§1 Topologische Räume

1. **Def** Sei X eine Menge und sei $\mathcal{T}$ eine Menge von Teilmengen von X. Wir nennen $\mathcal{T}$ eine <u>Topologie</u> auf X, wenn gilt:

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$

(T2) ist $U_1, \ldots, U_m \in \mathcal{T}$, so gilt $U_1 \cap \ldots \cap U_m \in \mathcal{T}$

(T3) ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ eine beliebige Teilmenge, so gilt

$$\bigcup \mathcal{C} = \{ p \in X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{C} \text{ mit } p \in U \} \in \mathcal{T}$$

Man nennt $(X, \mathcal{T})$ dann <u>topologischen Raum</u>.

<u>Beispiele</u> (a) $\mathcal{T}_{Klump} = \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X, die <u>Klumpentopologie</u>. Schreibe X_{Klump} für den top. Raum.

(b) $\mathcal{T}_{disk} = \mathcal{P}(X) = \{ U \mid U \subseteq X \}$ ist die <u>diskrete Topologie</u>, schreibe X_{disk}

(c) $\mathcal{T}_{koe} = \{ U \subseteq X \mid X - U \text{ endlich} \} \cup \{\emptyset\}$ ist die <u>koendliche Topologie</u>, schreibe X_{koe}

Ist X unendlich, so ist $\mathcal{T}_{koe} \subsetneq \mathcal{T}_{disk}$

(d) d Metrik auf X, $\mathcal{T}_d = \{ U \subseteq X \mid U \text{ offen} \}$ die metrische Topologie auf X

$$\mathcal{T}_{klump} \subseteq \mathcal{T}_{koe} \subseteq \mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{disk}$$

<u>Def</u> Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Die Elemente $U \in \mathcal{T}$ heißen <u>offene Mengen</u> der Topologie. Die Mengen $A = X - U$, für $U \in \mathcal{T}$ heißen <u>abgeschlossene Mengen</u> der Topologie. Wir definieren <u>Abschluss</u> und <u>Inneres</u> einer Teilmenge $Y \subseteq X$ durch

$$\overline{Y} = Cl(Y) = \bigcap \{ A \subseteq X \mid A \text{ abg. und } Y \subseteq A \}$$
$$Int(Y) = \bigcup \{ U \subseteq X \mid U \text{ offen und } U \subseteq Y \}$$

damit sind $\overline{Y}$ und $Int(Y)$ offen bzw. abgeschlossen,

$$Int(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$$

$$V \subseteq Y \underset{\text{in } X}{\text{offen}} \Rightarrow V \subseteq Int(Y)$$

$$A \supseteq Y \underset{\text{in } X}{\text{abg}} \Rightarrow \overline{Y} \subseteq A$$

\#

2. <u>Def</u> Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, sei $p \in X$. Eine Teilmenge $N \subseteq X$ heißt <u>Umgebung von p</u>, wenn es $U \in \mathcal{T}$ gibt mit $p \in U \subseteq N$.
Wir nennen p <u>Häufungspunkt</u> einer Menge $Y \subseteq X$, wenn für jede Umgebung N von p gilt: es gibt

$$q \in N \cap Y \text{ mit } q \neq p.$$

Eine Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Punkten in X <u>konvergiert gegen p</u>, wenn für jede Umgebung N von p die Menge

$$\{ i \in \mathbb{N} \mid p_i \notin N \}$$

endlich ist, oder äquivalent: für jede Umgebung N von p gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $p_i \in N$ für alle $i \geq n$ gilt.

<u>Bsp</u> In der Klumpentopologie konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt (!). In der koendlichen Topologie konvergiert jede injektive Folge ($i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$) gegen jeden Punkt. In der diskreten Topologie konvergieren nur Folgen, die nach endlich vielen Schritten konstant werden.

<u>Fazit</u> Folgen sind in allgemeinen topologischen Räumen ungeeignet.

3. <u>Def</u> Sei X eine Menge und sei $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von X mit

(B1) $\bigcup \mathcal{B} = X$ (für jedes $p \in X$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B$)

(B2) Ist $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $p \in B_1 \cap B_2$ so gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

Dann heißt $\mathcal{B}$ <u>Basis</u>. Eine Menge $U \subseteq X$ heißt <u>$\mathcal{B}$-offen</u> (<u>offen bezüglich $\mathcal{B}$</u>), wenn es für jedes $p \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $p \in B \subseteq U$.

<u>Satz</u> Die Menge $\mathcal{T}$ aller $\mathcal{B}$-offenen Mengen ist eine Topologie auf X, die von <u>$\mathcal{B}$ erzeugte Topologie</u>.

<u>Beweis</u> Klar: $\emptyset$ und X sind $\mathcal{B}$-offen.

Ist $B_1, \dots, B_m \in \mathcal{B}$ und $p \in B_1 \cap \dots \cap B_m$ so folgt mit Induktion sofort: es gibt $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_m$

Sei nun $U_1, \dots, U_m \in \mathcal{T}$ und $p \in U_1 \cap \dots \cap U_m$.
Dann gibt es $B_i \in \mathcal{B}$ mit $p \in B_i \subseteq U_i$ $\Rightarrow$ $p \in B_1 \cap \dots \cap B_m$ $\Rightarrow$ es gibt $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B \subseteq B_1 \cap \dots \cap B_m \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$.
Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$ und $p \in \bigcup \mathcal{C}$, so gibt es $U \in \mathcal{C}$ mit $p \in U$ $\Rightarrow$ es gibt $B \in \mathcal{B}$ mit $p \in B \subseteq U \subseteq \bigcup \mathcal{C}$, also $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{T}$ □

<u>Beispiel</u> (a) X metrischer Raum, $\mathcal{B} = \{ B_\varepsilon(p) \mid \varepsilon > 0, p \in X \}$ ist Basis, die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_d$ besteht genau aus den bezüglich der Metrik offenen Mengen, vgl §0.2

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ die Menge aller offenen Quader $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ mit $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$, $a_i < b_i$ ist Basis, die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie ist die normale Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

(c) X top. Raum, $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ Menge <u>aller</u> offenen Mengen. Die von $\mathcal{T}$ erzeugte Topologie ist wieder $\mathcal{T}$. Insbesondere hat jeder topologische Raum eine Basis.

