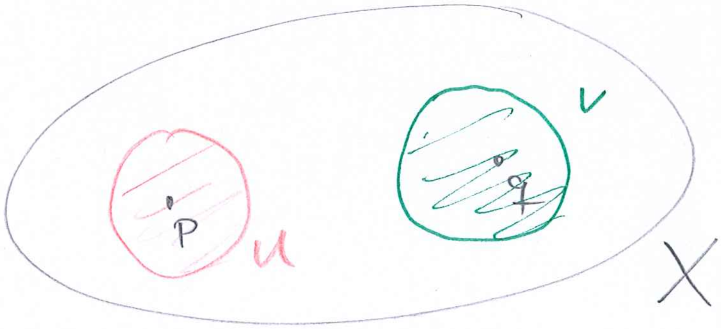
§2 Trennungsaxiome und Kompaktheit

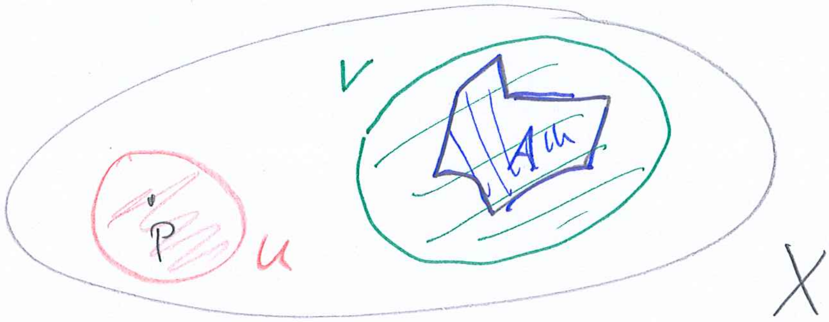
1. Def Sei X ein topologischer Raum

(T_1) X heißt T_1-Raum, wenn für jedes $p \in X$ die Menge $\{p\} \subseteq X$ abgeschlossen ist.
Äquivalent: jede endliche Teilmenge $E \subseteq X$ ist abgeschlossen

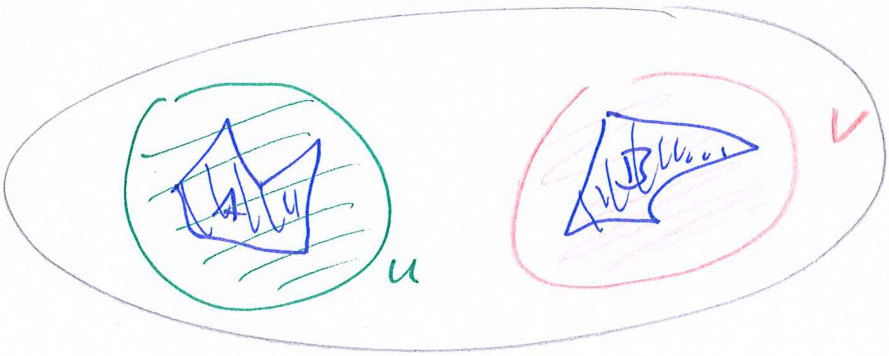
(T_2) X heißt Hausdorff-Raum oder T_2-Raum, wenn es für alle $p, q \in X$ mit $p \neq q$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $p \in U$, $q \in V$, und $U \cap V = \emptyset$



(T_3) X heißt regulär oder T_3-Raum, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für jedes $p \in X$, $A \subseteq X$ abgeschlossen mit $p \notin A$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $p \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$



(T$_4$) X heißt <u>normal</u> oder <u>T_4-Raum</u>, wenn X ein T_1-Raum ist und wenn es für alle abgeschlossenen Mengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cap B = \emptyset$ offene Mengen $U, V \subseteq X$ gibt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$



<u>Klar:</u>

$$\begin{array}{ccccc} T_4 & \Rightarrow & T_3 & \Rightarrow & T_2 \\ & & \Downarrow & \swarrow & \\ & & T_1 & & \end{array}$$

<u>Lemma</u> $T_2 \Rightarrow T_1$

<u>Beweis</u> Sei $p \in X$, zu jedem $q \in X - \{p\}$ gibt es $V = V_q \subseteq X$ offen mit $p \notin V_q$ $\Rightarrow$ $X - \{p\} = \bigcup \{V_q \mid q \neq p\}$ offen.

$\square$

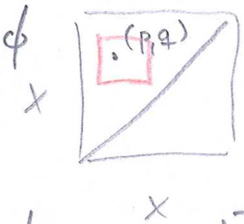
Vorsicht: manche älteren Topologiebücher (z.B. Kelley) verlangen bei "regulär" und "normal" nicht T_1, das ist dann etwas anderes (→ immer nachschlagen). Munkres und Dugundji benutzen die Definition §2.1.

Bsp
- $\#X \geq 2$ ⇝ Klumpentopologie ist nicht T_1
- $\#X = \infty$ ⇝ koendliche Topologie ist T_1, aber nicht T_2
- die diskrete Topologie ist stets T_4 (mit $A=U$ und $B=V$)

2. Umformulierung der Trennungsaxiome T_2, T_3, T_4

Lemma A X sei ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist Hausdorff-Raum
(ii) $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ ist abgeschlossen

Bew: (i)⇒(ii) für $p \neq q$ exist. U, V offen mit $p \in U$, $q \in V$, $U \cap V = \emptyset$ ⇒ $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$



(ii)⇒(i) Für $p \neq q$ exist. U, V off mit $(p,q) \in U \times V$, $(U \times V) \cap \Delta_X = \emptyset$ ⇒ $U \cap V = \emptyset$ □

Korollar Sind X, Y topologische Räume und ist Y Hausdorff-Raum, und sind $\varphi, \psi : X \rightrightarrows Y$

zwei stetige Abbildungen, so ist $K = \{x \in X \mid \varphi(x) = \psi(x)\} \subseteq X$ abgeschlossen.

<u>Beweis</u>: Betrachte $\xi : X \to Y \times Y$, $x \mapsto (\varphi(x), \psi(x)) = \xi(x)$

$$K = \xi^{-1}(\Delta_Y)$$ $\square$

<u>Lemma B</u> Sei X ein topologischer T_1-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist regulär

(ii) für jedes $p \in X$ und jede Umgebung M von p gibt es eine Umgebung N von p mit $\overline{N} \subseteq M$

(iii) für jedes $p \in X$ und jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ mit $p \notin A$ gibt es eine Umgebung N von p mit $\overline{N} \cap A = \emptyset$

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $W \subseteq M$ offen mit $p \in W$ und $A = X - W$. Dann gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $p \in U$, $A \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset \Rightarrow \overline{U} \subseteq X - V$
$\Rightarrow \overline{U} \cap A = \emptyset \Rightarrow \overline{U} \subseteq W$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Setze $M = X - A$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $V = X - \overline{N} \supseteq A$, $U \subseteq N$ offen mit $p \in U$. $\square$

<u>Lemma C</u> Sei X ein topologischer T_1-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist normal

(ii) Für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq X$ und offene Menge $U \subseteq X$ mit $A \subseteq U$ gibt es eine offene Menge $V \subseteq X$ mit

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Setze $B = X - U$. Dann gibt es offene Mengen $U_A, U_B \subseteq X$ mit $A \subseteq U_A$, $B \subseteq U_B$, $U_A \cap U_B = \emptyset \Rightarrow \overline{U_A} \cap U_B = \emptyset \Rightarrow \overline{U}_A \cap B = \emptyset$

$A \subseteq U_A \subseteq \overline{U_A} \subseteq U$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Setze $U = X - B$, so $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

$\Rightarrow B \subseteq X - \overline{V}$ und $V \cap (X - \overline{V}) = \emptyset$ $\square$

3. Lemma Ist $(X, <)$ geordnet, so ist die Ordnungstopologie $\mathfrak{T}_<$ Hausdorffsch.

Beweis Sei $p, q \in X$, $p < q$. Wenn es $r \in X$ gibt mit $p < r < q$, so $\underbrace{(-\infty, r)}_{\ni p} \cap \underbrace{(r, \infty)}_{\ni q} = \emptyset$.

Wenn es kein $r \in X$ gibt mit $p < r < q$, so $\underbrace{(-\infty, q)}_{\ni p} \cap \underbrace{(p, \infty)}_{\ni q} = \emptyset$ $\square$

ÜA: Jede Ordnungstopologie ist sogar regulär
(sogar: normal)

Satz Jeder metrisierbare topologische Raum X ist normal.

Beweis Sei d eine Metrik auf X mit $\mathfrak{T}_d = \mathfrak{T}$.

Sei $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$.

Für jedes $a \in A$ wähle $\varepsilon_a > 0$ mit $B_{\varepsilon_a}(a) \cap B = \emptyset$,

ähnlich wähle zu jedem $b \in B$ ein $\varepsilon_b > 0$ mit $B_{\varepsilon_b} \cap A = \emptyset$.

