5. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 | Dr. Olga Varghese
WWU Münster | Nils Leder

Aufgabe 5.1

a) Bestimme das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ von D_3.

b) Zeige: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ von D_∞ ist gegeben durch

$$\tilde{\Phi} = \{kb_i + lb_j \mid k, l \in \mathbb{Z} \text{ mit } |k - l| = 1\}.$$

Aufgabe 5.2
In der Vorlesung wurde folgende Aussage bewiesen: Ist X ein kompakter metrischer Raum und $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener Teilraum, der bzgl. der induzierten Topologie diskret ist, so ist Y endlich. Wir wollen nun sehen, dass beide Voraussetzungen an Y notwendig sind.

a) Gebe ein Beispiel für einen kompakten metrischen Raum X an, der einen unendlichen Unterraum Y besitzt, der abgeschlossen und nicht diskret ist.

b) Gebe ein Beispiel für einen kompakten metrischen Raum X an, der einen unendlichen Unterraum Y besitzt, der diskret und nicht abgeschlossen ist.

Aufgabe 5.3
Sei $[-n, n] = \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$ und G die Gruppe der *Permutationen mit Vorzeichen* („signed permutations“), d.h.

$$G = \{g \in \mathrm{Sym}([-n, n]) \mid g(i) = -g(-i) \text{ für alle } i = 1, \dots n\}$$

mit Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Seien weiter $\sigma, s_i \in G$ gegeben durch $\sigma(1) = -1$ und $\sigma(k) = k$ für $k = 2, \dots, n$ sowie $s_i = (i, i+1)$ für $i = 1, \dots, n-1$. Zeige:

a) G wird von $\sigma, s_1, \dots, s_{n-1}$ erzeugt.

b) G ist isomorph zu einem semi-direkten Produkt $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathrm{Sym}(n)$.

Bitte wenden.

***-Aufgabe**
Betrachte das Coxeterdiagramm vom Typ $C_n, n \geq 2$ gegeben durch:

(Die Anzahl der Knoten ist n und die Doppelkante steht für eine Kante mit Label 4.) Sei G die Gruppe der Permutationen mit Vorzeichen wie in 5.3. Zeige: G ist isomorph zu der Coxetergruppe vom Typ C_n.
Hinweis: Benutze Aufgabe 4.2 und Aufgabe 5.3 b).

Abgabe bis: Dienstag, den 23.5.2017, 10 Uhr