§0 Metrische Räume

1. Erinnerung. Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d: X \times X \to \mathbb{R}$ heißt Metrik und (X,d) heißt metrischer Raum, wenn für alle $o, p, q \in X$ gilt:

(M1) $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$ (Symmetrie + Positivität)

(M2) $d(o,q) \leq d(o,p) + d(p,q)$ (Dreiecksungleichung)

(M3) $d(p,q) = 0 \iff p = q$ (Definitheit)

Beispiele: (a) $X = \mathbb{R}$, $d(p,q) = |p-q|$

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $d(p,q) = \left(\sum_{i=1}^{n} (p_i - q_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

euklidische Metrik, (a) Spezialfall davon.

(c) X beliebig, $d(p,q) = \begin{cases} 0 & p = q \\ 1 & p \neq q \end{cases}$

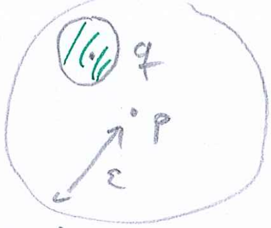
diskrete Metrik

Beobachtung. Ist (X,d) ein metrischer Raum und ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist (Y,d) ebenfalls ein metrischer Raum.

2. Definition Sei $\varepsilon > 0$, sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $p \in X$. Der (offene) ε-Ball um p ist

$$B_\varepsilon(p) = \{ q \in X \mid d(p,q) < \varepsilon \}$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt: ist $\delta < \varepsilon$ und $d(p,q) \le \varepsilon - \delta$, so gilt $B_\delta(q) \subseteq B_\varepsilon(p)$.



Def. Eine Teilmenge U eines metrischen Raums X heißt <u>offen</u>, wenn es zu jedem $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $B_\varepsilon(p) \subseteq U$.

<u>Bsp</u> X, $\emptyset$, $B_\varepsilon(p)$ sind stets offen.

<u>Def</u> Ist $p \in X$ und $N \subseteq X$ eine Teilmenge und gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subseteq N$, so heißt N <u>Umgebung</u> von p.

Also:
- Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(p)$ eine Umgebung von p
- Ist $U \subseteq X$ offen und $p \in U$, so ist U eine Umgebung von p.

<u>Beispiele</u> $X = \mathbb{R}$, $d(p,q) = |p-q|$

(a) $U = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ ist offen
$p \in U \Rightarrow B_\varepsilon(p) \subseteq U$ für $\varepsilon = \min\{p, 1-p\}$

(b) $N = [0,1)$ ist nicht offen, denn für kein $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(0) \subseteq N$.
Aber N ist Umgebung von jedem Punkt p mit $0 < p < 1$, $B_\varepsilon(p) \subseteq N$ für $\varepsilon = \min\{p, 1-p\}$

3. **Konvergenz in metrischen Räumen.** Sei (X,d) ein metrischer Raum und $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Dann **konvergiert** $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegen $p\in X$, wenn gilt: zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es $n\in\mathbb{N}$, so dass für alle $i\geq n$ gilt $d(p_i,p)\leq\varepsilon$

Lemma Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X und sei $q\in X$. Dann sind äquivalent:

(i) $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen q

(ii) für jede Umgebung N von q ist die Menge $\{i\in\mathbb{N}\mid p_i\notin N\}$ endlich.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $\varepsilon>0$ mit $B_\varepsilon(p)\subseteq N$. Dann gibt es $n\in\mathbb{N}$ mit $d(p_i,q)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ für alle $i\geq n$, also $p_i\in N$ für alle $i\geq n$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sei $\varepsilon>0$. Dann ist $I=\{i\in\mathbb{N}\mid p_i\notin B_\varepsilon(p)\}$ endlich, wähle $n\geq\max(I)$. Es folgt $d(p_i,q)\leq\varepsilon$ für alle $i\geq n$. $\square$

Korollar Der Grenzwert einer konvergenten Folge in einem metrischen Raum ist eindeutig bestimmt. Schreibe dafür

$$\lim_i p_i = p$$

wenn eine der beiden äquivalenten Bedingungen aus dem Lemma erfüllt sind.

Beweis: Ist $q\neq p$, so gibt es Umgebungen N, N' mit $q\in N'$, $p\in N$, $N\cap N'=\emptyset$. Nämlich $N=B_\varepsilon(p)$, $N'=B_\varepsilon(q)$ wo $d(p,q)=2\varepsilon$ $\square$

4. <u>Definition</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt <u>abgeschlossen</u>, wenn $U = X - A$ offen ist.

