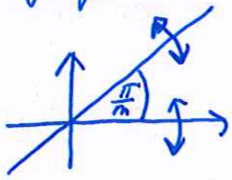
Wiederholung

§ 2 Coxetergruppen

$D_m :=$ <  > $\cong C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^m \rangle$

⇝ wir interessieren uns für eine Verallgemeinerung dieser Präsentierung

- Sei I eine Menge. Wir nehmen immer an, dass $\# I < \infty$.

Coxetermatrix über I

$m = (m_{ij})_{i,j}$ mit $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$m_{ii} = 1 \quad \forall i \in I$

$m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ für $i \neq j$

$\Updownarrow$

Coxetergraph $\Gamma = (V, E)$

- $V = I$
- zwischen zwei Ecken $i, j \in I$ $(i \neq j)$ gibt es
  - keine Kante, falls $m_{ij} = 2$
  - eine mit m_{ij} beschriftete Kante, falls $m_{ij} > 2$, (wobei $\bullet\!\overset{3}{—}\!\bullet \;\hat{=}\; \bullet\!—\!\bullet$; $\bullet\!\overset{4}{—}\!\bullet \;\hat{=}\; \bullet\!=\!\bullet$)

(abstrakte Spieglungsgruppe)

Coxetergruppe

$W = \langle I \mid (ij)^{m_{ij}}$ für alle $i, j \in I$ mit $m_{ij} \neq \infty \rangle$

(W, I) Coxetersystem

Zerlegungen von (W, I):

Sei (W, I) ein Coxetersystem, Γ der dazug. Coxetergraph und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ die Zusammenhangskomponenten von Γ.

Dann $W \cong W_1 \times \dots \times W_k$, wobei W_i die Coxetergruppe zu dem Graph Γ_i ist.

- (W, I) ist irreduzibel $:\Longleftrightarrow$ Γ ist zusammenhängend

$\rightsquigarrow$ Bausteine für Coxetergruppen: irreduzible Coxeter<u>systeme</u>

<u>Achtung:</u> $D_6 \cong D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

irreduzibel

reduzibel

- Wieso ist $W \ncong \{1\}$?

  <u>Denn:</u> $\varepsilon : W \twoheadrightarrow \{\pm 1\}$

- Gibt es Coxetergruppen die einfach sind?

  - Ja, $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

  <u>Andere?</u> Nein, denn $\{1\} \subsetneq \ker(\varepsilon) \trianglelefteq W$, $\ker(\varepsilon) \subsetneq W$

Die kanonische Darstellung von (W, I)

$\Phi : W \to GL(V)$ ↜ Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$

- Konstruktion von Φ:

  - sym. Bilinearform $B: V \times V \to \mathbb{R}$

$$(b_i, b_j) \longmapsto \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} & , m_{ij} \neq \infty \\ -1 & , m_{ij} = \infty \end{cases}$$

  - $I \to GL(V)$

    $i \longmapsto \sigma_i : v \longmapsto v - 2 \cdot B(b_i, v) \cdot b_i$

    abstrakte Spiegelung

$\overset{\text{U.E}}{\rightsquigarrow} F(I) \to GL(V)$

$\overset{\text{U.E}}{\rightsquigarrow} W \to GL(V)$

Folgerungen: $\operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$

$\boxed{m_{ij} \neq \infty}$ $\quad \underbrace{\operatorname{ord}(\Phi(ij))}_{= m_{ij}} \leq \operatorname{ord}(ij) \leq m_{ij}$

$\boxed{m_{ij} = \infty}$ $\quad (\sigma_i \sigma_j)^n (b_i) \neq b_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Wie haben wir gezeigt, dass Φ treu ist?

  ~ Wurzelsysteme

  ~ positive, negative Wurzeln

$\boxed{\text{Theorem:}}$ $\ell(wi) = \ell(w) + 1 \iff w(b_i) > 0$

$\ell(wi) = \ell(w) - 1 \iff w(b_i) < 0$

<u>Beweisidee</u>:

<u>Korollar:</u> $\Phi: W \to SL(V)$ ist treu.