(d) $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{B}_L = \{ [a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$. Die von $\mathcal{B}_L$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}_L$ auf $\mathbb{R}$ heißt die <u>Sorgenfrey-Topologie</u>. Wegen

$$(a,b) = \bigcup \{ [c,b) \mid a < c < b \}$$

ist jede in der euklidischen Topologie $\mathcal{T}_d$ offene

Menge auch offen in $\mathcal{T}_L$, d.h.

$$\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_L$$

Da andererseits $[a,b) \in \mathcal{T}_L$ aber $[a,b) \notin \mathcal{T}_d$ ist $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_L$. Die Sorgenfrey-Topologie ist gut für Gegenbeispiele.

4. <u>Beobachtung</u> Sei X eine Menge. Dann gibt es auf X mindestens die Klumpentopologie $\mathcal{T}_{Klumm}$ und die diskrete Topologie $\mathcal{T}_{disk}$. Für jede weitere Topologie $\mathcal{T}$ auf X gilt

$$\mathcal{T}_{Klump} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_{disk}$$

Die Menge aller Topologien auf X ist bezüglich Inklusion "$\subseteq$" partiell geordnet. Wir nennen $\mathcal{T}$ <u>feiner</u> als $\mathcal{T}'$, wenn gilt

$$\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$$

und $\mathcal{T}'$ <u>gröber</u> als $\mathcal{T}$ (feiner = mehr offene Mengen).

Klar: die von einer Basis $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie $\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{B}$ enthält.

<u>Bem</u> Ist $\mathcal{C}$ eine Menge von Teilmengen von X mit $\bigcup\mathcal{C} = X$, so heißt $\mathcal{C}$ <u>Subbasis</u>. Dann ist $\mathcal{B} = \{C_1 \cap \dots \cap C_m \mid m \in \mathbb{N}, C_i \in \mathcal{C}\}$ eine Basis

und die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie $\overline{\mathcal{T}}$ ist die gröbste Topologie auf X, die $\mathcal{C}$ enthält.

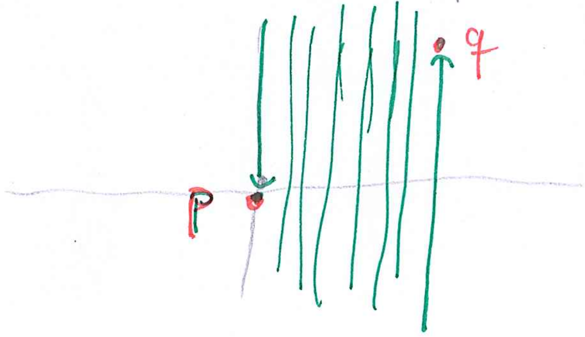
5. <u>Ordnungstopologie</u> Sei $(X,<)$ eine geordnete Menge, d.h. für alle $x,y,z \in X$ gilt

- $x<y<z \Rightarrow x<z$
- $x<y \Rightarrow x \neq y$
- $x \neq y \Rightarrow (x<y$ oder $y<x)$

Für $a,b \in X$ schreibe $(a,b) = \{x \in X \mid a<x<b\}$
sowie $(-\infty,a) = \{x \in X \mid x<a\}$
$(a,\infty) = \{x \in X \mid x>a\}$

Dann ist $\mathcal{B} = \{(a,b) \mid a,b \in X \cup \{\pm\infty\}\}$ eine Basis, die zugehörige Topologie ist die <u>Ordnungstopologie</u> $\mathcal{T}_<$ auf X.

<u>Bsp</u>
- $X = \mathbb{R}$, Ordnungstopologie $\mathcal{T}_< = \mathcal{T}_d$ normale Topologie
- $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ mit <u>lexikographischer Ordnung</u>:
  $(a,b) < (a',b') \Leftrightarrow a<a'$ oder $(a=a'$ und $b<b')$
  ergibt <u>nicht</u> die normale Topologie auf $\mathbb{R}^2$
  Intervall zwischen $p=(0,0)$ $q=(1,1)$ sieht so aus:



6. Wohlgeordnete Mengen Erinnerung: eine geordnete Menge $(X,<)$ heißt wohlgeordnet, wenn jede nicht leere Teilmenge $Y \subseteq X$ ein kleinstes Element enthält.

Bsp • $(\mathbb{N},<)$ ist wohlgeordnet • $(\mathbb{Z},<)$ nicht wohlgeordnet

• $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ nicht wohlgeordnet

Wenn X wohlgeordnet ist und wenn $\alpha \in X$ nicht maximal ist, so heißt $\beta = \min\{\xi \in X \mid \xi > \alpha\}$ Nachfolger von α, schreibe $\alpha^+ = \beta$. In $\mathbb{N}$: $n^+ = n+1$.

Schreibe $X_\alpha = \{\xi \in X \mid \xi < \alpha\}$, dann gilt: $\alpha \in X$ ist Nachfolger $\Leftrightarrow$ X_α enthält ein maximales Element.