<u>Satz</u> Sei (X,d) ein metrischer Raum, sei $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann sind äquivalent:

(i) A ist abgeschlossen

(ii) Für jede Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in A, die einen Grenzwert $q \in X$ hat, gilt $q \in A$ (A ist <u>abgeschlossen unter Grenzwertbildung</u>)

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii) Sei $A \subseteq X$ abg und $U = X - A$. Sei $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Folge in A mit Grenzwert $q \in X$. Wenn $q \notin A$, so folgt: es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subseteq U \Rightarrow B_\varepsilon(q) \cap A = \emptyset$ ↯

$(\neg i) \Rightarrow (\neg ii)$ Sei A nicht abgeschlossen, also $U = X - A$ nicht offen. Dann gibt es $q \in U$ so, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $B_\varepsilon(q) \not\subseteq U$. Insbesondere gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $a_i \in A$ mit $d(q, a_i) \leq 2^{-i}$ ($a_i \in B_{2^{-i}}(q)$). Die Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in A konvergiert also gegen $q \notin A$. □

5. <u>Satz</u>. Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Ist $\mathcal{C}$ eine Menge von offenen Mengen, so ist $\bigcup \mathcal{C} = \{p \in X \mid \text{es gibt } U \in \mathcal{C} \text{ mit } p \in U\}$ offen

(b) Sind $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ offen, so ist $U_1 \cap \dots \cap U_n \subseteq X$ offen.

Kurz: beliebige Vereinigungen und <u>endliche</u> Durchschnitte offener Mengen sind offen.

Bew: (a) Sei $p \in U \in \mathcal{C}$. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ mit

$B_\varepsilon(p) \subseteq U \Rightarrow B_\varepsilon(p) \subseteq \bigcup \mathcal{C}$.

(b) Sei $p \in U_1 \cap \dots \cap U_m$. Dann gibt es $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$ mit $B_{\varepsilon_i}(p) \subseteq U_i$, $i = 1, \dots, m$. Setze $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}$

$\Rightarrow B_\varepsilon(p) \subseteq U_1 \cap \dots \cap U_m$ □

Korollar Sei (X,d) ein metrischer Raum.

(a) Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von abgeschlossenen Mengen in X. Dann ist $\bigcap \mathcal{C} \subseteq X$ abgeschlossen.

(b) Sind $A_1, \dots, A_m \subseteq X$ abgeschlossen, so ist $A_1 \cup \dots \cup A_m$ abgeschlossen.

Bew: Für beliebige Menge $\mathcal{C}$ von Teilmengen von X gilt

$$X - \bigcap \mathcal{C} = \bigcup \{X - G \mid G \in \mathcal{C}\} \qquad (\text{ÜA})$$
$$X - \bigcup \mathcal{C} = \bigcap \{X - G \mid G \in \mathcal{C}\}$$

damit folgt die Behauptung aus dem vorigen Satz. □

6. Definition Der Abschluss einer Teilmenge $Y \subseteq X$ eines metrischen Raums ist

$$Cl(Y) = \overline{Y} = \bigcap \{A \subseteq X \mid A \text{ abg. und } A \supseteq Y\}$$

Folglich ist $\overline{Y}$ abgeschlossen und jede abgeschlossene Menge, die Y enthält, enthält auch $\overline{Y}$.

Das Innere einer Teilmenge $Y \subseteq X$ ist

$$Int(Y) = \bigcup \{U \subseteq X \mid U \text{ offen und } U \subseteq Y\}$$

Folglich ist $Int(Y)$ offen und jede offene Menge, die in Y liegt, ist in $Int(Y)$ enthalten.

$$Int(Y) \subseteq Y \subseteq \overline{Y}$$

Bsp a) $X = \mathbb{R}$, $d(p,q) = |p-q|$

(a) $$\left.\begin{array}{l} Cl((0,1)) = [0,1] \\ Int([0,1]) = (0,1) \\ Cl(\mathbb{Q}) = \mathbb{R} \\ Int(\mathbb{Q}) = \emptyset \end{array}\right\} \text{ÜA}$$

(b) X beliebig mit diskreter Metrik, $d(p,q) = \begin{cases} 1 & p \neq q \\ 0 & p = q \end{cases}$

$Y \subseteq X \Rightarrow Int(Y) = Y = Cl(Y)$, jede Teilmenge $Y \subseteq X$ ist sowohl offen als auch abgeschlossen.