Setze $U = \bigcup \{ B_{\varepsilon_a/2}(a) \mid a \in A \} \supseteq A$

$V = \bigcup \{ B_{\varepsilon_b/2}(b) \mid b \in B \} \supseteq B$

Angenommen, $p \in U \cap V$. Dann gibt es $a \in A$, $b \in B$ mit $p \in B_{\varepsilon_a/2}(a) \cap B_{\varepsilon_b/2}(b)$

$\Rightarrow d(a,b) \leq d(a,p) + d(p,b) < \varepsilon_a/2 + \varepsilon_b/2$

$\Rightarrow \varepsilon_a > d(a,b)$ oder $\varepsilon_b > d(a,b)$ ↯ □

(Alternativer Beweis mit ÜA 3.2: Setze
$\varphi(p) = d(p,A)$, $\psi(p) = d(p,B)$
$U = \{ p \mid \varphi(p) < \psi(p) \}$ $V = \{ p \mid \varphi(p) > \psi(p) \}$)

4. Satz Sei X ein T_m-Raum, $m = 1,2,3$, sei $Y \subseteq X$. Dann ist Y ein T_m-Raum in der Unterraumtopologie.

Beweis Klar: X T_1 $\Rightarrow$ Y ist T_1. Betrachte $m = 3$, der Fall $m = 2$ ist ähnlich. Sei $A \subseteq Y$ abgeschlossen in Y. Dann gibt es $B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A = B \cap Y$. Sei $p \in Y - A$. Es folgt $p \notin B$, d.h. gibt es $U, V \subseteq X$ offen mit $p \in U$, $B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $U \cap Y$ und $V \cap Y$ offen in Y, $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$
$p \in U \cap Y$ und $A \subseteq V \cap Y$ □

5. <u>Satz</u> Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von topologischen Räumen, sei $X = \prod_{i\in I} X_i$ nicht leer. Sei $m = 1,2,3$. Dann sind äquivalent:

(i) X ist ein T_m-Raum

(ii) jedes X_i ist ein T_m-Raum

<u>Beweis</u> (i) => (ii) Nach § 1.19 ist jedes X_j homöomorph zu einem Unterraum von X, nach § 2.4 folgt, dass jedes X_j ein T_m-Raum ist.

(ii) => (i) für $m = 1$. Sei $p = (p_i)_{i\in I} \in X$, setze $V_j = (X_j - \{p_j\}) \times \prod_{i\neq j} X_i \subseteq X$. Dann ist V_j offen und $X - \{p\} = \bigcup\{V_j \mid j\in I\}$ ist offen.

(ii) => (i) für $m = 3$ ($m = 2$ ähnlich).

Sei $p = (p_i)_{i\in I} \in X$, sei M eine Umgebung von p. Es gibt $I_0 \subseteq I$ endlich, $U_i \subseteq X$ offen für $i\in I_0$ mit $p \in \prod_{i\in I_0} U_i \times \prod_{i\in I-I_0} X_i \subseteq M$

Für jedes $i\in I_0$ wähle $V_i \subseteq X_i$ mit $p_i \in V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i$ und betrachte

$$p \in V = \prod_{i\in I_0} V_i \times \prod_{i\in I-I_0} X_i \subseteq \prod_{i\in I_0} \overline{V_i} \times \prod_{i\in I-I_0} X_i \subseteq M$$

Allgemein gilt: ist $A_i \subseteq X_i$ abgeschlossen, so ist

$\prod_{i \in I} A_i \subseteq X$ abgeschlossen, denn

$$\prod_{i \in I} A_i = \bigcap \{ A_j \times \prod_{i \neq j} X_i \mid j \in I \}$$

$$A_j \times \prod_{i \neq j} X_i = X - \left((X_j - A_j) \times \prod_{i \neq j} X_i \right)$$

Es folgt $\overline{V} \subseteq M$. $\square$

<u>Bemerkung</u> Die Analoga zu §2.4 und §2.5 für normale Räume sind falsch.

- $\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_L$ ist nicht normal, aber $\mathbb{R}_L$ ist normal !
  ($\mathbb{R}_L$ Sorgenfrey-Gerade)

- Ist I überabzählbar, so ist $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ nicht normal !

Normale Räume sind wichtig, weil es auf ihnen viele stetige reelle Funktionen gibt.

6. **Def** Sei X ein topologischer Raum, seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to [0,1]$ heißt Urysohn-Funktion für (A, B), wenn für alle $a \in A$, $b \in B$ gilt $\varphi(a) = 0$ und $\varphi(b) = 1$.

Bsp: X metrischer Raum, $\varphi(p) = \dfrac{d(p,A)}{d(p,A) + d(p,B)}$ ist Urysohn-Funktion

Theorem (Urysohns Lemma) Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist normal

(ii) Für alle $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt gibt es eine Urysohn-Funktion.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, sei $\varphi : X \to [0,1]$ eine Urysohn-Funktion für (A, B). Setze $U = \{p \in X \mid \varphi(p) < \frac{1}{2}\}$

$V = \{p \in X \mid \varphi(p) > \frac{1}{2}\}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt, seien $U, V \subseteq X$ offen und disjunkt mit $A \subseteq U$, $B \subseteq V$. Setze $U_0 = U$, $U_1 = X - B$ und $S = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Sei $a : \mathbb{N} \to S$ eine Bijektion mit $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Wir definieren rekursiv offene Mengen U_s für $s \in S$ mit

$$s < t \Rightarrow U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_t .$$

Angenommen, U_s ist schon definiert für

$s = a_0, a_1, \dots, a_\ell$. Schreibe $\{a_0, \dots, a_\ell\} = \{s_0 < s_1 < \dots < s_\ell\}$

$\leadsto \quad s_j < a_{\ell+1} < s_{j+1}$ für $0 \le j < \ell$.

Nach §2.2 Lemma C gibt es V mit

$$U_{s_j} \subseteq \overline{U_{s_j}} \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U_{s_{j+1}}$$

Setze $U_{a_{\ell+1}} = V$. Für $s \in \mathbb{Q}$ $s < 0$ setze $U_s = \emptyset$
$s > 1$ setze $U_s = X$

Für $p \in X$ sei nun $Q(p) = \{ s \in \mathbb{Q} \mid p \in U_s \}$ und

$\varphi(p) = \inf Q(p)$. Klar: $\varphi(X) \subseteq [0,1]$

$a \in A \subseteq U_0 \Rightarrow \varphi(a) = 0$

$b \in B \Rightarrow \varphi(b) = 1$

Bleibt zu zeigen, dass φ stetig ist.

Zunächst gilt: $p \in \overline{U_s} \Rightarrow \varphi(p) \le s$

$p \notin U_s \Rightarrow \varphi(p) \ge s$

Sei jetzt $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, zeige, dass $\varphi^{-1}((a,b)) \subseteq X$

offen ist. Angenommen, $\varphi(p) \in (a,b)$. Wähle $s,t \in \mathbb{Q}$

mit $a < s < \varphi(p) < t < b$

Beh: $V = U_t - \overline{U_s}$ ist offene Umgebung von p

mit $\varphi(V) \subseteq (a,b)$

Dann: $\left.\begin{array}{lll} q \notin U_t & \Rightarrow & \varphi(q) \geq t \\ q \in \overline{U}_s & \Rightarrow & \varphi(q) \leq s \end{array}\right\} \Rightarrow p \in V$

$$q \in V \Rightarrow \left\{\begin{array}{lll} q \in U_t \subseteq \overline{U}_t & \Rightarrow & \varphi(q) \leq t \\ q \notin \overline{U}_s \Rightarrow q \notin U_s & \Rightarrow & \varphi(q) \geq s \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(q) \in (a,b)$$

$\square$

Urysohn-Funktionen sind nützlich für die Konstruktion stetiger reeller Funktionen. Wir kommen als nächstes Tietzes Fortsetzungssatz. Vorher ein Lemma

7. Lemma Sei X ein normaler topologischer Raum, sei $A \subseteq X$ abgeschlossen, sei $\varphi: A \to \mathbb{R}$ stetig mit $\varphi(A) \subseteq [-c, c]$. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\psi: X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ mit

$$|\varphi(p) - \psi(p)| \leq \frac{2}{3}c \text{ für alle } a \in A.$$

Beweis Sei $A_+ = \{a \in A \mid \varphi(a) \geq \frac{1}{3}c\}$

$A_- = \{a \in A \mid \varphi(a) \leq -\frac{1}{3}c\}$

Nach Urysohns Lemma gibt es eine stetige Abbildung

$\psi: X \to [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$ mit $\psi(a) = \frac{c}{3}$ für $a \in A_+$

$\psi(a) = -\frac{c}{3}$ für $a \in A_-$

Für $a \in A_+ \cup A_-$ folgt $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{c}{3}$, für $-\frac{c}{3} < \varphi(a) < \frac{c}{3}$ folgt $|\varphi(a) - \psi(a)| \leq \frac{2}{3} \cdot c$

$\square$

8. <u>Theorem</u> (Tietzes Fortsetzungssatz) Sei X ein T_1-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist normal

(ii) für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq X$ und jede stetige Abbildung $\varphi: A \to \mathbb{R}$ gibt es eine stetige Fortsetzung $\Phi: X \to \mathbb{R}$ (d.h. $\varphi(a) = \Phi(a)$ für alle $a \in A$).