Sei nun X eine überabzählbare (= unendliche, nicht abzählbare) Menge. Nach dem Wohlordnungssatz ($\to$ Auswahlaxiom) gibt es solche Mengen. Setze

$$\omega_0 = \{\xi \in X \mid X_\xi \text{ endlich}\} \qquad \omega_0 \subseteq \omega_1$$
$$\omega_1 = \{\xi \in X \mid X_\xi \text{ abzählbar}\}.$$

Lemma A $(\omega_0,<)$ ist ordnungsisomorph zu $(\mathbb{N},<)$ (es gibt eine bijektive ordnungserhaltende Abbildung) via $j: \alpha \longmapsto \# X_\alpha$ $\quad \omega_0 \to \mathbb{N}$

Beweis $\alpha < \beta \Leftrightarrow X_\alpha \subsetneqq X_\beta \Rightarrow j$ ist injektiv und ordnungserhaltend. Für $\alpha_0 = \min(\omega_0)$ gilt $X_{\alpha_0} = \emptyset$, also $j(\alpha_0) = 0$. Weiter $X_{\alpha^+} = X_\alpha \cup \{\alpha\} \Rightarrow j(\alpha^+) = j(\alpha)+1$ nach Induktionsprinzip gilt $j(\omega_0) = \mathbb{N}$ $\square$

Lemma B Es gilt $\omega_1 = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\}$

Bew. Ist $\xi < \alpha \in \omega_1$, so ist $\xi \in \omega_1$ (klar, weil $X_\xi \subseteq X_\alpha$), also "$\supseteq$". Ist $\alpha \in \omega_1$, so ist $X_{\alpha^+} = X_\alpha \cup \{\alpha\}$ abzählbar und $\alpha \in X_{\alpha^+}$, also "$\subseteq$". (Auch: $\omega_0 = \bigcup\{X_\alpha \mid \alpha \in \omega_0\}$) □

Lemma C ω_1 ist überabzählbar.

Bew. Angenommen, ω_1 ist abzählbar. Dann ist $X - \omega_1 \neq \emptyset$, wähle $\beta \in X - \omega_1$ minimal. Es folgt für alle $\xi < \beta$, dass $\xi \in \omega_1$, also $X_\beta \subseteq \omega_1$. Andererseits ist X_β nicht abzählbar, sonst wäre $\beta \in \omega_1$ ↯ □

Man kann zeigen, dass $(\omega_1, <)$ bis auf Ordnungsisomorphie eindeutig bestimmt ist als *kleinste überabzählbare Wohlordnung / Ordinalzahl*.

7. *Alexandrovs Halbgerade.* Sei ω_1 wie in §1.6.

Wir setzen $L = \omega_1 \times [0,1)$ mit der lexikographischen Ordnung, $(\alpha, s) < (\beta, t) \Leftrightarrow \alpha < \beta$ oder ($\alpha = \beta, s < t$)

L versehen mit der Ordnungstopologie ist *Alexandrovs Halbgerade* oder die *Lange Halbgerade*.

Bem. Für die Teilmenge $\omega_0 \times [0,1) = R \subseteq L$ gilt:

R ist ordnungsisomorph zu $\mathbb{R}_{\geq 0} = [0, \infty)$ (bez. der lexikograph. Ordnung) via $(\alpha,s) \mapsto \underbrace{\# X_\alpha}_{\in \mathbb{N}} + s$,

Daher ist L etwas mies!

<u>Satz</u> Sei $\alpha \in \omega_1$, sei $M_\alpha = \{ (\xi,t) \in L \mid (\xi,t) \leq (\alpha,0) \}$. Dann ist M_α ordnungsisomorph zu $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u> Das ist sicher wahr, wenn $\alpha \in \omega_0$ nach der Bemerkung oben. Es genügt auch zu zeigen, dass M_α zu irgendein abg. Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ordnungsisomorph ist. Wäre die Behauptung falsch, gäbe es ein <u>kleinstes</u> $\alpha \in \omega_1$, wo das nicht gilt (und $\alpha \notin \omega_0$)

<u>1. Fall</u> α ist ein Nachfolger, $\alpha = \beta^+$. Also gibt es ein Ordnungsisomorphismus $i: M_\beta \to [0,1]$. Setze $i(\alpha) = 2$ und $i(\beta,s) = \underbrace{i(\beta)}_{=1} + s = 1+s$, das ist ein Ordnungsisomorphismus $M_\alpha \to [0,2]$ ↯

<u>2. Fall</u> α ist kein Nachfolger. Schreibe $X_\alpha = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ (X_α ist abzählbar) und betrachte die monotone Folge

$$\alpha_n = \max\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$$

Zu jedem $\xi \in X_\alpha$ gibt es ein n mit $\xi < \alpha_n$, da α keine Nachfolgerzahl ist. Wir können die Folge der α_n zu einer streng monotonen Folge verfeinern, also OE $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ für alle n. Für jedes n existiert nun ein ordnungserhaltender Isomorphismus $h_n : M_{\alpha_n} \to [0,1]$.

Also existiert auch ein ordnungserhaltender Isomorphismus

$$j_n : \{(\xi, s) \mid (\alpha_n, 0) \le (\xi, s) \le (\alpha_{n+1}, 0)\} \to [n, n+1]$$

und damit ein ordnungserhaltender Isomorphismus

$$k : \{(\xi, s) \mid \xi < \alpha\} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \to [0,1)$$

Setze $k(\alpha, 0) = 1$, dann ist $M_\alpha \xrightarrow{k} [0,1]$ ein ordnungserhaltender Isomorphismus. ↯ □

<u>Korollar</u> In L hat jede Folge eine konvergente Teilfolge.

<u>Beweis</u> Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in L, $p_n = (\eta_n, t_n)$. Da ω_1 überabzählbar ist, gibt es ein kleinstes $\alpha \in \omega_1$ mit $\alpha > \eta_0, \eta_1, \dots$. Es folgt $p_n \in M_\alpha$ für alle n. Da M_α zu $[0,1]$ ordnungsisomorph ist, hat p_n eine Teilfolge, die gegen ein $q \in M_\alpha$ konvergiert (Bolzano-Weierstrass) □

8. <u>Teilräume (oder Unterräume)</u> Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\mathcal{T}|Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{T}\}$ eine Topologie auf Y. Man nennt $(Y, \mathcal{T}|Y)$ ein Teilraum / Unterraum von Y. Ist $Z \subseteq Y$, so heißt Z

- <u>offen in Y</u> $\Longleftrightarrow Z \in \mathcal{T}|Y \Longleftrightarrow$ es gibt $U \subseteq X$ offen mit $Z = U \cap Y$
- <u>abgeschlossen in Y</u> $\Longleftrightarrow Y - Z \in \mathcal{T}|Y \Longleftrightarrow$ es gibt $A \subseteq X$ abg. mit $A \cap Y = Z$

<u>Achtung!</u> $Z \subseteq Y$ abg./offen in Y $\not\Rightarrow$ $Z \subseteq X$ abg./offen

<u>Bsp</u> $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q}$, $Z = \mathbb{Q} \cap (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \mathbb{Q} \cap [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Z ist offen und abg. in $\mathbb{Q}$, aber weder offen noch abg. in $\mathbb{R}$.