<u>Beweisidee:</u>

<u>Folgerung:</u> Standard parabolische Untergruppen von (W, I) sind wieder Coxetergruppen.

<u>Beweisidee:</u>

<u>Zwei wichtige Klassen von irr. Coxetersystemen</u>

endliche Coxetergruppen

$\iff$ die Bilinearform B ist positiv definit

<u>Klassifikation via Graphen</u>

- Γ ist ein Baum mit höchstens einem Verzweigungspunkt mit Valenz 3 ...

A_n ●—●—● ... ●—●

⋮

affine Coxetergruppen

$:\iff$ die Bilinearform B ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit

<u>Klassifikation via Graphen</u>

- Klassifikation der endl. Coxetergruppen
- Γ ist positiv semidefinit $\Rightarrow \tilde{\Gamma} \subsetneq \Gamma$ ist positiv definit

$\tilde{A}_1$ $\overset{\infty}{●—●}$

⋮

Klassifikation der endlichen Coxetersysteme

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) B ist positiv definit

(ii) $\# W < \infty$

(iii) Γ ist vom Typ

$$A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)$$

Beweisidee:

(i) $\Rightarrow$ (ii) top. Beweis:

$$W \cong \underbrace{\Phi(W)}_{\substack{\text{diskret} \\ + \text{ abgeschlossen}}} \subseteq \underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\text{kompakt}} \subseteq SL_n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow$ W ist endlich

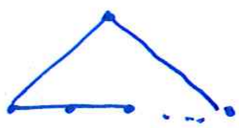
(ii) $\Rightarrow$ (i) Satz von Maschke + …

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Gram-Matrix

Hauptminoren ausrechnen

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Struktur von Γ:

Γ ist ein Baum, wenn nicht



$\exists\, \lambda \in V$ mit $B(\lambda, \lambda) = 0$

$\lambda \neq 0$

…

Typ		Andere Beschreibungen für W	
A_n		$Sym(n+1)$	Isom (n-Simplex)
$B_n = C_n$		$(\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}})^n \rtimes Sym(n)$	Isom () ↑ n-Würfel
D_n			
E_6			
E_7			
E_8			
F_4			
G_2		$C_2 \rtimes \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$	Isom ()
H_3			Isom (Ikosaeder) Isom (Dodekaeder)
H_4			
$I_2(m)$		$C_2 \rtimes \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}}$	Isom (reg. m-Eck)

- Wie können wir überprüfen, ob G eine Coxetergruppe ist.

Charakterisierung von Coxetergruppen

Sei G eine Gruppe und $I \subseteq G$ ein ES aus Involutionen. Folg. Aussagen sind äquivalent:

(i) (G, I) ist ein Coxetersystem

(ii) Exchange Condition (E) gilt in G.

(iii) Deletion Condition (D) gilt in G.

Beweisidee: für (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) und (i) $\Rightarrow$ (ii).

§ 3 Gebäude

Was ist ein Gebäude?

Simplizialkomplex bestehend aus Appartements

$$\Delta = \bigcup_{j \in J} \underbrace{\Sigma_j}_{\text{Coxeterkomplexe}}$$

+ weitere Eigenschaften

Kammersystem über I mit einer W-wertigen Abstandsfunktion

Gebäude als Simplizialkomplexe

- Sei (W,I) ein Coxetersystem und

$$\mathcal{U} = \{ w W_{I - \{i\}} \mid w \in W, i \in I \}$$

Der Coxeterkomplex $\Sigma = \Sigma(W,I) := N(\mathcal{U})$ ist ein Simplizialkomplex.

N ↑ Nerv

Andere Beschreibung:

Sei $a \in \Sigma$. Dann $a = \{ w W_{I - \{j\}} \mid j \in J \subseteq I \}$.