Wenn (i) gilt und wenn $\varphi(A) \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ gilt, kann Φ so gewählt werden, dass $\Phi(X) \subseteq [a,b]$.

Wenn (i) gilt und wenn $\varphi(A) \subseteq (a,b) \subseteq \mathbb{R}$ gilt, dann kann Φ so gewählt werden, dass $\Phi(X) \subseteq (a,b)$.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Definiere $\varphi(a) = 0$ für alle $a \in A$, $\varphi(b) = 1$ für alle $b \in B$ $\leadsto$ $\varphi: A \cup B \to \mathbb{R}$ ist stetig. Sei Φ eine stetige Fortsetzung, setze

$$U = \{p \in X \mid \varphi(p) < \tfrac{1}{2}\}$$
$$V = \{p \in X \mid \varphi(p) > \tfrac{1}{2}\}$$

(i) $\Rightarrow$ (ii) (a) Sei $\varphi: A \to [-1,1]$ stetig. Nach dem Lemma existiert $\psi_0: X \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ stetig mit $|\varphi(a) - \psi_0(a)| \le \frac{2}{3}$ für $a \in A$. Wende das Lemma an auf $\varphi - \psi_0$, erhalte ψ_1 usw...

$$\leadsto \quad |\psi_{n+1}(p)| \le \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } p \in X \text{ und}$$

$$|\varphi(a) - \psi_0(a) - \psi_1(a) - \dots - \psi_{n+1}(a)| \le \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{für alle } a \in A$$

Setze $\Phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(p)$ $\Rightarrow$ $|\Phi(p)| \le \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ #

$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \underbrace{1}_{\text{für alle } p \in X}$, sowie $\Phi(a) = \varphi(a)$ für alle $a \in A$

Φ ist stetig, denn die Reihe konvergiert gleichmäßig. Genauer: sei $p \in X$ und $\varepsilon > 0$. Wähle m so, dass $\frac{1}{3}\sum_{n>m} \left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{\varepsilon}{3}$ gilt. Wähle eine Umgebung M von p so, dass für alle $q \in M$ gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{m} \varphi_n(q) - \sum_{n=0}^{m} \varphi_n(p) \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Es folgt $|\Phi(q) - \Phi(p)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

(b) Sei nun $\varphi: A \to (-1,1)$ stetig. Nach (a) gibt es eine Fortsetzung $\Phi: X \to [-1,1]$ von φ. Sei $B = \{p \in X \mid |\Phi(p)| = 1\}$, sei $\lambda: X \to [0,1]$ Urysohn-Funktion mit $\lambda(b) = 0$ für alle $b \in B$
$\lambda(a) = 1$ für alle $a \in A$

Dann ist $p \longmapsto \lambda(p) \cdot \Phi(p)$ eine Fortsetzung von φ und $|\lambda(p) \cdot \Phi(p)| < 1$ für alle $p \in X$.

(c) Sei nun $\varphi: A \to \mathbb{R}$ stetig. Wähle einen Homöomorphismus $\varrho: \mathbb{R} \to (-1,1)$, nach (b) gibt es eine Fortsetzung Φ von $\varrho \circ \varphi: A \to (-1,1)$

Sei $\tau : (-1,1) \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion zu g

$\Rightarrow \tau \circ \Phi : X \to \mathbb{R}$ ist Fortsetzung von φ.

(d) Genauso benutzt man Homöomorphismen

$[-1,1] \xrightarrow{\cong} [a,b]$ bzw $(-1,1) \to (a,b)$

um Fortsetzung von $\varphi : A \to [a,b]$ bzw. $\varphi : A \to (a,b)$ zu konstruieren. $\square$

9. <u>Def</u> Sei X ein topologischer Raum, sei $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Teilmengen von X. Man nennt $\mathcal{C}$ <u>offene Überdeckung</u> von X, wenn gilt $\bigcup \mathcal{C} = X$.

Ein Hausdorffraum X heißt <u>kompakt</u> (*), wenn gilt: für jede offene Überdeckung $\mathcal{C}$ von X gibt es eine endliche Teilmenge $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ mit $\bigcup \mathcal{C}_0 = X$ (d.h. $\mathcal{C}_0 = \{U_1, \dots, U_m\}$, $X = U_1 \cup \dots \cup U_m$)

<u>Bsp</u> • Ein diskreter topologischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er endlich ist (setze $\mathcal{C} = \{\{p\} \mid p \in X\}$)

(*) Achtung: manche Bücher setzen nicht Hausdorff voraus!
(in der Definition von Kompaktheit)

- $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt: setze $\mathcal{C} = \{(-\ell,\ell) \mid \ell \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$
- Die Lange Halbgerade ist nicht kompakt: setze

$U_\alpha = \{(\xi,t) \in \omega_1 \times [0,1) \mid \xi < \alpha\}$ für $\alpha \in \omega_1$

$\mathcal{C} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$ vgl. §1.7.

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines Hausdorffraums heißt <u>kompakt</u>, wenn A in der Unterraumtopologie kompakt ist. Äquivalent dazu: ist $\mathcal{C}$ Menge von offenen Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $m \geq 0$, $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_m$ (klar).

10. <u>Lemma</u> Sei X ein Hausdorffraum, sei $A \subseteq X$.

(i) Wenn A kompakt ist, so ist A abgeschlossen in X

(ii) Wenn X kompakt ist und $A \subseteq X$ abgeschlossen ist, so ist A kompakt.

<u>Beweis</u> (i) Sei $W = X - A$, sei $p \in W$. Zu jedem $a \in A$ gibt es eine (offene) Umgebung U_a von a und V_a von p mit $V_a \cap U_a = \emptyset$ (weil X T_2-Raum ist.). Setze $\mathcal{C} = \{U_a \mid a \in A\} \Rightarrow A \subseteq U_{a_1} \cup \ldots U_{a_m}$, setze

$p \in V = V_{a_1} \cap \ldots \cap V_{a_m} \Rightarrow V \cap A = \emptyset \Rightarrow A$ abg. in X.

(ii) Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Mengen in X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Dann gilt $X = \bigcup \mathcal{C} \cup (X-A)$, also gibt es $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{C}$ mit $X = U_1 \cup \dots \cup U_m \cup (X-A)$
$\Rightarrow A \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$ □

11. Satz Jeder kompakte Raum ist normal.

Beweis 1. Schritt: X kompakt $\Rightarrow$ X regulär.

Sei $A \subseteq X$ abg., $p \in X - A$. Dann gibt es zu jedem $a \in A$ offene disjunkte Umgebung U_a von a und V_a von p.
Da A kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_m \in A$ mit $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m} = U$. Setze $V = V_{a_1} \cap \dots V_{a_m} \Rightarrow p \in V$ und $U \cap V = \emptyset$.

2. Schritt X kompakt $\Rightarrow$ X normal.

Sei $A, B \subseteq X$ abg. und disjunkt. Für jedes $a \in A$ seien $U_a, V_a \subseteq X$ offen und disjunkt mit $a \in U_a$, $B \subseteq V_a$. Da A kompakt ist, gibt es $a_1, \dots, a_m \in A$ mit $A \subseteq U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m} = U$.
Setze $V = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_m} \Rightarrow B \subseteq V$ und $U \cap V = \emptyset$. □

12. Satz Seien X, Y Hausdorff-Räume, sei $\varphi: X \to Y$ stetig. Wenn $A \subseteq X$ kompakt ist, so ist auch $\varphi(A) \subseteq Y$ kompakt und folglich abgeschlossen.

Beweis Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Mengen in Y mit $\varphi(A) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, sei $\mathcal{E} = \{\varphi^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{C}\}$

Es folgt: $\mathcal{E}$ ist Menge von offenen Teilmengen von X mit $A \subseteq \bigcup \mathcal{E} \Rightarrow$ es gibt $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{C}$ mit $A \subseteq \varphi^{-1}(U_1) \cup \dots \cup \varphi^{-1}(U_m) \Rightarrow \varphi(A) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$ $\square$

<u>Korollar</u> Sei Y ein Hausdorffraum, sei X kompakt und sei $\varphi : X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist φ ein Homöomorphismus.

<u>Beweis</u> Sei $\psi : Y \to X$ die Umkehrabbildung von φ, zz: ψ ist stetig. Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt nach § 2.10, also ist $\psi^{-1}(A) = \varphi(A) \subseteq Y$ kompakt nach § 2.12, also ist $\psi^{-1}(A)$ abg. in Y nach § 2.10. Nach § 1.9 ist ψ stetig. $\square$

13. <u>Lemma A</u> In einem kompakten metrischen Raum hat jede Folge eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u> Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge im kompakten metrischen Raum X, sei $Q_n = \{ p_k \mid k \geq n \} \subseteq X \Rightarrow Q_0 \subseteq Q_1 \subseteq \dots$. Setze $U_n = X - \overline{Q_n} \subseteq X - Q_n$. Es folgt $U_0 \cup \dots \cup U_n \subseteq X - Q_n \neq X$, also (weil X kompakt) $X \neq \bigcup_{n \geq 0} U_n$, d.h. $\emptyset \neq \bigcap_{n \geq 0} \overline{Q_n}$. Sei $q \in \bigcap_{n \geq 0} \overline{Q_n}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ ist dann $B_{2^{-j}}(q) \cap Q_m \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt $n_0 < n_1 < \dots < n_k < \dots$ mit $\lim_k p_{n_k} = q \rightsquigarrow$ konvergente Teilfolge. $\square$

Ein Hausdorff-Raum, in dem jede Folge eine konvergente Teilfolge hat, heißt <u>folgenkompakt</u>.