Aber es gilt:

<u>Lemma</u> Sei X ein topologischer Raum, sei $Z \subseteq Y \subseteq X$. Wenn Z offen in Y ist und Y offen in X ist, so ist Z in X offen. Wenn Z abg. in Y ist und Y abg. in X, so ist Z abg. in X.

<u>Beweis</u> Klar: $Y \subseteq X$ offen, $U \subseteq X$ offen, $Z = X \cap Y$
$\Rightarrow Z$ offen. Genauso für "abg.". $\square$

9. <u>Stetigkeit</u> Seien X, Y topologische Räume, sei $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung. Wir nennen φ <u>stetig</u>, wenn für jede offene Menge $V \subseteq Y$ das Urbild $\varphi^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.

<u>Satz</u> Seien X, Y topologische Räume, sei $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung, sei $\mathfrak{B}$ eine Basis der Topologie auf Y. Dann sind äquivalent:

(i) φ ist stetig

(ii) für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ ist $\varphi^{-1}(A) \subseteq X$ abg.

(iii) für jedes $B \in \mathfrak{B}$ ist $\varphi^{-1}(B) \subseteq X$ offen

(iv) für jedes $p \in X$ und jede Umgebung M von $\varphi(p)$ ist $\varphi^{-1}(M)$ eine Umgebung von p

(v) für jede Teilmenge $E \subseteq X$ gilt $\varphi(\overline{E}) \subseteq \overline{\varphi(E)}$

(vi) für jede Teilmenge $F \subseteq Y$ gilt $\overline{\varphi^{-1}(F)} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{F})$ #

<u>Bew.</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii) klar wegen $\varphi^{-1}(Y - F) = X - \varphi^{-1}(F)$

(i) $\Rightarrow$ (iii) klar (iii) $\Rightarrow$ (i) Sei $V \subseteq Y$ ($\mathfrak{B}$-offen), sei $\varphi(p) \in B \subseteq V$ mit $B \in \mathfrak{B}$ $\Rightarrow p \in \underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subseteq \varphi^{-1}(V) \Rightarrow \varphi^{-1}(V) \subseteq X$ offen.

(i) $\Rightarrow$ (iv) Sei $\varphi(p) \in V \subseteq M$, $V \subseteq Y$ offen $\Rightarrow \varphi^{-1}(V)$ offen $\Rightarrow \varphi^{-1}(M)$ Umgebung von p.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Sei $E \subseteq X$ und $p \in \overline{E}$. Sei M eine Umgebung von $\varphi(p)$. Dann ist $\varphi^{-1}(M)$ Umgebung von p $\Rightarrow$ $\varphi^{-1}(M) \cap E \neq \emptyset \Rightarrow M \cap \varphi(E) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(p) \in \overline{\varphi(E)}$

(v) ⇒ (vi) Sei $F \subseteq Y$ und $E = \varphi^{-1}(F) \subseteq X$. Es folgt $\varphi(\overline{E}) \subseteq \overline{\varphi(E)} = \overline{\varphi(\varphi^{-1}(F))} = \overline{F \cap \varphi(X)} \subseteq \overline{F}$

$\Rightarrow \overline{E} = \overline{\varphi^{-1}(F)} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{F})$

(vi) ⇒ (ii) Sei $A \subseteq Y$ abg. Wegen $\overline{\varphi^{-1}(A)} \subseteq \varphi^{-1}(\overline{A}) = \varphi^{-1}(A)$ folgt $\overline{\varphi^{-1}(A)} = \varphi^{-1}(A)$ ist abg. $\square$

<u>Bem</u> Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ heißt <u>stetig in $p \in X$</u>, wenn für jede Umgebung M von $\varphi(p)$ eine Umgebung N von p existiert mit $\varphi(N) \subseteq M$. Der vorige Satz §1.9(iv) zeigt: φ ist stetig $\Leftrightarrow$ φ ist in jedem Punkt $p \in X$ stetig.

<u>Bem</u> Diese Definition von Stetigkeit ist konsistent mit §0.8 und §0.9.

<u>Beispiele</u> (a) Für jeden topologischen Raum X ist id_X stetig.

(b) Ist X topologischer Raum, $Y \subseteq X$ Teilmenge, so ist die Inklusion $i : Y \to X$, $i(y) = y$ stetig bzgl. der Unterraumtopologie auf Y.

(c) Sind X, Y top. Räume und ist $\varphi : X \to Y$ konstant, $\varphi(p) = y_0 = \text{const}$ für alle $p \in X$, so ist φ stetig, denn $\varphi^{-1}(V) = \begin{cases} X & \text{wenn } y_0 \in V \\ \emptyset & \text{wenn } y_0 \notin V. \end{cases}$

(d) Eine beliebige Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen top. Räumen ist stetig, falls X die diskrete Topologie trägt oder falls Y die Klumpentopologie trägt (klar).

10. **Satz** Seien X, Y, Z topologische Räume, seien $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ stetige Abbildungen. Dann ist auch $\psi \circ \varphi : X \to Z$ stetig.