7. Achtung! 1. Teilmengen eines metrischen Raumes X können sowohl offen als auch abgeschlossen sein – z.B. gilt das für $\emptyset$ und X. (Solche Teilmengen heißen auch "abgeschloffen").

2. Es gibt im allgemeinen Teilmengen $Y \subseteq X$, die weder offen noch abgeschlossen sind, z.B. $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$ oder $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

3. Ist (X,d) ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, so ist auch (Y,d) ein metrischer Raum. Aber Vorsicht: ist $U \subseteq Y$ offen in Y, so folgt nicht, dass Y offen in X ist. Bsp: $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Q}$, $U = \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ ist offen in $\mathbb{Q}$, aber nicht offen in $\mathbb{R}$. Ähnliches gilt, wenn $A \subseteq Y$ abgeschlossen in Y ist – dann ist A nicht notwendig abgeschlossen in X.

#

8. <u>Stetigkeit</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und sei $\varphi: X \to Y$ eine Abbildung. Sei $p \in X$. Dann heißt φ <u>stetig im Punkt p</u>, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Zu jeder Umgebung M von $\varphi(p)$ gibt es eine Umgebung N von p mit $\varphi(N) \subseteq M$

(ii) Für jede Umgebung M von $\varphi(p)$ ist $\varphi^{-1}(M)$ eine Umgebung von p.

(iii) zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $q \in X$ mit $d(p,q) \leq \delta$ gilt $d(\varphi(p), \varphi(q)) \leq \varepsilon$

(iv) für jede konvergente Folge $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X mit Grenzwert $p = \lim_i q_i$ ist die Folge $(\varphi(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$ in Y konvergent mit Grenzwert $\varphi(p) = \lim_i \varphi(q_i)$.

<u>Beweis</u> (ii) $\Rightarrow$ (i) klar.

(i) $\Rightarrow$ (iii) klar mit $M = B_\varepsilon(\varphi(p))$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) klar

($\neg$ii) $\Rightarrow$ ($\neg$iv) Angenommen, (ii) gilt nicht. Dann gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $\varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p)))$ <u>kein</u> Umgebung von p ist. Also gibt es zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein $q_i \in X$ mit

$$q_i \in B_{2^{-i}}(p), \quad \underbrace{\underbrace{q_i \notin \varphi^{-1}(B_\varepsilon(\varphi(p)))}_{\varphi(q_i) \notin B_\varepsilon(\varphi(p))}}_{d(\varphi(q_i), \varphi(p)) \geq \varepsilon}$$

$\Rightarrow$ $\lim_i q_i = p$, aber $(\varphi(q_i))_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen q. $\square$

9. Def Sei (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ heißt *stetig*, wenn sie in jedem Punkt stetig ist.

Lemma Eine Abbildung $\varphi: X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist genau dann stetig, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist.

(i) Für jede offene Menge $U \subseteq Y$ ist $\varphi^{-1}(U)$ offen

(ii) Für jede abgeschlossene Menge $A \subseteq Y$ ist $\varphi^{-1}(A)$ abgeschlossen

(iii) Für jedes $p \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ (δ hängt ab von p *und* ε) mit $\varphi(B_\delta(p)) \subseteq B_\varepsilon(\varphi(p))$ (d.h. $d(q,p) < \delta \Rightarrow d(\varphi(q), \varphi(p)) < \varepsilon$)

(iv) Für jede Teilmenge $Y \subseteq X$ gilt $\varphi(\overline{Y}) \subseteq \overline{\varphi(Y)}$

Beweis (i) folgt aus §0.8 (ii)
(ii) folgt aus (i) wegen $\varphi^{-1}(Y - A) = X - \varphi^{-1}(A)$
(iii) folgt aus §0.8 (iii)
(iv) Übungsaufgabe! $\square$

Achtung: Man beachte die Reihenfolge der Quantoren in (iii) – δ hängt von p und von ε ab!

10. <u>Definition</u> Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Sei $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung.