<u>Bsp</u>. • X kompakt $\Rightarrow$ X folgenkompakt (Lemma A)

• Alexandrovs Halbgerade L ist folgenkompakt nach §1.7, aber <u>nicht</u> kompakt: Setze
$U_\alpha = \{(\xi, s) \in L \mid \xi < \alpha\}$ und $\mathcal{C} = \{U_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$
$\Rightarrow \bigcup \mathcal{C} = L$ aber $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \omega_1 \Rightarrow$
$(\alpha, 0) \notin U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_m}$ für $\alpha > \alpha_1 \dots \alpha_m$ $\lightning$

<u>Lemma B</u> (Lebesgues Lemma) Sei X ein folgenkompakter metrischer Raum, sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass für jedes $p \in X$ ein $U \in \mathcal{C}$ existiert mit $p \in B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

<u>Bew:</u> Wäre das falsch, gäbe es eine Folge $p_n \in X, n \in \mathbb{N}$ so, dass $B_{2^{-n}}(p_n)$ in <u>keinem</u> $U \in \mathcal{C}$ liegt. Sei $(q_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ konvergente Teilfolge mit Grenzwert q. Sei $U \in \mathcal{C}$ mit $q \in U$, wähle $r > 0$ so, dass $B_r(q) \subseteq U$.
Für $i \gg 1$ ist $q_{n_i} \in B_{r/2}(q)$ und $2^{-n_i} < \frac{r}{2}$
$\Rightarrow B_{2^{-n_i}}(q_{n_i}) \subseteq U$ $\lightning$ $\square$

14. <u>Theorem</u> Sei X ein metrischer Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist kompakt (ii) X ist folgenkompakt.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) nach §2.13 Lemma A.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\mathcal{C}$ offene Überdeckung von X, sei $\varepsilon > 0$ gewählt wie in §2.13 Lemma B.

<u>Beh:</u> endlich viele ε-Bälle überdecken X.

[Sonst: $p_0 \in X$, $p_1 \in X - B_\varepsilon(p_0)$, $p_2 \in X - (B_\varepsilon(p_0) \cup B_\varepsilon(p_1))$ usw $\Rightarrow$ $d(p_i, p_j) \geq \varepsilon$ für alle $i<j$ $\Rightarrow$ keine konvergente Teilfolge ↯]

Also $X = B_\varepsilon(q_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(q_m)$ und es gibt $U_i \in \mathcal{C}$ mit $B_\varepsilon(q_i) \subseteq U_i$ $\Rightarrow$ $X = U_1 \cup \dots \cup U_m$ $\square$

15. <u>Def</u> Ein metrischer Raum X heißt <u>total beschränkt</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele $q_1, \dots, q_m \in X$ gibt mit $X = B_\varepsilon(q_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(q_m)$

<u>Theorem</u> Ein metrischer Raum X ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und total beschränkt ist.

<u>Beweis</u> Angenommen, X ist kompakt. Sei $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$
$X = \bigcup \{B_\varepsilon(q) \mid q \in X\}$ $\Rightarrow$ $X = B_\varepsilon(q_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(q_m)$ für endlich viele $q_1, \dots, q_m$.

Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in X, sei (q_{n_i}) konvergente Teilfolge mit Grenzwert $q \in X$, vgl. §2.14. Sei $\varepsilon > 0$, sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $d(q_i, q_j) \leq \varepsilon/2$ für $i, j \geq m$. Wähle i so, dass $d(q_{n_i}, q) \leq \varepsilon/2$ und $n_i \geq m$. Es folgt $d(q_i, q) \leq \varepsilon$ für $i \geq m$. □

Sei jetzt X total beschränkt und vollständig. Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Ball $B_\varepsilon(p_\varepsilon) \subseteq X$, der unendlich viele Folgenglieder enthält. Induktiv finden wir unendliche Teilmengen

$$\mathbb{N} \supseteq I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots \quad \text{und } p_k \in X \text{ so, dass}$$

$$q_j \in B_{2^{-k}}(p_k) \quad \text{für alle } j \in I_k \text{ gilt.}$$

Wähle $n_k \in I_k$ so, dass $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$, es folgt: $(q_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in X, hat also einen Grenzwert q. Damit ist X folgenkompakt. □

<u>Bsp</u>
- $\mathbb{R}$ ist vollständig und beschränkt mit
  $\bar{d}(s,t) = \min\{|s-t|, 1\}$ vgl. ÜA 2.3
  aber <u>nicht</u> kompakt, etwa
  $\mathcal{C} = \{(-\infty, n) \mid n \in \mathbb{N}\} \rightsquigarrow \mathbb{R} = \bigcup \mathcal{C}$
- Alexandrovs Halbgerade L ist folgenkompakt, aber nicht kompakt $\Rightarrow$ L ist nicht metrisierbar
- I überabzählbar $\Rightarrow$ $\prod_{i\in I} [0,1]$ kompakt (Tychonov) aber <u>nicht</u> folgenkompakt

16. **Def** Eine Menge von Mengen $\mathcal{E}$ hat die endliche Durchschnittseigenschaft (ED), wenn für alle $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$ gilt $E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset$.

Satz Sei X ein Hausdorff-Raum. Dann sind äquivalent: (i) X ist kompakt

(ii) ist $\mathcal{A}$ eine Menge von abgeschlossenen Teilmengen von X mit (ED), so gilt $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Bew Für eine Menge von Teilen $\mathcal{E}$ von X setze $\mathcal{E}^* = \{ X - E \mid E \in \mathcal{E} \}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{E}^{**} = \mathcal{E}$

Nun gilt: • $\bigcap \mathcal{E} \neq \emptyset \iff \bigcup \mathcal{E}^* \neq X$

• $\mathcal{E}$ hat (ED) $\iff$ für alle $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{E}^*$ gilt $U_1 \cup \dots \cup U_m \neq X$

$\square$

17. **Theorem** (Satz von Tychonov) Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von Hausdorff-Räumen, sei $X = \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

Dann sind äquivalent: (i) jedes X_i ist kompakt

(ii) X ist kompakt.

Bew (ii) $\Rightarrow$ (i) $X_i = pr_i(X)$ kompakt nach §2.12.

(i) $\Rightarrow$ (ii) mit Zorns Lemma.

Sei $\mathcal{A}$ ein Mg von abg. Teilmge von X mit (ED). Zu zeigen: $\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

(a) Setze $P = \{ \mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$ und $\mathcal{E}$ hat (ED)$\}$

($\Rightarrow \mathcal{A} \in P$). Bezüglich "$\subseteq$" ist P partiell geordnet.

<u>Beh:</u> In P gibt es maximale Elemente.

<u>Denn:</u> Ist $\mathcal{G} \subseteq P$ eine Kette, so setze $\mathcal{C} = \bigcup \mathcal{G}$.

Für $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{C}$ gibt es $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_m \in \mathcal{G}$ mit $E_i \in \mathcal{E}_i$. OE $\mathcal{E}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathcal{E}_m$ (denn $\mathcal{G}$ ist Kette!)

$\Rightarrow E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}_m \Rightarrow E_1 \cap \dots \cap E_m \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{C}$ hat (ED)

Also ist P induktiv geordnet und hat nach Zorns Lemma maximale Elemente.

(b) Sei jetzt $\mathcal{E} \in P$ ein maximales Element.

<u>Beh:</u> $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E} \Rightarrow E_1 \cap \dots \cap E_m \in \mathcal{E}$

<u>Denn:</u> $\mathcal{E} \cup \{E_1 \cap \dots \cap E_m\}$ hat (ED) und $\mathcal{E}$ ist maximal.

(c) Für jedes $i \in I$ sei $\mathcal{E}_i = \{ \overline{pr_i(E)} \subseteq X_i \mid E \in \mathcal{E} \}$

Dann hat $\mathcal{E}_i$ (ED), also gibt es $p_i \in \bigcap \mathcal{E}_i \subseteq X_i$, denn X_i ist kompakt.