Beweis Sei $W \subseteq Z$ offen, dann ist

$$(\psi \circ \varphi)^{-1}(W) = \varphi^{-1}(\underbrace{\psi^{-1}(W)}_{\text{offen}}) \text{ offen.} \qquad \square$$

Korollar Sind X, Z topologische Räume, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge und ist $\varphi : X \to Z$ stetig, so ist die Einschränkung von φ auf Y stetig bezüglich der Unterraumtopologie.

Beweis Betrachte $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\varphi} Z$ $\square$

Def. Sind X, Y topologische Räume, so setze $C(X,Y) = \{\varphi : X \to Y \mid \varphi \text{ stetig}\}$. Dann ist $C(X,X)$ eine Halbgruppe mit der Komposition als Verknüpfung und mit id_X als Neutralelement.

11. **Def** Eine stetige Abbildung $\varphi : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen heißt Homöomorphismus, wenn es eine stetige Abbildung $\psi : Y \to X$ gibt mit $\varphi \circ \psi = id_Y$ $\psi \circ \varphi = id_X$

Mit anderen Worten: φ muss bijektiv sein und die Umkehrabbildung muss stetig sein.

Die Menge $\text{Homöo}(X) = \{\varphi: X \to X \mid \varphi \text{ Homöomorphismus}\}$ ist also eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, mit id_X als Neutralelement.

Bsp (a) Für jedes $a \in \mathbb{R}^*$, $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$x \longmapsto ax+t, \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

ein Homöomorphismus, mit Umkehrabbildung

$$y \longmapsto a^{-1}y - a^{-1}t$$

(b) Ist X eine beliebige Menge und $\varphi : X \to X$ eine Permutation (bijektive Abbildung), so ist φ ein Homöomorphismus bezüglich der Klumpentopologie, bezüglich der diskreten Topologie und bezüglich der koendlichen Topologie.

Satz Seien $(X,<)$ und $(Y,<)$ angeordnete Mengen. Sei $\varphi : X \to Y$ bijektiv und monoton (steigend oder fallend). Dann ist φ ein Homöomorphismus bezüglich der Ordnungstopologien auf X bzw Y.

Beweis φ ist stetig (weil monoton) nach §1.9(iii). Wenn φ bijektiv ist, so ist die Umkehrabbildung von φ ebenfalls monoton, also stetig. $\square$

Korollar Die folgenden Abbildungen sind Homöomorphismen.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\exp} \mathbb{R}_{>0} = (0,\infty) \xrightarrow{y=\frac{x}{1+x}} (0,1)$$

$$\mathbb{R}_{\geq 0} = [0,\infty) \xrightarrow{y=\frac{x}{1+x}} [0,1)$$

$$[0,1] \xrightarrow[y=(b-a)x+a]{} [a,b] \qquad \text{für } a<b$$

$(0,1) \longrightarrow (a,b)$

$y=(b-a)x+a$

Beachte: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $[0,1]$ sind vollständig,
$\mathbb{R}_{>0}$, $(0,1)$ sind nicht vollständig

Ein vollständiger metrischer Raum kann also zu einem nicht vollständigen metrischen Raum homöomorph sein, Vollständigkeit ist keine topologische Eigenschaft (= Eigenschaft, die unter Homöomorphismen erhalten bleibt)

Warum sind $[0,1]$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph?
In $[0,1]$ hat jede Folge eine konvergente Teilfolge, in $\mathbb{R}$ nicht – das ist eine topologische Eigenschaft.

12. <u>Stückweise stetige Abbildungen</u> Nach §1.9 ist klar: wenn $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung ist und wenn es zu jedem $p \in X$ eine Umgebung N von p gibt, so dass φ auf N stetig ist, dann ist φ stetig – Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft.

Oft ist folgendes Kriterium nützlich.

Satz Sei X, Y topologische Räume, sei $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung, seien $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ abgeschlossen mit $A_1 \cup \dots \cup A_m = X$. Wenn φ auf jeder der Mengen A_i stetig ist, dann ist φ stetig.

Beweis Sei $\varphi_i : A_i \to Y$ die Einschränkung von φ auf A_i, sei $B \subseteq Y$ abgeschlossen. Dann ist

$$\varphi_i^{-1}(B) = \varphi^{-1}(B) \cap A_i \subseteq A_i \quad \text{abgeschlossen in } A_i.$$

Da $A_i \subseteq X$ abgeschlossen ist, ist $\varphi_i^{-1}(B)$ abgeschlossen in X (vgl §1.8). Folglich ist auch

$$\varphi^{-1}(B) = \varphi_1^{-1}(B) \cup \dots \cup \varphi_m^{-1}(B) \subseteq X \quad \text{abgeschlossen},$$

also ist φ stetig. $\square$

In der Praxis benutzt man den vorigen Satz um zu zeigen, dass Abbildungen, die durch Fallunterscheidungen definiert sind, stetig sind.

Bsp: $x \longmapsto \begin{cases} x & \text{wenn } x \geq 0 \\ -\frac{1}{2}x & \text{wenn } x \leq 0 \end{cases}$ ist eine stetige Funktion auf $\mathbb{R}$,

denn sie ist stetig auf $(-\infty, 0]$ und $[0, \infty)$. #

Oder: $x \longmapsto \begin{cases} x^2 & \text{wenn } x \geq 0 \\ 0 & \text{wenn } -1 \leq x \leq 0 \\ x+1 & \text{wenn } x \leq -1 \end{cases}$

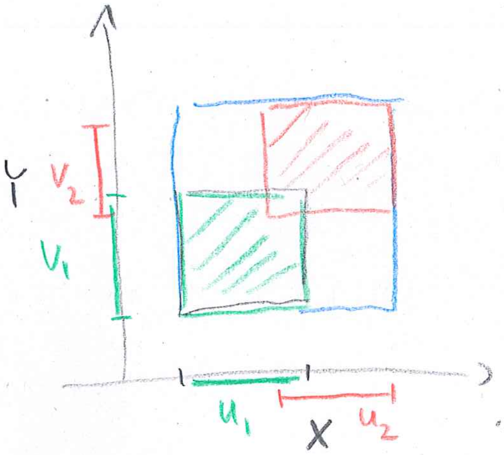
stetig auf $(-\infty, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, \infty)$

Wir betrachten als nächstes Produkte von topologischen Räumen. Angenommen, X, Y sind topologische Räume.