(a) φ heißt <u>isometrische Einbettung</u>, wenn für alle $p, q \in X$ gilt $d_X(p,q) = d_Y(\varphi(p), \varphi(q))$

(b) φ heißt λ-<u>Lipschitz-stetig</u>, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ gilt

$$d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) \leq \lambda \cdot d_X(p,q)$$

(c) φ heißt <u>gleichmäßig stetig</u>, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $p, q \in X$ gilt $d_X(p,q) \leq \delta \Rightarrow d_Y(\varphi(p), \varphi(q)) \leq \varepsilon$

Offensichtlich gilt:

isom. Einbettung $\Rightarrow$ Lipschitz $\Rightarrow$ glm. stetig $\Rightarrow$ stetig.

Keiner der Pfeile läßt sich umkehren! (ÜA)

11. <u>Def</u> Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt <u>dicht</u> in X, wenn gilt

$$\overline{Y} = X$$

<u>Bsp</u> (1) $\overline{X} = X \rightsquigarrow X$ dicht in X gilt immer

(2) $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

Ein metrischer Raum X heißt <u>separabel</u>, wenn es in X eine <u>abzählbare</u> dichte Teilmenge gibt.

Lemma Sei X ein metrischer Raum, $Y \subseteq X$. Dann sind äquivalent: (i) $p \in \overline{Y}$
(ii) für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_\varepsilon(p) \cap Y \neq \emptyset$

Insbesondere ist $Y \subseteq X$ dicht genau dann, wenn für jedes $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ $B_\varepsilon(p) \cap Y \neq \emptyset$ gilt.

Beweis $q \in X - \overline{Y} \Leftrightarrow$ es gibt eine offene Menge $U \subseteq X - Y$ mit $q \in U \Leftrightarrow$ es gibt $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(q) \subseteq X - Y$ □

12. **Erinnerung** Eine Folge $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X heißt Cauchy-Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $d(p_i, p_j) \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq n$ gilt.

Lemma Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis Angenommen, $q = \lim_i q_i$. Sei $\varepsilon > 0$, wähle $n \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $i \geq n$ gilt $d(q, q_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Es folgt $d(p_i, p_j) \leq d(p_i, p) + d(p, p_j) \leq \varepsilon$ für alle $i, j \geq n$ □

Def Ein metrischer Raum X heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bsp.
- $\mathbb{Q}$, $[0,1)$ mit euklidischer Metrik nicht vollständig
- $\mathbb{R}$ mit euklid. Metrik vollständig
- jeder diskrete metr. Raum ist vollständig (warum?)

13. Satz Sei X ein metrischer Raum und $Y \subseteq X$.

(i) Wenn Y vollständig ist, dann ist Y abg. in X.

(ii) Wenn X vollständig ist und wenn $Y \subseteq X$ abg. ist, so ist Y vollständig.

Beweis (i) Sei $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y mit Grenzwert $x \in X$. Dann ist $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Weil Y vollständig ist, folgt $x \in Y$.

(ii) Sei $(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge in Y. Da X vollst. ist, gibt es einen Grenzwert x der Folge in X. Da Y abg. ist, gilt $x \in Y$ $\square$

14. Def Sei X ein metrischer Raum, sei

$$\left.\begin{array}{l} B(X) = \{\varphi : X \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ beschränkt}\} \\ C(X) = \{\varphi : X \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ stetig}\} \\ C_b(X) = C(X) \cap B(X) \end{array}\right\} \mathbb{R}\text{-Vektorräume}$$

Auf $B(X)$ definieren wir eine Norm durch

$$|\varphi|_\infty = \sup\{|\varphi(p)| \mid p \in X\}$$

und eine Metrik durch

$$d_\infty(\varphi, \psi) = |\varphi - \psi|_\infty$$

Es gilt also stets $|\varphi(p)| \leq |\varphi|_\infty$

15. **Satz** $B(X)$ ist vollständig bezüglich $|\cdot|_\infty$.