Setze $p = (p_i)_{i \in I} \in X$, sei $U_i \subseteq X_i$ (beliebige) Umgebung von p_i

(d) <u>Beh</u> $\left(U_i \times \prod_{j \neq i} X_j\right) \in \mathcal{E}$

<u>Denn:</u> nach (c) gilt für jedes $E \in \mathcal{E}$, dass

$$E \cap \left(U_i \times \prod_{j \neq i} X_j\right) \neq \emptyset .$$

Mit (b) folgt: $E_1, \dots, E_m \in \mathcal{E}$

$$\Rightarrow E_1 \cap \dots \cap E_m \cap \left(U_i \times \prod_{j \neq i} X_j \right) \neq \emptyset$$

Nach Maximalität von $\mathcal{E}$ folgt $U_i \times \prod_{j \neq i} X_j \in \mathcal{E}$

(e) Für alle $E \in \mathcal{E}$ gilt $p \in \overline{E}$.

Denn: $I_0 \subseteq I$ endlich, $U_i \subseteq X_i$ Umgebung von p_i

$$\Rightarrow \prod_{i \in I_0} U_i \times \prod_{j \in I - I_0} X_j = \bigcap_{i \in I_0} \left(U_i \times \prod_{j \neq i} X_j \right) \overset{(b)}{\in} \mathcal{E}$$

Insgesamt folgt nun $p \in \bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcap \{ \overline{E} \mid E \in \mathcal{E} \}$ $\square$

18. Def Ein T_1-Raum X heißt Tychonov-Raum oder vollständig regulär oder $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum, wenn es für jedes $p \in X$ und jede Umgebung N von p ein $\varphi: X \to [0,1]$ stetig gibt mit $\varphi(p) = 1$, $\varphi(X - N) = \{0\}$.

Klar: • $T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$ (mit § 2.2)

• Unterräume von $T_{3\frac{1}{2}}$-Räumen sind $T_{3\frac{1}{2}}$

Konstruktion: Sei X ein Tychonov-Raum, sei

$$\iota_X : X \longrightarrow \prod_{\varphi \in C(X,[0,1])} [0,1] \qquad \iota_X(p) = (\varphi(p))_{\varphi \in C(X,[0,1])}$$

Lemma Wenn X ein Tychonov-Raum ist, so ist φ stetig, injektiv und ein Homöomorphismus $X \xrightarrow{\cong} \iota_X(X)$

<u>Beis</u> $pr_\varphi \circ \iota_X(p) = \varphi(p)$ stetig, für $\varphi \in C(X,[0,1])$
also ι_X stetig nach § 2.16. Ist $p \neq q$, $p, q \in X$
so gibt es nach Definition $\varphi \in C(X,[0,1])$ mit $\varphi(p) = 1$
$\varphi(q) = 0$ (setze $N = X - \{q\}$) $\Rightarrow$ ι_X injektiv.
Sei $A \subseteq X$ abg., sei $p \in X - A$. Dann gibt es $\varphi \in C(X,[0,1])$
mit $\varphi(p) = 1$ $\varphi(X-A) = \{0\}$. Es folgt für $\overline{\iota_X(A)}$:
$pr_\varphi(\overline{\iota_X(A)}) \subseteq \overline{\{0\}} = \{0\}$ $\quad (pr_\varphi(\iota_X(p)) = 1$ also
$\iota_X(p) \notin \overline{\iota_X(A)} \Rightarrow \overline{\iota_X(A)} \cap \iota_X(X) = \iota_X(A)$, d.h.
ι_X ist Homöomorphismus zwischen X und $\iota_X(X)$. □

<u>Korollar</u> Jeder Tychonov-Raum ist homöomorph zu einem Unterraum eines kompakten Raumes (insbesondere: eines normalen Raumes, § 2,11)

19 <u>Def</u> Sei X Tychonov-Raum, sei ι_X wie in § 2.18 definiert und sei $\beta X = \overline{\iota_X(X)} \subseteq \prod_{\varphi \in C(X,[0,1])} [0,1]$. Dann ist βX kompakt. Man nennt $\iota_X : X \to \beta X$ die <u>Čech-Stone-Kompaktifizierung von X</u>.

<u>Lemma</u> Seien X, Y Tychonov-Räume, sei $\xi : X \to Y$ stetig. Dann gibt es genau eine stetige Abbildung $\beta\xi : \beta X \to \beta Y$ so, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\iota_X"'] & Y \arrow[d, "\iota_Y"] \\ \beta X \arrow[r, "\beta\xi"] & \beta Y \end{tikzcd}$$

kommutiert.

<u>Beweis</u> <u>Eindeutigkeit</u> klar nach §2.2 Korollar zu Lemma A, denn $\iota_X(X) \subseteq \beta X$ ist dicht.

<u>Existenz</u>: Schreibe $C = C(X,[0,1])$, $E = C(Y,[0,1])$, $D = \{\psi \circ \xi \mid \psi \in E\} \subseteq C$, setze

$$\begin{tikzcd}
(\varphi(p))_{\varphi\in C} \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, "\beta\xi"'] & (\varphi(p))_{\varphi\in D} \arrow[d, mapsto] \\
 & (\psi(\xi(p)))_{\psi\in E}
\end{tikzcd}$$

□

$\beta\xi$ (stetig nach §2.16

<u>Korollar</u> Ist K kompakt, X Tychonov und ist $\xi : X \to K$ stetig, so gibt es genau eine stetige Abbildung $\beta\xi : \beta X \to K$ mit $\beta\xi \circ \iota_X = \xi$ (!)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "\iota_X"'] & & K \\
 & \beta X \arrow[ur, "\beta\xi"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u> K kompakt $\overset{(§2.12)}{\Longrightarrow}$ $\iota_K(K)$ kompakt $\Rightarrow$ $\iota_K(K) \cong \beta K \cong K$ □

Die Čech-Stone-Kompaktifizierung ist oft nützlich (und zu wenig bekannt) in Topologie und Logik.

20. Def Sei K kompakt. Dann gilt (wegen §2.12 und §2.15) $C(K,\mathbb{R}) = C_b(K,\mathbb{R})$. Weiter ist $|\varphi|_\infty = \sup\{|\varphi(p)| \mid p \in K\}$ eine Norm auf $C(K,\mathbb{R})$ und $C(K,\mathbb{R})$ ist ein Banachraum (vgl §0.15, der Beweis überträgt sich direkt).

Eine Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ heißt <u>gleichgradig stetig in $p \in K$</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung N von p gibt, so dass für alle $q \in N$, $\varphi \in \mathcal{F}$ gilt

$$|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq \varepsilon$$

<u>Theorem</u> (<u>Arzelas Theorem</u> / <u>Satz von Arzela-Ascoli</u>)

Sei K kompakt und $\mathcal{F} \subseteq C(K,\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:

(i) $\overline{\mathcal{F}} \subseteq C(K,\mathbb{R})$ ist kompakt (als Teilmenge des Banachraums $(C(K,\mathbb{R}), |\cdot|_\infty)$)

(ii) Für jedes $p \in K$ ist $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in p und $\overline{\{\varphi(p) \mid \varphi \in \mathcal{F}\}} \subseteq \mathbb{R}$ kompakt.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \mathcal{F}$ mit $\overline{\mathcal{F}} \subseteq B_\varepsilon(\varphi_1) \cup \dots \cup B_\varepsilon(\varphi_m)$.

Also $\overline{\{\varphi(p) \mid \varphi \in \mathcal{F}\}} \subseteq \underbrace{\overline{B_\varepsilon(\varphi_1(p)) \cup \dots \cup B_\varepsilon(\varphi_m(p))}}_{\text{kompakt}} \subseteq \mathbb{R}$

Sei $p \in K$, sei N Umgebung von p so, dass für alle $q \in N$ und $k = 1, \dots, m$ gilt $|\varphi_k(p) - \varphi_k(q)| \leq \varepsilon$. Für $\psi \in B_\varepsilon(\varphi_k)$ folgt

$$|\psi(p) - \psi(q)| \leq \underbrace{|\psi(p) - \varphi_k(p)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|\varphi_k(p) - \varphi_k(q)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{|\varphi_k(q) - \psi(q)|}_{\leq \varepsilon} \leq 3\varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ gleichgradig stetig in p.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Wir zeigen, dass $\mathcal{F}$ total beschränkt ist. Da $\overline{\mathcal{F}}$ vollständig ist ($C(K,\mathbb{R})$ ist Banachraum!) folgt die Beh. mit §2.15. Sei $\varepsilon > 0$. Für jedes $p \in K$ gibt es Umgebung N_p so, dass $\varphi(N_p) \subseteq B_\varepsilon(p)$ für alle $\varphi \in \mathcal{F}$ (gleichgradige Stetigkeit in p). Also $K = N_{p_1} \cup \ldots \cup N_{p_m}$.

