7. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

Aufgabe 7.1
Sei $D_3 = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^3 \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung 6 und $I = \{i, j\}$.

a) Zeichnen Sie den Cayleygraphen $Cay(D_3, I)$.

b) Betrachten Sie die natürliche Wirkung via Linksmultiplikation
$$\Psi : D_3 \to Aut(Cay(D_3, I))$$
Für $i \in I$ bezeichnen wir mit $Fix(\Psi(i))$ die Mittelpunkte der Kanten von $Cay(D_3, I)$ die unter $\Psi(i)$ geflippt werden. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $Cay(D_3, I) - Fix(\Psi(i))$ gleich 2 ist und diese werden via $\Psi(i)$ aufeinander abgebildet.

Bemerkung: Man kann Coxetergruppen wie folgt charakterisieren:

Sei G eine Gruppe und I ein Erzeugendensystem bestehend aus Involutionen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (G, I) ist ein Coxetersystem.

(ii) Für $i \in I$ ist die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $Cay(G, I) - Fix(\Psi(i))$ gleich 2 und diese werden via $\Psi(i)$ aufeinander abgebildet.

Aufgabe 7.2 *(maximale Elemente in endlichen Coxetergruppen sind eindeutig)*
Sei W eine endliche Coxetergruppe. Zeigen Sie, dass die Menge
$$A := \{w \in W \mid l(v) \leq l(w) \text{ für alle } v \in W\}$$
einelementig ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Sei $w \in W$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  a) $w(b_i)$ ist eine positive Wurzel für alle $i = 1, \dots, n$.
  b) $w = 1$

(ii) Für $w \in W$ definieren wir
$$N(w) := \left\{\alpha \in \widetilde{\Phi}^+ \mid w(\alpha) \in \widetilde{\Phi}^-\right\}$$
Zeigen Sie, dass für $w \in A$ gilt: $N(w) = \widetilde{\Phi}^+$.

(iii) Zeigen sie, dass $w \in A$ eine Involution ist.

(iv) Seien nun $v, w \in A$. Zeigen Sie mit Hilfe von (i), (ii) und (iii), dass $v = w$ gilt.

Bitte wenden.

Aufgabe 7.3
Sei $m \in \mathbb{N}, m \geq 2, W = D_m = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle$ die Diedergruppe der Ordnung $2m$ und $I = \{i, j\}$. Sei weiter $\Phi : W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W und B die in der Vorlesung definierte Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^I$. Zeige:

a) Es gilt $l_I(w) \leq m$ für alle $w \in W$.

b) Endet desweiteren jede reduzierte Darstellung von $w \in W$ nicht mit i, so gilt $l_I(w) \leq m-1$ und $w(b_i) > 0$, d.h. $w(b_i)$ ist eine positive Wurzel. Zeige dafür

$$(\sigma_i \sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin((2k+1)\frac{\pi}{m})}{\sin\frac{\pi}{m}} \cdot b_i + \frac{\sin(\frac{2k\pi}{m})}{\sin\frac{\pi}{m}} \cdot b_j$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und

$$\sigma_i(\sigma_i \sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin((2k-1)\frac{\pi}{m})}{\sin\frac{\pi}{m}} \cdot b_i + \frac{\sin(\frac{2k\pi}{m})}{\sin\frac{\pi}{m}} \cdot b_j$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Der Aufgabenteil b) ist mit vollständiger Induktion nach k nicht schwierig zu zeigen, aber man muss viel rechnen und mehrmals die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus anwenden.

Abgabe bis: Dienstag, den 13.6.2017, 10 Uhr