Beweis Sei $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(X)$.
Weil $|\varphi_i(p)-\varphi_j(p)| \le |\varphi_i-\varphi_j|_\infty$ ist für jedes $p\in X$ die Folge $(\varphi_i(p))_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, also konvergent (weil $\mathbb{R}$ vollständig ist). Setze $\varphi(p)=\lim_i \varphi_i(p)$.
Es gibt $n\ge 0$ so, dass $|\varphi_i-\varphi_j|_\infty \le 1$ für alle $i,j\ge n$.
$\Rightarrow |\varphi_i(p)| \le |\varphi_n(p)|+1 \le |\varphi_n|_\infty + 1$ für alle $p\in X, i\ge n$
$\Rightarrow \varphi \in B(X)$. Sei $\varepsilon>0$ und m so, dass $|\varphi_i-\varphi_j|_\infty\le\varepsilon$ für $i,j\ge m$. Es folgt für alle $p\in X$, $i,j\ge m$:

$$|\varphi_i(p)-\varphi_j(p)|\le\varepsilon \implies |\varphi(p)-\varphi_j(p)|\le\varepsilon \Rightarrow$$

also $|\varphi-\varphi_j|_\infty\le\varepsilon$ d.h. $\lim_j \varphi_j = \varphi$ $\square$

Satz $C_b(X)\subseteq B(X)$ ist abgeschlossen, also auch vollständig bzgl $|\cdot|_\infty$.

Beweis Sei $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von stetig beschränkten Funktionen, die gegen $\varphi\in B(X)$ konvergiert (bzgl $|\cdot|_\infty$).
Zz: φ ist stetig. Sei $p\in X$, sei $\varepsilon>0$. Wähle $n\in\mathbb{N}$ so, dass $|\varphi-\varphi_n|_\infty\le\frac{\varepsilon}{3}$ für alle $i\ge n$ und $\delta>0$ so, dass $|\varphi_n(p)-\varphi_n(q)|\le\frac{\varepsilon}{3}$ für alle $q\in B_\delta(p)$.

Es folgt

$$|\varphi(p)-\varphi(q)|\le|\varphi(p)-\varphi_n(p)|+|\varphi_n(p)-\varphi_n(q)|+|\varphi_n(q)-\varphi(q)|$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$ $\square$

16. Erinnerung: Eine Norm $|.|$ auf einem reellen Vektorraum V ist eine Abbildung $|.|: V \to \mathbb{R}$ mit

(N1) $|v| \geq 0$ (N2) $|v\lambda| = |v| \cdot |\lambda|$

(N3) $|v+w| \leq |v| + |w|$ (N4) $|v| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

für alle $v, w \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dann nennt man $(V, |.|)$ einen normierten (Vektor-) Raum. Via $d(u,v) = |u-v|$ erhält man eine Metrik auf V und $(V, |.|)$ heißt Banachraum, wenn V vollständig ist.

Die Norm $|.|_\infty$ aus §0.15 nennt man Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

Wir haben also bewiesen: $(B(X), |.|_\infty)$ und $(C_b(X), |.|_\infty)$ sind Banachräume.

Analysis II: $\mathbb{R}^n$ ist Banachraum bzgl. der euklid. Norm (sogar: bezüglich jeder Norm).

17. Theorem (Kuratowskis Einbettungssatz)

Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann existiert eine isometrische Einbettung

$$X \to C_b(X).$$

Jeder metrische Raum ist also isometrisch zu einem

Unterraum eines Banachraums.

<u>Beweis</u> Wir setzen für $p\in X$ $d_p : X \to \mathbb{R}$, $d_p(x) = d(p,x)$.

Dann ist d_p 1-Lipschitzstetig, also stetig.

Wir wählen nun $o \in X$ fest als Basispunkt und setzen

$$\varphi_p = d_p - d_o \,, \quad \varphi_p(x) = d(p,x) - d(o,x)$$

Wegen $|\varphi_p(x)| \leq d(p,o)$ ist $\varphi_p \in C_b(X)$.

Weiter gilt $|\varphi_p - \varphi_q|_\infty = |d_p - d_q|_\infty \leq d(p,q)$

sowie $|\varphi_p(q) - \varphi_q(q)| = d(p,q)$, also

$$|\varphi_p - \varphi_q|_\infty = d(p,q).$$

Damit ist die Kuratowski-Einbettung

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : X &\longrightarrow C_b(X) \\ p &\longmapsto \varphi_p \end{aligned}$$

eine isometrische Einbettung.

(Beachte: im allgemeinen hängt $\mathcal{K}$ von Punkt o ab!)

18. <u>Def</u> Sei X ein metrischer Raum, sei $\mathcal{K} : X \to C_b(X)$ eine Kuratowski-Einbettung. Wir setzen $X^* = \overline{\mathcal{K}(X)}$.