Setze $L = \overline{\bigcup \{\varphi(p_j) \mid \varphi \in \mathcal{F}, j = 1, .. m\}} \subseteq \mathbb{R}$ kompakt

$\Rightarrow \quad L \subseteq B_\varepsilon(t_1) \cup .. \cup B_\varepsilon(t_\ell) \qquad t_1, .., t_\ell \in \mathbb{R}, \ \ell \in \mathbb{N}$

Für $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, \ell\}$ bel. Abbildung sei

$\mathcal{F}_\sigma = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \varphi(p_i) \in B_\varepsilon(t_{\sigma(i)})\}$

$\Rightarrow \mathcal{F} = \bigcup \{\mathcal{F}_\sigma \mid \sigma : \{1, .., m\} \to \{1, .., \ell\}\}$

Zu $\psi, \varphi \in \mathcal{F}_\sigma$ und $p \in K$ gibt es $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $p \in N_{p_i}$, also

$$|\psi(p) - \varphi(p)| \leq |\psi(p) - \psi(p_i)| + |\psi(p_i) - t_{\sigma(i)}|$$
$$+ |t_{\sigma(i)} - \varphi(p_i)| + |\varphi(p_i) - \varphi(p)| < 4\varepsilon$$

$\Rightarrow |\psi - \varphi|_\infty < 4 \cdot \varepsilon$ für alle $\psi, \varphi \in \mathcal{F}_\sigma$.

Da $\{\sigma : \{1, .., m\} \to \{1, .. \ell\}\}$ endlich ist, ist $\mathcal{F}$ total beschränkt. $\square$

21. Anwendung von Arzela-Ascoli:

Sei $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $C(K,\mathbb{R})$, alle φ_n sind λ-Lipschitzstetig (für ein $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$). Wenn $\{\varphi_n(p) \mid n \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}$ für jedes $p \in K$ beschränkt ist, so gibt es eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$

Damit folgt zum Beispiel Peanos Existenzsatz für DGL:

Ist $F: [a,b]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so ist γ stetig diffbar gesucht mit: $\gamma(a) = c$
$\gamma'(t) = F(t,\gamma(t))$

Umschreiben in Integralgleichung: $\gamma(t) = c + \int_a^t F(s,\gamma(s))\,ds$

Definiere $\gamma_n(t) = \begin{cases} c & t \leq a \\ c + \int_a^t F(s,\gamma_n(s-2^{-n}))\,ds & a \leq t \leq b \end{cases}$

(rechte Seite ist wohldefiniert durch "Zeitverzögerung")

$|F(s,x)| \leq \lambda$ muss $|\gamma_n(s) - \gamma_n(t)| \leq \lambda |s-t|$ (mit MWS)

sowie $|\gamma_n(t) - \gamma_n(a)| \leq \lambda |b-a| \Rightarrow$ Arzela-Ascoli anwenden, konvergente Teilfolge $(\gamma_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit Grenzwert $\gamma \in C([a,b],\mathbb{R})$ sowie

$$\lim_j \left[t \mapsto \gamma_{n_j}(t-2^{-n_j})\right] = \gamma \quad \text{bzgl } \|.\|_\infty$$

$\Rightarrow \gamma$ löst Integralgleichung, $\gamma(t) = c + \int_a^t F(s,\gamma(s))\,ds$. $\square$

22. <u>Lemma</u> (<u>Satz von Dini</u>) Sei K kompakt, sei $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $C(K,\mathbb{R})$. Wenn für jedes $p\in K$ die Folge $(\varphi_n(p))_{n\geq 0}$ monoton wächst und wenn die Folge $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ punktweise gegen $\varphi\in C(K,\mathbb{R})$ konvergiert, dann konvergiert die Folge gleichmäßig gegen φ.

<u>Beweis</u> Sei $\varepsilon>0$. Für jedes $p\in K$ existiert $n_p\in\mathbb{N}$ so, dass $\varphi(p)-\varepsilon<\varphi_n(p)\leq\varphi(p)$ für alle $n\geq n_p$. Setze $U_p=\{q\in K\mid \varphi(q)-\varepsilon<\varphi_{n_p}(q)\}\subseteq K$ offene Umgebung von p. Also $K=U_{p_1}\cup\ldots\cup U_{p_m}$ (weil K kompakt). Für $n\geq n_{p_1},\ldots,n_{p_m}$ folgt

$$0\leq\varphi(q)-\varphi_n(q)\leq\varepsilon$$ □

<u>Korollar</u> Sei $K=[0,1]$, $p_0(t)=0$, $p_{n+1}(t)=\frac{1}{2}(p_n(t)^2+t)$. Dann konvergiert die Folge $(p_n)_{n\geq 0}$ gleichmäßig gegen $f(t)=1-\sqrt{1-t}$

<u>Beweis</u> Mit Induktion folgt $0\leq p_n(t)\leq 1$. Weiter

(*) $$p_{n+2}-p_{n+1}=\frac{1}{2}(p_{n+1}^2-p_n^2)$$

(einsehen), also wegen $p_1\geq p_0$ mit Induktion $p_{n+1}\geq p_n$. Da jede beschränkte monotone Folge konvergiert, existiert $f(t)=\lim_n p_n(t)$. Es folgt

$$f(t)=\frac{1}{2}(f(t)^2+t)\quad, 0\leq f(t)\leq 1$$

$\Rightarrow f(t)=1-\sqrt{1-t}$. Mit Dinis Theorem folgt die Beh. □

23. Erinnerung Ist X ein (kommutativer) (nicht leerer) topologischer Raum, dann ist $C(X,\mathbb{R})$ ein Ring, mit $(\psi+\varphi)(p) = \psi(p)+\varphi(p)$, $(\psi\cdot\varphi)(p) = \psi(p)\cdot\varphi(p)$ $1 = [p \mapsto 1]$ konstante Funktion.

Für jedes $q \in X$ ist $C(X,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \varphi(q)$ ein surjektiver Ringhomomorphismus. Folglich ist der Kern $I_q(X,\mathbb{R}) = \{\varphi \in C(X,\mathbb{R}) \mid \varphi(q) = 0\}$ ein maximales Ideal in $C(X,\mathbb{R})$ und $C(X,\mathbb{R})/I_q(X,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ (Einf. Algebra § 3.13). Jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ können wir die konstante Funktion $[p \mapsto \lambda]$ zuordnen, damit wird $\mathbb{R}$ ein Teilring von $C(X,\mathbb{R})$. Es gilt dann: jedes $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$ lässt sich eindeutig zerlegen als $\varphi = \varphi_0 + \lambda$

$$\varphi_0 \in I_q(X,\mathbb{R})$$
$$\lambda = \varphi(q) \in \mathbb{R}$$

(und $\varphi_0 = \varphi - \varphi(q)$), kurz

$$C(X,\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus I_q(X,\mathbb{R})$$

Ähnliches gilt für $C_b(X,\mathbb{R})$ und für $C(X,\mathbb{C})$.

24. Lemma A Sei $A \subseteq C_b(X,\mathbb{R})$ ein Teilring. Dann ist auch $\overline{A} \subseteq C_b(X,\mathbb{R})$ ein Teilring.

Beweis Wenn $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ und $(\psi_n)_{n\geq 0}$ gleichmäßig gegen φ, ψ konvergieren, so konvergieren $\varphi_n + \psi_n$ und $\varphi_n \cdot \psi_n$ gleichm. gegen $\varphi+\psi$ und $\varphi\cdot\psi$. $\square$

<u>Lemma B</u> Sei $A \subseteq C_b(X,\mathbb{R})$ ein abg. Teilring mit $\mathbb{R} \subseteq A$. Für alle $\varphi \in A$ gilt dann $|\varphi| = [p \mapsto |\varphi(p)|] \in A$. Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in A$, so ist auch $\min\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = [p \mapsto \min\{\varphi_1(p), \dots, \varphi_m(p)\}] \in A$ sowie $\max\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \in A$.

<u>Bew.</u> Sei $\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})$ mit $|\varphi|_\infty \leq 1$. Setze $r(p) = 1 - \varphi(p)^2 \Rightarrow r \in A$. Nun $\psi_0 = 0$, $\psi_{n+1}(p) = \frac{1}{2}(\psi_n(p)^2 - r(p)) \Rightarrow \psi_n \in A$ (mit Induktion), die Folge $(\psi_n)_{n\geq 1}$ in A konvergiert nach §2.22 gleichmäßig gegen $1 - \sqrt{1-r}$ $= 1 - \sqrt{\varphi^2} = 1 - |\varphi|$, es folgt $|\varphi| \in A$.

Ist $\varphi \in C_b(X,\mathbb{R})$ mit $|\varphi|_\infty > 0$, so gilt für $\lambda = |\varphi|_\infty$, dass $|\varphi \cdot \frac{1}{\lambda}| \in A$, $\frac{1}{\lambda} \in A$, also $|\varphi| \in A$.

Allgemein ist
$$\max\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi + |\varphi - \psi|)$$
$$\min\{\varphi, \psi\} = \frac{1}{2}(\varphi + \psi - |\varphi - \psi|)$$
mit Induktion folgt: $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in A \Rightarrow$
$\min\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \in A$ und $\max\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\} \in A$ $\square$

25. Theorem (Satz von Stone-Weierstraß für kompakte Räume)

Sei $K \neq \emptyset$ kompakt, sei $A \subseteq C_b(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$ ein Teilring mit $\mathbb{R} \subseteq A$. Wenn es für alle $p,q \in K$, $p \neq q$ ein $\varphi \in A$ gibt mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, so gilt $\bar{A} = C(K,\mathbb{R})$.