Setze $\mathcal{B} = \{ U \times V \subseteq X \times Y \mid U \subseteq X \text{ offen}, V \subseteq Y \text{ offen} \}$.

Es folgt $X \times Y \in \mathcal{B}$ und $\emptyset = \emptyset \times \emptyset \in \mathcal{B}$, weiter gilt

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$



Dagegen gilt im allgemeinen

$$(U_1 \times V_1) \cup (U_2 \times V_2) \neq \underline{(U_1 \cup U_2) \times (V_1 \cup V_2)}$$

und $\mathcal{B}$ ist im allgemeinen <u>keine</u> Topologie auf $X \times Y$!

Aber: $\mathcal{B}$ ist eine Basis auf $X \times Y$ und wir können die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie auf $X \times Y$ betrachten.

13. <u>Def</u> Seien $X_1, \dots, X_m$ topologische Räume.

Sei $\mathcal{B} = \{ U_1 \times \dots \times U_m \subseteq X_1 \times \dots \times X_m \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen für } i = 1, \dots, m \}$

Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis auf $X_1 \times \dots \times X_m$. Die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie auf $X_1 \times \dots \times X_m$ heißt die <u>Produkttopologie</u> auf $X_1 \times \dots \times X_m$

Beweis, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist:

$X_1 \times \dots \times X_m \in \mathcal{B}$ und $\emptyset \in \mathcal{B}$ klar. Es gilt

$$(U_1 \times \dots \times U_m) \cap (V_1 \times \dots \times V_m) = (U_1 \cap V_1) \times \dots \times (U_m \cap V_m)$$

also ist $\mathcal{B}$ eine Basis. Die offenen Mengen im Produkt sind also Vereinigungen von "offenen Boxen" $U_1 \times \dots \times U_m$

Die Produkttopologie läßt sich auch über Produkte von Basen beschreiben.

<u>Lemma</u> Sei $\mathcal{B}_i$ eine Basis auf X_i für $i=1 \dots m$, sei

$$\mathcal{B} = \{ B_1 \times \dots \times B_m \mid B_i \in \mathcal{B}_i \text{ für } i = 1, \dots, m \}.$$

Dann ist $\mathcal{B}$ eine Basis der Produkttopologie

<u>Beweis</u> Sei $\mathcal{T}$ die Produkttopologie. Klar: jede $\mathcal{B}$-offene Menge ist in $\mathcal{T}$. Sei nun $U_i \subseteq X_i$ offen. Dann gibt es $\mathcal{C}_i \subseteq \mathcal{B}_i$ mit $U_i = \bigcup \mathcal{C}_i$. Nun gilt

$$U_1 \times \dots \times U_m = \bigcup \{ C_1 \times \dots \times C_m \mid C_i \in \mathcal{C}_i \text{ für } i = 1 \dots m \},$$

also ist $U_1 \times \dots \times U_m$ auch $\mathcal{B}$-offen. $\square$

Wir definieren
$$p_j : X_1 \times \dots \times X_m \longrightarrow X_j$$
$$(x_1, \dots, x_m) \longmapsto x_j$$

14. <u>Satz</u> Seien $X_1, \dots, X_m$ topologische Räume, sei $p_j : X_1 \times \dots \times X_m \to X_j$ wie eben. Dann ist p_j stetig bezüglich der Produkttopologie.

Sei Y ein topologischer Raum und $\varphi : Y \to X_1 \times \dots \times X_m$, $y \mapsto (\varphi_1(y), \dots, \varphi_m(y))$ eine Abbildung. Dann ist φ stetig bezüglich der Produkttopologie genau dann, wenn $\varphi_j := p_j \circ \varphi$ für alle $j = 1, \dots, m$ stetig ist.

<u>Beweis</u> Sei $U \subseteq X_j$ offen, dann gilt $p_j^{-1}(U) =$

$X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times U \times X_{j+1} \times \dots \times X_m \in \mathcal{B} \Rightarrow p_j$ stetig.

Wenn φ stetig ist, so auch $\varphi_j = p_j \circ \varphi$.

Wenn jedes φ_j stetig ist und $U_1 \times \dots \times U_m \in \mathcal{B}$ gilt, so ist $\varphi^{-1}(U_1 \times \dots \times U_m) = \varphi_1^{-1}(U_1) \cap \varphi_2^{-1}(U_2) \cap \dots \cap \varphi_m^{-1}(U_m)$ offen $\Rightarrow \varphi$ ist stetig $\square$

15. Jetzt betrachten wir eine (möglicherweise unendliche) Familie $(X_i)_{i \in I}$ von topologischen Räumen. Also ist I eine beliebige nicht leere Indexmenge. Setze

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

Weiter sei

$$\mathcal{B}_{Box} = \{ \prod_{i\in I} U_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen} \}$$

$$\mathcal{B}_{Prod} = \{ \prod_{i\in I} U_i \mid U_i \subseteq X_i \text{ offen und } U_i = X_i \text{ für fast alle } i\in I \}$$

"Für fast alle" heißt: es gibt eine höchstens endliche Menge von Ausnahmen.

<u>Lemma</u> Sowohl $\mathcal{B}_{Box}$ als auch $\mathcal{B}_{Prod}$ sind Basen von Topologien $\mathcal{T}_{Box}$ und $\mathcal{T}_{Prod}$, der <u>Box-Topologie</u> und der <u>Produkttopologie</u>.

<u>Beweis</u>: $\emptyset, X \in \mathcal{B}_{Box}, \mathcal{B}_{Prod}$ klar.