Da $C_b(X)$ ein Banachraum ist, ist X^* vollständig und $\mathcal{K}(X) \subseteq X^*$ ist dicht in X^*. Wir nennen X^* die <u>Vervollständigung</u> von X.

Der Name "die Vervollständigung" ist aus folgendem Grund gerechtfertigt.

19. <u>Lemma</u> Sei X ein metrischer Raum, sei Z ein vollständiger Raum und sei $\iota : X \to Z$ eine isometrische Einbettung. Sei $\varkappa : X \to X^*$ wie oben definiert. Dann existiert genau eine isometrische Einbettung $\hat{\iota} : X^* \to Z$ mit $\hat{\iota} \circ \varkappa = \iota$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\varkappa"'] & Z \\ X^* \arrow[ur, "\hat{\iota}"'] & \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\overline{\iota(X)} \subseteq Z$ isometrisch zu X^*.

<u>Beweis</u> Zu jedem $p \in X^*$ existiert eine konvergente Folge $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in X mit $\lim_i \varkappa(p_i) = p$ (weil $\overline{\varkappa(X)} = X^*$, vgl §0.11). Wir setzen $\hat{\iota}(p) = \lim_i \iota(p_i)$. Dieser Limes existiert, weil die p_i eine Cauchy-Folge bilden. Ist $p = \lim_i \varkappa(p_i')$ für eine zweite Folge $(p_i')_{i \in \mathbb{N}}$ in X, so folgt $\lim_i d(\varkappa(p_i), \varkappa(p_i')) = 0$, also $\lim_i \iota(p_i') = \hat{\iota}(p)$, die linke Seite ist <u>wohldefiniert</u>. Ist $\lim_i \varkappa(q_i) = \hat{\iota}(q)$ für $q \in X^*$, so folgt

$$d(p,q) = \lim_i d(\varkappa(p_i), \varkappa(q_i)) = d(\hat{\iota}(p), \hat{\iota}(q))$$

also ist $\hat{\iota}$ eine isometrische Einbettung. $\square$

30. Äquivalenz. Zwei Metriken d, d' auf einer Menge X heißen <u>topologisch äquivalent</u>, wenn beide Metriken die selben offenen Mengen definieren,

$$U \subseteq X \text{ offen bzgl } d \iff U \subseteq X \text{ offen bzgl } d'$$

Sie heißen <u>Lipschitz äquivalent</u> (oder <u>bi-Lipschitz</u>), wenn es $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit

$$d \leq \lambda' \cdot d \quad \text{und} \quad d' \leq \lambda \cdot d$$

Klar: Lipschitz äq. $\Rightarrow$ top. äquivalent.

<u>Bsp</u> (X, d) metrischer Raum. Setze $\bar{d}(p,q) = \min\{d(p,q), 1\}$ also $\bar{d} \leq 1$. Dann sind d und $\bar{d}$ topologisch äquivalent, aber i.a. nicht Lipschitz äquivalent. (ÜA)

<u>Satz</u> (aus Analysis II) Auf $\mathbb{R}^m$ sind alle Normen Lipschitz äquivalent: sind $|\cdot|$ und $|\cdot|'$ Normen auf $\mathbb{R}^m$, so gibt es $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}_{>0}$ so, dass für alle Vektoren $v \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$|v| \leq \lambda' \cdot |v|' \quad \text{und} \quad |v|' \leq \lambda \cdot |v|$$

31. <u>Produkt</u> Sind (X_1, d_1) und (X_2, d_2) metrische Räume, so ist $d((p_1,p_2),(q_1,q_2)) = \left(d_1(p_1,q_1)^2 + d_2(p_2,q_2)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ eine Metrik auf $X_1 \times X_2$. Allgemeiner: sind (X_i, d_i) metrische Räume, $1 \leq i \leq m$ und ist $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^m$, so ist

$$d((p_1,\dots,p_m),(q_1,\dots,q_m)) = \left|(d_1(p_1,q_1), \dots, d(p_m,q_m))\right| \text{ eine}$$

Metrik auf $X_1 \times \dots \times X_m$

Nach der vorig Seite aus Ana II liefern verschied. Norm (Lipschitz äquivalente Metrik auf $X_1 \times \ldots \times X_m$.

$\square$