

## 5. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017  
WWU Münster

Dr. Olga Varghese  
Nils Leder

---

### Aufgabe 5.1

- a) Bestimme das Wurzelsystem  $\tilde{\Phi}$  von  $D_3$ .
- b) Zeige: Das Wurzelsystem  $\tilde{\Phi}$  von  $D_\infty$  ist gegeben durch

$$\tilde{\Phi} = \{kb_i + lb_j \mid k, l \in \mathbb{Z} \text{ mit } |k - l| = 1\}.$$

### Aufgabe 5.2

In der Vorlesung wurde folgende Aussage bewiesen: Ist  $X$  ein kompakter metrischer Raum und  $Y \subseteq X$  ein abgeschlossener Teilraum, der bzgl. der induzierten Topologie diskret ist, so ist  $Y$  endlich. Wir wollen nun sehen, dass beide Voraussetzungen an  $Y$  notwendig sind.

- a) Gebe ein Beispiel für einen kompakten metrischen Raum  $X$  an, der einen unendlichen Unterraum  $Y$  besitzt, der abgeschlossen und nicht diskret ist.
- b) Gebe ein Beispiel für einen kompakten metrischen Raum  $X$  an, der einen unendlichen Unterraum  $Y$  besitzt, der diskret und nicht abgeschlossen ist.

### Aufgabe 5.3

Sei  $[-n, n] = \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$  und  $G$  die Gruppe der *Permutationen mit Vorzeichen* („signed permutations“), d.h.

$$G = \{g \in \text{Sym}([-n, n]) \mid g(i) = -g(-i) \text{ für alle } i = 1, \dots, n\}$$

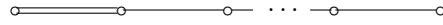
mit Komposition von Abbildungen als Verknüpfung. Seien weiter  $\sigma, s_i \in G$  gegeben durch  $\sigma(1) = -1$  und  $\sigma(k) = k$  für  $k = 2, \dots, n$  sowie  $s_i = (i, i+1)$  für  $i = 1, \dots, n-1$ . Zeige:

- a)  $G$  wird von  $\sigma, s_1, \dots, s_{n-1}$  erzeugt.
- b)  $G$  ist isomorph zu einem semi-direkten Produkt  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \text{Sym}(n)$ .

*Bitte wenden.*

**\*-Aufgabe**

Betrachte das Coxeterdiagramm vom Typ  $C_n, n \geq 2$  gegeben durch:



(Die Anzahl der Knoten ist  $n$  und die Doppelkante steht für eine Kante mit Label 4.) Sei  $G$  die Gruppe der Permutationen mit Vorzeichen wie in 5.3. Zeige:  $G$  ist isomorph zu der Coxetergruppe vom Typ  $C_n$ .  
*Hinweis:* Benutze Aufgabe 4.2 und Aufgabe 5.3 b).

Abgabe bis: Dienstag, den 23.5.2017, 10 Uhr