Beweis Weil K kompakt ist, gilt $C_b(X,\mathbb{R}) = C(X,\mathbb{R})$.
Nach § 2.24 ist $\bar{A}$ ein Teilring, wir dürfen also annehmen, dass $A = \bar{A}$ gilt und müssen zeigen: $A = C(X,\mathbb{R})$.

(1) Ist $p \neq q$ und $u,v \in \mathbb{R}$, so gibt es $\varphi \in A$ mit $\varphi(p) = u$, $\varphi(q) = v$. Denn: Wähle $\psi \in A$ mit $\psi(p) \neq \psi(q)$, setze $\varphi(x) = u + \frac{v-u}{\psi(q)-\psi(p)}(\psi(x)-\psi(p))$. #

Sei nun $\xi \in C(K,\mathbb{R})$, sei $\varepsilon > 0$.

(2) Zu jedem $p \in K$ gibt es eine Umgebung U von p und $\eta \in A$ mit $|\eta(x) - \xi(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in U$ und $\eta(x) \leq \xi(x) + \varepsilon$ für alle $x \in K$.
Denn: Wähle zu jedem $q \in K$ ein $\eta_q \in A$ mit $\eta_q(q) = \xi(q)$ $\eta_q(p) = \xi(p)$ (das geht nach (1)). Dann hat q eine Umgebung V_q mit $\eta_q(x) \leq \xi(x) + \varepsilon$ für alle $x \in V_q$. Da K kompakt ist, gibt es $q_1, \ldots, q_m \in K$ mit $K = V_{q_1} \cup \ldots \cup V_{q_m}$. Setze $\eta = \min\{\eta_{q_1}, \ldots, \eta_{q_m}\}$
$\Rightarrow$ $\eta(x) \leq \xi(x) + \varepsilon$ für alle $x \in K$. Sei jetzt
$U = \{x \in K \mid \eta(x) \geq \xi(x) + \varepsilon\}$ $\Rightarrow$ U Umgebung von p.

(3) Da K kompakt ist, gibt es endlich viele offene Mengen $U_1, \dots, U_\ell \subseteq K$ mit $U_1 \cup \dots \cup U_\ell = K$ und $\eta_i \in A$, $i = 1, \dots, \ell$ mit

$\eta_i(x) \leq \xi(x) + \varepsilon$ für alle $x \in K$

$\eta_i(x) \geq \xi(x) - \varepsilon$ für alle $x \in U_i$

Setze $\zeta = \max\{\eta_1, \dots, \eta_\ell\}$, es folgt

$|\zeta - \xi|_\infty \leq \varepsilon$ $\square$

<u>Korollar</u> (Weierstrass Approximationssatz)

Sei $K = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$ und sei $\xi \in C([a,b], \mathbb{R})$. Dann gibt es eine Polynomfunktion $p(t) = a_n t^n + \dots + a_0$ mit $|\xi - p|_\infty \leq \varepsilon$, für jedes $\varepsilon > 0$. $\square$

26. <u>Def</u> Ein Hausdorffraum X heißt <u>lokal-kompakt</u>, wenn jedes $p \in X$ eine kompakte Umgebung hat.

<u>Bsp</u>: jeder kompakte Raum ist lokal kompakt.

- $\mathbb{R}^n$ ist lokal kompakt: für $p \in \mathbb{R}^m$ ist $\{q \in \mathbb{R}^m \mid |p-q| \leq 1\} = N_p$ kompakt Umgebung.
- Ist K kompakt, $X \subseteq K$ offen, so ist X lokal kompakt. Denn: $p \in K$, K T_3-Raum $\Rightarrow$ es gibt V offen mit $p \in V \subseteq \underset{\text{kompakt}}{\overline{V}} \subseteq X$

Wir sehen gleich: alle lokal kompakten Räume entstehen so!

Satz (Alexandrov) Sei X lokal kompakt. Dann existiert K kompakt mit (i) $X \subseteq K$ ist offen (ii) $K - X = \{z\}$. Der Raum K ist bis auf Homöomorphie eindeutig bestimmt durch (i) und (ii).

Bew: Sei $z \notin X$ und $K = X \cup \{z\}$. Sei $\mathcal{T} = \{U \subseteq X \mid U \text{ offen}\}$ sowie $\mathcal{S} = \{V \subseteq K \mid K - V \subseteq X \text{ kompakt}\}$

Beh: $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ ist eine kompakte Topologie auf K.

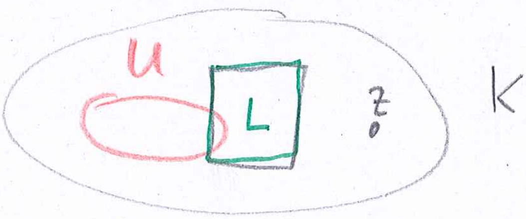
Denn $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{T}$ $V_1, \ldots, V_m \in \mathcal{S} \Rightarrow U_1 \cap \ldots \cap U_m \in \mathcal{T}$ sowie $V_1 \cap \ldots \cap V_m \in \mathcal{S}$ (Vereinigungen von endlich vielen kompakten Teilmengen sind kompakt!). Weiter: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S} \Rightarrow \bigcup \mathcal{B} \in \mathcal{S}$ (Durchschnitte von beliebig vielen kompakten Teilmengen von X sind kompakt). Jetzt: $\emptyset \in \mathcal{T}$, $K \in \mathcal{S}$.

$U \in \mathcal{T}, \; V \in \mathcal{S} \overset{!}{\Rightarrow} U \cup V \in \mathcal{S}, \; U \cap V \in \mathcal{T}$.

$V = K - L$, $L \subseteq X$ kompakt

$U \cup V = K - (L - U) \in \mathcal{S} \qquad U \cap V = U \cap (X - L) \in \mathcal{T}$



Damit folgt (Ü4): $\mathcal{T} \cup \mathcal{S}$ ist Topologie.

Klar: X offen in K, Teilraum!

Hausdorff: $p \neq z \Rightarrow p$ hat kompakte Umgebung L

$\Rightarrow V = K - L$ Umgebung von z. Sei $U \subseteq L$ offen mit $p \in U$

$\Rightarrow U \cap V = \emptyset. \overset{(Ü4)}{\Rightarrow}$ Hausdorff.

$\mathcal{C}$ offene Überdeckung von $K \Rightarrow$ es gibt $L \subseteq X$ kompakt mit $K - L \in \mathcal{C}$, $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{C}$ mit $L \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_m$

$\Rightarrow K = (K - L) \cup U_1 \cup \ldots \cup U_m \Rightarrow K$ kompakt.

Eindeutigkeit Sei L kompakt mit $X \subseteq L$ offen und $L - X = \{\omega\}$. Sei $U \subseteq K$ offen.

$\omega \notin U \Rightarrow U \subseteq X$ offen

$\omega \in U \Rightarrow L = K - U \subseteq X$ kompakt

$\Big\}$ Das ist also genau die oben definierte Topologie. □

Korollar Jeder lokal kompakte Raum ist ein Tychonov-Raum.

Bem Man nennt K die *Ein-Punkt-Kompaktifizierung* von X oder die *Alexandrov-Kompaktifizierung*. Oft schreibt man $z = \infty$ und $K = \hat{X} = X \cup \{\infty\}$.

Zurück zu Stone-Weierstraß.

27. *Def* Sei X lokal kompakt, sei $\varphi \in C(X,\mathbb{R})$. Man sagt φ *verschwindet im Unendlichen*, wenn es zu jedem $\varepsilon >$ ein $L \subseteq X$ kompakt gibt mit $|\varphi(p)| \leq \varepsilon$ für alle $p \in X - L$. Die Menge aller Funktionen mit dieser Eigenschaft sei $C_0(X,\mathbb{R}) \subseteq C_b(X,\mathbb{R})$.

Lemma Sei X lokal kompakt, sei $K = X \cup \{\infty\}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X. Dann gilt

$$I_\infty(K,\mathbb{R}) = \{\varphi \in C(K,\mathbb{R}) \mid \varphi(\infty) = 0\} = C_0(X,\mathbb{R})$$

(wobei wir jedes $\varphi \in C_0(X,\mathbb{R})$ auf ∞ fortsetzen durch $\varphi(\infty) = 0$)

Beweis Wenn $\varphi \in I_\infty(K,\mathbb{R})$ gilt, so folgt aus der Stetigkeit von φ in ∞, dass $\varphi \in C_0(X,\mathbb{R})$. Wenn $\varphi \in C_0(X,\mathbb{R})$, so ist φ stetig in ∞ nach Konstruktion. □

Korollar Ist X lokal kompakt, so gilt

$$C(\hat{X}, \mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \underbrace{C_0(X, \mathbb{R})}_{= I_\infty(\hat{X}, \mathbb{R})} \qquad \text{nach § 2.23}$$

28. Theorem (Satz von Stone-Weierstrass für lokalkompakte Räume) Sei $X \neq \emptyset$ lokal kompakt, sei $A \subseteq C_0(X, \mathbb{R})$ eine Teilmenge mit

(i) $\varphi, \psi \in A, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi + \psi \cdot \lambda \in A, \ \varphi \cdot \psi \in A$

(ii) Für jedes $p \in X$ gibt es $\varphi \in A$ mit $\varphi(p) \neq 0$

(iii) Für alle $p, q \in X, p \neq q$ gibt es $\varphi \in A$ mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$.