Also ist $\dim \Sigma = \# I - 1$.

$$f: (\Sigma(W,I), \subseteq)) \longrightarrow (\cup \{ W/W_J \mid J \subseteq I \}, \leqslant)$$

$$\{ w W_{I - \{j\}} \mid j \in J \subseteq I \} \longmapsto w W_{I - J}$$

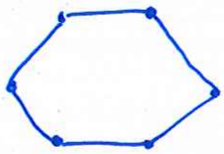
Kammern:

$$\{ w W_{I - \{i\}} \mid i \in I \} \longmapsto w W_{\emptyset} = w \cdot \{1\} = \{w\}$$

Eigenschaften: $\Sigma(W,I)$ ist ein Kammerkomplex (Beweisidee).

Beispiele:

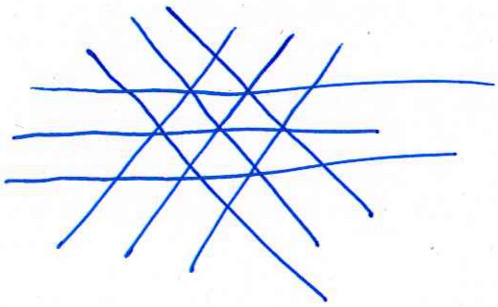
$(D_3, \{i,j\})$



$(D_m, \{ij\})$ regel. $2m$-Eck

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{ord}(ij) = \mathrm{diam}(\Sigma(D_m, \{ij\}))}$