Allgemein gilt

$$\Big(\prod_{i\in I} E_i\Big) \cap \Big(\prod_{i\in I} F_i\Big) = \prod_{i\in I} (E_i \cap F_i)$$

damit ist $\mathcal{B}_{Box}$ eine Basis (klar.)

Das gilt auch für $\mathcal{B}_{Prod}$, da für fast alle i gilt $U_i = X_i$ $V_j = X_j$ $\Rightarrow$ $U_i \cap V_i = X_i$ für fast alle $i \in I$.

$\square$

Klar: • $\mathcal{B}_{Box} \supseteq \mathcal{B}_{Prod}$, die Box-Topologie ist feiner

• Wenn I endlich ist, gilt $\mathcal{B}_{Box} = \mathcal{B}_{Prod}$.

Die Box-Topologie sieht auf den ersten Blick natürlich aus, ist aber nicht die "korrekte" Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, wie wir gleich sehen.

16. Satz Sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von top. Räumen, sei Y ein topologischer Raum und sei $\varphi: Y \to \prod_{i\in I} X_i$ eine Abbildung, $\varphi(y) = (\varphi_i(y))_{i\in I}$.

Sei weiter $p_j: \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ $\quad (x_i)_{i\in I} \xrightarrow{p_j} x_j$

Dann gilt: p_j ist für jedes $j \in J$ stetig bezüglich der Produkttopologie (also auch stetig bezüglich der Boxtopologie). Weiter ist φ stetig bezüglich der Produkttopologie genau dann, wenn jedes $\varphi_j = p_j \circ \varphi$ stetig ist.

Beweis Sei $U \subseteq X_j$ offen $\Rightarrow p_j^{-1}(U) = \prod_{i\in I} U_i \in \mathcal{B}_{Prod}$

$U_i = X_i$ für $i \neq j$
$U_j = U$ also ist p_j stetig.

Ist also $\varphi : Y \to \prod_{i\in I} X_i$ stetig, so auch $\varphi_j = p_j \circ \varphi$.

Angenommen, jedes φ_j ist stetig. Sei

$U = \prod_{i\in I} U_i \in \mathcal{B}_{Prod} \Rightarrow I = I_0 \cup I_1$, I_0 endlich
$U_i = X_i$ für alle $i \in I_1$

$$\varphi^{-1}(U) = \bigcap_{i\in I} \varphi_i^{-1}(U_i) = \bigcap_{i\in I_0} \varphi_i^{-1}(U_i) \cap \bigcap_{i\in I_1} \underbrace{\varphi_i^{-1}(U_i)}_{=Y}$$

$$= \bigcap_{i\in I_0} \varphi^{-1}(U_i) \text{ offen in } Y \Rightarrow \varphi \text{ stetig} \qquad \square$$

Der vorige Satz sagt: die Produkttopologie ist die feinste Topologie auf $\prod_{i\in I} X_i$, für die man aus der Stetigkeit aller φ_i die Stetigkeit von φ folgern kann.

Bsp $I = \mathbb{N}$, $X_i = [-1,1] \subseteq \mathbb{R}$

$\varphi : [-1,1] \to \prod_{i\in\mathbb{N}} [-1,1]$, $t \mapsto (t,t,t,\dots)$

ist nicht stetig in der Box-Topologie, denn:

$U_i = (-2^{-i}, 2^{-i}) \subseteq [-1,1]$ $\quad U = \prod_{i\in\mathbb{N}} U_i$

$\varphi^{-1}(U) = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} (-2^{-i}, 2^{-i}) = \{0\}$ nicht offen in $[-1,1]$

Fazit: Die Boxtopologie ist nicht "korrekt". Ab jetzt betrachten wir auf Produkten immer die Produkttopologie, wenn nicht anders gesagt wird.

Bem Ist $\mathcal{B}_i$ eine Basis der Topologie auf X_i, so ist

$$\mathcal{B} = \Big\{ \prod_{i\in I} U_i \;\Big|\; U_i \in \mathcal{B}_i \cup \{X_i\} \mid U_i = X_i \text{ für fast alle } i \in I \Big\}$$

eine Basis der Produkttopologie, wie man sich leicht überlegt.

17. Die Topologie der punktweisen Konvergenz

Sei I eine (nichtleere) Menge, Z ein topologischer Raum.

Dann ist

$$Z^I = \{\varphi : I \to Z \mid \varphi \text{ Abbildung}\} = \prod_{i\in I} Z$$ #

die Produkttopologie ist also eine Topologie auf der Menge Z^I. Sei $(\varphi : I \to Z) \in Z^I$. Sei $I_0 \subseteq I$ endlich, seien M_i Umgebung von $\varphi(i)$ für $i \in I_0$ und $M_i = Z$ für $i \in I - I_0$. Dann ist $M = \prod_{i\in I} M_i$ eine Umgebung von φ in Z^I, und zu jeder Umgebung N von φ gibt es eine (Umgebung) $M \subseteq N$ dieser Art.

Insbesondere sehen wir: eine Folge von Funktionen $\varphi_n \in Z^I$, für $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen φ $\Leftrightarrow$ für jede endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ und Umgebungen M_i von φ_i, für $i \in I_0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, dass $\varphi_n(i) \in M_i$ für alle $m \geq n$, $i \in I_0$ gilt $\Leftrightarrow$ für jedes $i \in I$ und jede Umgebung M_i von $\varphi(i)$ gibt es $l \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq l$, gilt $\varphi_n(i) \in M_i$ $\Leftrightarrow$ die Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen φ.

Daher nennt man die Produkttopologie auf Z^I auch die Topologie der punktweisen Konvergenz.

18. Beispiel $Z = \{0,1\}$ mit der diskreten Topologie.
Die Cantor-Menge ist $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{\varphi : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$, versehen mit der Produkttopologie. Zwei Elemente $\varphi, \psi \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sind nahe beieinander, wenn es $I_0 \subseteq \mathbb{N}$ endlich (aber ev. groß) gibt mit

$$\varphi(i) = \psi(i) \quad \text{für alle } i \in I_0$$

Die Produkttopologie auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist insbesondere nicht diskret!