Dann gilt $\bar{A} = C_0(X, \mathbb{R})$

Beweis Sei $A' = \mathbb{R} + A \subseteq C(\hat{X}, \mathbb{R})$. Aus (i) folgt: A' ist Teilring mit $\mathbb{R} \subseteq A'$. Aus (ii), (iii) folgt mit § 2.25, dass $\overline{A'} = C(\hat{X}, \mathbb{R})$.

Sei jetzt $\xi \in C_0(X, \mathbb{R}) = I_\infty(\hat{X}, \mathbb{R})$, sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in A$ mit

$|\xi - (\varphi + \lambda)|_\infty \leq \varepsilon$. Es folgt $|\underbrace{\xi(\infty)}_{=0} - \underbrace{\varphi(\infty)}_{=0} - \lambda| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow |\lambda| \leq \varepsilon \Rightarrow |\xi - \varphi|_\infty \leq 2\varepsilon$, folglich

$\xi \in \bar{A}$ $\square$

*

29. Komplexe Version von Stone-Weierstrass.

<u>Thm</u> Sei $A \subseteq C(K,\mathbb{C})$ Teilring, $K \neq \emptyset$ kompakt, mit $\mathbb{C} \subseteq A$. Für alle $\varphi \in A$ gelte $\bar{\varphi} \in A$ ($\bar{\varphi}(p) = \overline{\varphi(p)}$ komplex Konjugierte), für alle $p \neq q$ gebe es $\varphi \in A$ mit $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. Dann gilt $\bar{A} = C(K,\mathbb{C})$.

<u>Denn</u>: $\varphi \in A \Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi + \bar{\varphi}) \in A$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{Im}(\varphi) = \frac{i}{2}(\bar{\varphi} - \varphi) \in A$

§ 2.25 zeigt: $\xi \in C(K,\mathbb{C}) \Rightarrow \mathrm{Re}(\xi), \mathrm{Im}(\xi) \in \bar{A}$

$\Rightarrow \xi = \mathrm{Re}(\xi) + i \cdot \mathrm{Im}(\xi) \in \bar{A}$ $\square$

Entsprechend gibt es eine komplexe Version von § 2.28.

30. Quotienten

Sei X ein top. Raum, sei Y eine Menge, sei $\varrho : X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Setze $\mathcal{T} = \{ U \subseteq Y \mid \varrho^{-1}(U) \subseteq X \text{ ist offen} \}$, dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf Y (ÜA 5.2) und ϱ ist stetig. (vgl. ÜA 5.2)

Es gilt: $A \subseteq Y$ ist abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\varrho^{-1}(A) \subseteq X$ abg. in X.

Man nennt $\mathcal{T}$ die *Quotiententopologie auf Y bzgl. ϱ* und ϱ eine *Quotientenabbildung*.

Bsp (1) $X = \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$, $\varrho = \mathrm{pr}_j : X \to X_j$, dann ist die Quotiententopologie auf X_j genau die ursprüngliche Topologie (ÜA)

(2) $X = [0,1]$, $Y = \{0,1\}$, $\varrho(t) = \begin{cases} 0 & t < \frac{1}{2} \\ 1 & t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$

$\mathcal{T} = \{ \emptyset, Y, \{0\} \}$ *nicht* Hausdorffsch(!)

Quotienten von gutartigen Räumen können i.A. *schlechte Trennungseigenschaften* haben. Trotzdem sind Quotienten wichtig.

Satz Seien X, Z topologische Räume, sei $\varphi : X \to Z$ stetig. Sei Y eine Menge, sei $\varrho : X \to Y$ surjektiv. Wenn es eine Abbildung $\psi : Y \to Z$ gibt mit $\psi \circ \varrho = \varphi$, so ist ψ stetig bezüglich der Quotiententopologie auf Y.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi", "\text{stetig}"'] \arrow[d, "\varrho"', "\text{quot}"] & Z \\ Y \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis Sei $W \subseteq Z$ offen. Dann ist $\varrho^{-1}(\psi^{-1}(W)) = \varphi^{-1}(W) \subseteq X$ offen, also ist $\psi^{-1}(W) \subseteq Y$ offen. $\square$

31 <u>Def</u> Ein Abbildung $X \xrightarrow{\varphi} Y$ zwischen topologischen Räumen heißt <u>offen</u> (abg.), wenn das Bild jeder offenen (abg.) Menge offen (abg.) ist.

<u>Satz</u> Sei $X \xrightarrow{\varphi} Y$ stetig und surjektiv. Wenn φ offen oder abgeschlossen ist, dann trägt Y die Quotiententopologie und φ ist eine Quotientenabb.

<u>Beweis</u> Sei $W \subseteq Y$ mit $\varphi^{-1}(W) \subseteq X$ offen. Dann gilt $\varphi(\varphi^{-1}(W)) = W$ (weil φ surjektiv). Ist φ offen, so ist also auch W offen. Ist φ abg., betrachte statt dessen $A = Y - W$. $\square$

<u>Korollar</u> Ist $K \xrightarrow{\varphi} X$ stetig und surjektiv, K kompakt und X Hausdorffsch, dann ist φ abg. und folglich eine Quotientenabbildung. (mit §2.12) $\square$

<u>Korollar</u> Sind
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & Z \\ Y \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$
stetige Abbildungen, g surjektiv, K kompakt, Y Hausdorffsch und ist $\psi : Y \to Z$ eine Abbildung mit $\psi \circ g = \varphi$, so ist ψ stetig.

32. <u>Zusammenhang</u> Ein top. Raum X heißt <u>zusammenhängend</u>, wenn $\emptyset, X$ die einzigen abgeschlossenen <u>und</u> offenen („abgeschloffen") Teilmengen von X sind. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn A mit der Unterraumtopologie zusammenhängend ist.

<u>Bsp</u>
- $\{0,1\}$ mit diskreter Topologie ist nicht zush.
- $\{0,1\}$ mit $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$ ist zush!

<u>Lemma</u> Ist $X \xrightarrow{\varphi} Y$ stetig und ist X zush., so ist $\varphi(X) \subseteq Y$ zush.

<u>Beis</u> OE $\varphi(X) = Y$. Angen. $Y = U \cup V$ U, V offen

$U \cap V = \emptyset \Rightarrow X = \underbrace{\varphi^{-1}(U)}_{\text{offen}} \dot\cup \underbrace{\varphi^{-1}(V)}_{\text{offen}} \Rightarrow \varphi^{-1}(U) = \emptyset$ oder $\varphi^{-1}(V) = \emptyset$

$\Rightarrow U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$ $\square$

<u>Korollar</u> X ist zush. genau dann, wenn jede stetige Abbildung $X \xrightarrow{\varphi} \{0,1\}$ konstant ist.

$\uparrow$ diskrete Topologie

<u>Beis</u> X zush $\Rightarrow \varphi(X) \subseteq \{0,1\}$ zush $\Rightarrow \varphi(X) = \{0\}$ oder $\varphi(X) = \{1\}$.

X nicht zush, $X = A \cup B$ A, B abg., nicht leer, $A \cap B = \emptyset$. Setze $\varphi(A) = \{0\}$, $\varphi(B) = \{1\}$

$\Rightarrow \varphi$ stetig nach §1.12 $\square$

<u>Bsp</u> • $\mathbb{Q}$ ist nicht zush: $t \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ irrational

$\mathbb{Q} = \underbrace{\{q \mid q < t\}}_{\text{offen}} \dot\cup \underbrace{\{q \mid q > t\}}_{\text{offen}}$

• $a \leq b$ reelle Zahl $\Rightarrow [a,b]$ zush. Denn

$\varphi: [a,b] \to \{0,1\} \subseteq [0,1]$ stetig. Angenommen, $\varphi(p) = 0$, $\varphi(q) = 1 \overset{\text{ZWS}}{\Rightarrow}$ es gibt $t \in [a,b]$ mit $\varphi(t) = \frac{1}{2} \notin \{0,1\}$ ↯

• $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, jedes X_i zush, $\bigcap_{i \in I} X_i \neq \emptyset$

$\Rightarrow X$ zush (mit Korollar: $\varphi: X \to \{0,1\}$ stetig, $p \in \bigcap_{i \in I} X_i \to \varphi(q) = \varphi(p)$ für $p, q \in X_i$)

$\Rightarrow \varphi$ konstant

<u>Bem</u> Ist $A \subseteq X$ zush, so ist auch $\bar{A} \subseteq X$ zush. Denn: $\varphi: \bar{A} \to \{0,1\}$ stetig $\leadsto$ $\varphi(A) = \{i\}$ (weil A zush) $\leadsto$ $\varphi(\bar{A}) \subseteq \overline{\{i\}} = \{i\}$ $\square$

#