$\tilde{A}_2$

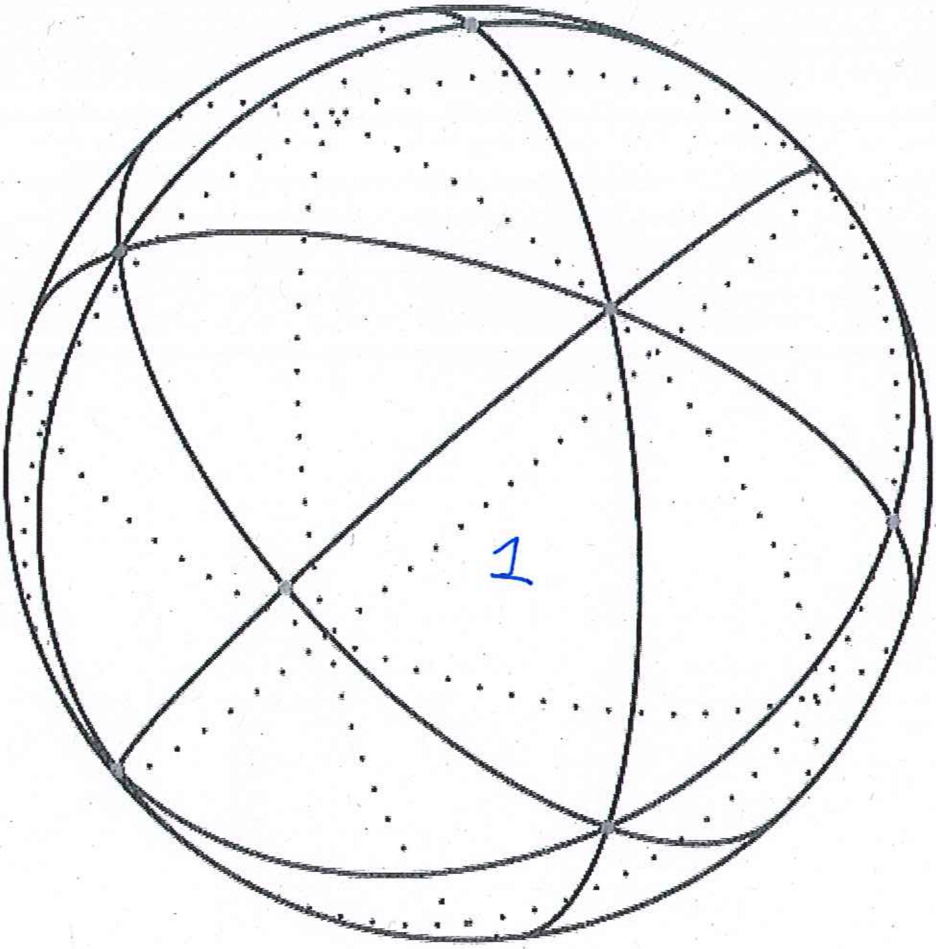


$\tilde{A}_1$

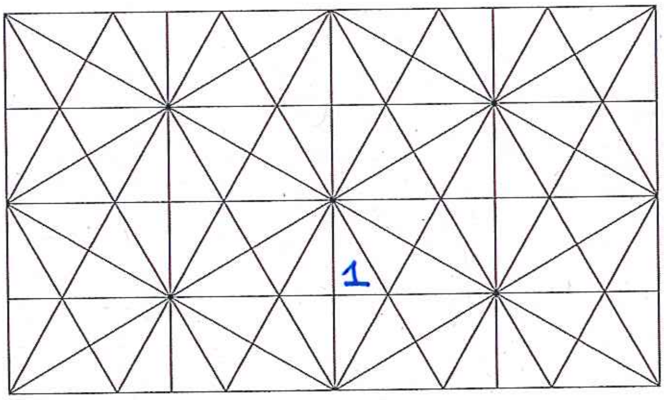
Lokale Struktur von $\Sigma(W, I)$:

Für $\underset{\substack{\| \\ wW_J}}{a} \in \Sigma$ ist $lk(a) \cong \Sigma(W_J, J)$ (Beweisidee).

Gesucht ist (W, I)



W ist vom Typ A_3



W ist vom Typ $\tilde{G}_2$

6

- $W \overset{\psi}{\curvearrowright} \Sigma(W,I)$
  via Linksmultiplikation
  - ist transitiv auf den Kammern
  - $\mathrm{stab}(wW_J) = wW_J w^{-1}$

$t: \Sigma(W,I) \to \mathcal{P}(I)$ Typfunktion
$wW_K \longmapsto I-K$

Dann ist $\Sigma(W,I)$ ein Simplizialkomplex über I und ψ ist typerhaltend.

- <u>Zerlegungen:</u>
  $W \cong W_J \times W_K \Rightarrow \Sigma(W,I) \cong \Sigma(W_J,J) * \Sigma(W_K,K)$
  <u>Beweisidee:</u>

- <u>Def:</u> Gebäude vom Typ (W,I) als Simplizialkomplex.

- Gebäude sind Kammerkomplexe (Wieso?)

- Coxeterkomplexe sind dünne Gebäude

<u>Lokale Eigenschaften von Gebäuden:</u>

$\mathrm{lk}(B)$ ist wieder ein Gebäude.

<u>Beweisidee:</u>

- Gebäude als Simplizialkomplexe $\longleftrightarrow$ Gebäude als Kammern~~komplexe~~systeme

  Zuordnung

- Def: Gebäude als Kammernsysteme
  - dicke
  - dünne

- Coxetergruppen sind Gebäude (Wieso?)

$$\delta_W : W \times W \to W$$
$$(x,y) \longmapsto x^{-1}y$$

- Satz über dünne Gebäude.

  Beweisidee:

- $\{\text{Gebäude vom Typ } \bullet\!\overset{m}{\text{—}}\!\bullet\}/_{\cong} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{verall. } m\text{-Ecke}\}/_{\cong}$

  Zuordnung

- Konstruktion von verallg. m-Ecken
  - Der freie Abschluss $\mathcal{F}(\Gamma_0)$.

- Es ex. kein dickes Gebäude vom Typ H_3 $\bullet\!\text{—}\!\bullet\!\overset{5}{\text{—}}\!\bullet$