(B,b)$ injektiv.

<u>Beweis</u>: Wir zeigen, dass $\ker(g_\#) = \{[\varepsilon_x]\}$.
Sei $[\tilde\alpha] \in \pi_1(E,x)$, $\alpha = g \circ \tilde\alpha$. Sei h Homotopie rel $\{0,1\}$ zwischen α und ε_b, sei $\tilde h$ der eindeutige Lift von h mit $\tilde h_0(0) = x$, vgl. § 3.11. Es folgt wegen $h_s(0) = \text{const}$, $h_s(1) = \text{const}$, $h_0 = \alpha$, $h_1 = \varepsilon_b$, dass $\tilde h_s(0) = \text{const}$, $\tilde h_s(1) = \text{const}$, $\tilde h_0 = \tilde\alpha$, $\tilde h_1 = \varepsilon_x$

$\Rightarrow [\tilde\alpha] = [\varepsilon_x]$ $\square$

Wir betrachten jetzt den Zusammenhang zwischen $\pi_1(E,x)$ und $\pi_1(B,b)$ genauer.

21. Im Folgenden sei $E \xrightarrow{g} B$ eine Überlagerung. Weiter sei $b \in B$, $F = E_b = g^{-1}(b) \subseteq E$. Wir nehmen an, dass E wegzusammenhängend ist (dann ist $B = g(E)$ ebenfalls wegzusammenhängend).

Für $\alpha : [0,1] \to B$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = b$ und $x \in F$ sei $\tilde\alpha_x : [0,1] \to E$ der nach § 3.11 eindeutige Lift von α mit $\tilde\alpha_x(0) = x$.

<u>Satz</u> Die Abbildung $F \times \pi_1(B,b) \to F$

$$(x, [\alpha]) \longmapsto \tilde{\alpha}_x(1) = x^{[\alpha]}$$

ist wohldefiniert und ist eine <u>transitive Rechtswirkung</u> von $\pi_1(B,b)$ auf F, d.h. es gilt:

(i) $x^{[\varepsilon_b]} = x$ für alle $x \in F$

(ii) $\left(x^{[\alpha]}\right)^{[\beta]} = x^{[\alpha * \beta]}$ für alle $x \in F$, $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B,b)$

(iii) Zu $x, y \in F$ gibt es stets ein $[\alpha] \in \pi_1(B,b)$ mit $x^{[\alpha]} = y$

<u>Beweis</u> Ist $\alpha \simeq \alpha'$ rel $\{0,1\}$, so ist $\tilde{\alpha}_x(1) = \tilde{\alpha}'_x(1)$ mit dem gleichen Argument wie im vorigen Lemma.

(i) $\widetilde{(\varepsilon_b)}_x = \varepsilon_x$ weil ε_x Lift von ε_b

(ii) Sei $y = \tilde{\alpha}_x(1)$ und $z = \tilde{\beta}_y(1)$. Dann ist $\tilde{\alpha}_x * \tilde{\beta}_y$ ein Lift von $\alpha * \beta$ mit Startpunkt x, also $z = \widetilde{(\alpha * \beta)}_x$, sowie

$$y = x^{[\alpha]} \qquad z = y^{[\beta]}$$

(iii) Sei $\tilde{\gamma} : [0,1] \to E$ ein Weg von x nach y (jetzt benutzen wir, dass E wegzshd. ist!). Sei $\alpha = \rho \circ \tilde{\gamma} \Rightarrow \tilde{\alpha}_x = \tilde{\gamma}$ und $x^{[\alpha]} = \tilde{\gamma}(1) = y$ $\square$

Addendum Sei $x \in F$, $[\alpha] \in \pi_1(B,b)$. Dann sind äquivalent: (i) $x^{[\alpha]} = x$

(ii) Es gibt $[\beta] \in \pi_1(E,x)$ mit $g_\#([\beta]) = [\alpha]$.

Beis $x^{[\alpha]} = x \Rightarrow \tilde{\alpha}_x(1) = x$, setze $\beta = \alpha_x$. Also (i) $\Rightarrow$ (ii).

Ist $g_\# \circ \beta = \alpha$ für $[\beta] \in \pi_1(E,x)$, so folgt $\beta = \tilde{\alpha}_x$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}_x(1) = x$, also (ii) $\Rightarrow$ (i). $\square$

#

Korollar Es gilt

$$\# F = [\pi_1(B,b) : g_\#(\pi_1(E,x))]$$

für jedes $x \in F$.

Beis $\pi_1(B,b)$ wirkt transitiv auf F, der Stabilisator von $x \in F$ ist genau $g_\#(\pi_1(E,x))$. Wie in Einführung in die Algebra §2.5 erhalten wir eine Bijektion

$$g_\#(\pi_1(E,x)) \backslash \pi_1(B,b) \longrightarrow F$$

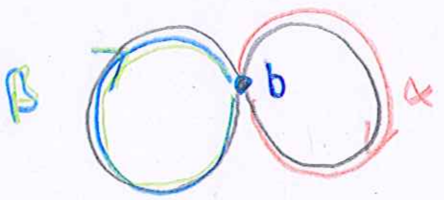
↑ Rechtsnebenklassen

und $[\pi_1(B,b) : g_\#(\pi_1(E,x))] = \#\left(g_\#(\pi_1(E,x)) \backslash \pi_1(B,b) \right)$

$\square$

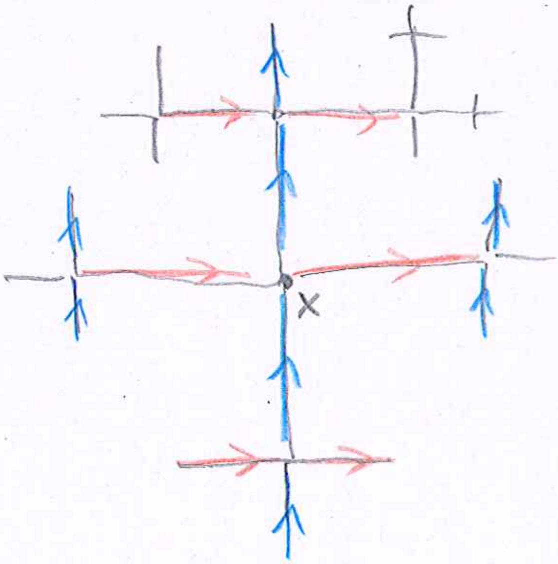
22. Ausblick: Die freie Gruppe F_2.

Sei B die folgende Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$



mit $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B,b)$

Nach dem schwachen Satz von Seifert-Van Kampen §3.15 kann man zeigen: $[\alpha]$ und $[\beta]$ erzeugen $\pi_1(B,b)$. Sei nun E der folgende Baum



Man kann zeigen:
- E ist kontrahierbar, also 1-zush.
- es gibt eine Überlagerung $E \xrightarrow{s} B$, die die rot/blauen Wege auf $[\alpha]$ und $[\beta]$ abbildet. Es folgt: jedes Element $[\gamma] \in \pi_1(B,b)$ hat eine eindeutige Darstellung als Produkt der $[\alpha]$, $[\beta]$, $[\bar{\alpha}]$, $[\bar{\beta}]$, wobei nie $[\alpha], [\bar{\alpha}]$ bzw $[\beta], [\bar{\beta}]$

direkt hintereinander stehen. Die Gruppe $\pi_1(B, b)$ ist die Freie Gruppe F_2 mit Erzeugern $[\alpha]$, $[\beta]$.

In der Gruppentheorie-Vorlesung werden wir das genauer betrachten.