19. Bemerkung Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt der topologischen Räume X (mit Produkttopologie). Sei $q_i \in X_i$ für alle $i \in I$. Für $j \in I$ setzen wir

$$\psi : X_j \to \prod_{i \in I} X_i \qquad z \mapsto (z_i)_{i \in I}$$

mit $z_i := \begin{cases} q_i & \text{falls } i \neq j \\ z & \text{falls } i = j \end{cases}$

Es gilt $p_i \circ \psi(z) = \begin{cases} q_i & \text{falls } i \neq j \\ z & \text{falls } i = j \end{cases}$ also ist ψ stetig nach §1.16. Setze $Y = \psi(X_j) \subseteq X$.
Dann gilt $p_j \circ \psi = id_{X_j}$ und $\psi \circ p_j = id_Y$

also ist $\psi : X_j \to Y \subseteq X$ ein Homöomorphismus zwischen X_j und Y.

20. <u>Def</u> Ein topologischer Raum X $(X, \mathcal{T})$ ~~metrisierbar~~ <u>metrisierbar</u>, wenn es eine Metrik d auf X gibt mit $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

<u>Bsp</u>
- Jeder metrische Raum ist metrisierbar (also ist
- jeder Unterraum eines metrisierbaren Raumes ist metrisierbar
- Wenn $\# X \geq 2$, so ist die Klumpentopologie auf X nicht metrisierbar (warum?)
- Wenn $\# X = \infty$, so ist die koendliche Topologie auf X nicht metrisierbar (warum?)

<u>Lemma</u> Sei X ein topologischer Raum. Wenn X metrisierbar ist, so gilt:

(i) für jedes $p \in X$ ist $\{p\}$ abgeschlossen

(ii) für jedes $p \in X$ gibt es eine abzählbare Menge $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen von p, so dass es für jede Umgebung $N \subseteq X$ von p ein $i \in \mathbb{N}$ gibt mit $p \in M_i \subseteq N$. (D.h. X erfüllt das <u>Erste Abzählbarkeitsaxiom</u>.)

Beweis (i) die Abbildung $d_p : q \longmapsto d(p,q)$ ist stetig und $\{p\} = d_p^{-1}(\{0\})$.

(ii) Setze $N_i = B_{2^{-i}}(p)$. Ist N Umgebung von p, so gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq N$ (nach Definition), wähle $i \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{-i} \leq \varepsilon$ □

21. Theorem Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie von topolog. Räumen X_i mit $\# X_i \geq 2$. Sei $X = \prod_{i \in I} X_i$ mit der Produkttopologie. Dann sind äquivalent:

(i) X ist metrisierbar

(ii) I ist abzählbar und jedes X_i ist metrisierbar.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i) Wir dürfen annehmen, dass gilt $I \subseteq \mathbb{N}$. Sei d_i eine Metrik auf X_i; setze $\tilde{d}_i = \min\{d_i, 2^{-i}\}$. Nach Üb 2.3 gilt $\mathcal{T}_{\tilde{d}_i} = \mathcal{T}_{d_i} = \mathcal{T}_i$ (Topologie auf X_i).

Für $p = (p_i)_{i \in I}$, $q = (q_i)_{i \in I}$ setze $d(p,q) = \sup\{\tilde{d}_i(p_i, q_i) \mid i \in I\}$

Klar: d ist symmetrisch, $d \geq 0$, $d = 0 \iff p = q$ und d erfüllt die Dreiecksungleichung $\Rightarrow$ d ist eine Metrik auf X. Es gilt für $j \in \mathbb{N}$, $p \in X$

$$B_{2^{-j}}(p) = \prod_{\substack{i \leq j \\ i \in I}} B_{2^{-j}}(p_i) \times \prod_{\substack{i > j \\ i \in I}} X_i \quad \text{offen in } X$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{J}_d \subseteq \mathcal{J}_{Prod}$. Ist umgekehrt $I_0 \subseteq I$ endlich,

$$p \in U = \prod_{i\in I_0} U_i \times \prod_{i \in I - I_0} X_i \qquad U_i \subseteq X \text{ offen}$$

wähle j so, dass für alle $i \in I_0$ gilt $B_{2^{-j}}(p_i) \subseteq U_i$

$\Rightarrow$ $B_{2^{-j}}(p) \subseteq U$ $\Rightarrow$ $\mathcal{J}_{Prod} \subseteq \mathcal{J}_d$.

$(\neg ii) \Rightarrow (\neg i)$ Wenn X metrisierbar ist, so auch jedes X_i nach §1.19 (X_i ist homöomorph zu einem Unterraum von X).

Angenommen, I ist nicht abzählbar, aber jedes X_i ist metrisierbar. Sei $p \in X$, sei $(N_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine Familie von Umgebungen von p. Für jedes $l \in \mathbb{N}$ gibt es eine <u>endliche</u> Teilmenge $I_l \subseteq I$ mit

$$p \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq N \qquad U_i \subseteq X_i \text{ offen}, \quad U_i = X_i \text{ für } i \notin I_l$$

Setze $K_1 = \bigcup_{l \geq 0} I_l \subseteq I$. Da K_1 abzählbar ist, gibt es $j \in I - K_1$. Wähle $V_j \subseteq X_j$ offen mit $p_j \in V_j$ und $\{p_j\} \neq V_j \neq X_j$, setze

$M = V_j \times \prod_{i \neq j} X_i$ $\Rightarrow$ M ist Umgebung von p, aber für kein l gilt $N_l \subseteq M$. Nach §1.20 ist X nicht metrisierbar. □

Insbesondere ist die Cantormenge metrisierbar, mit Metrik

$$d(p,q) = \sup_{i \in \mathbb{N}} \{ 2^{-i} d(p_i, q_i) \} \qquad p_i, q_i \in \{0,1\}$$

#