# 4. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

---

**Aufgabe 4.1**
Sei $G$ eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine Menge, die $G$ erzeugt. Sei $l_S : G \to \mathbb{N}$ die in der Vorlesung definierte Wortlängenfunktion bzgl. $S$. Zeige:

a) Es gilt $l_S(g) = l_S(g^{-1})$ für alle $g \in G$.

b) Für alle $g, h \in G$ gilt $l_S(gh) \leq l_S(g) + l_S(h)$.

c) Für alle $g, h \in G$ gilt $l_S(gh) \geq l_S(g) - l_S(h)$.

d) Ist $W$ eine Coxetergruppe mit Coxetersystem $(W, I)$, so gilt

$$l_I(wi) \in \{l_I(w) - 1, l_I(w) + 1\}$$

für alle $w \in W, i \in I$.

**Aufgabe 4.2**
Seien $G$ und $H$ Gruppen mit Präsentierungen

$$G = \langle X \mid R \rangle, \quad H = \langle Y \mid S \rangle$$

mit $X \cap Y = \emptyset$ und $\varphi : H \to \operatorname{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Setze

$$T := R \cup S \cup \{yxy^{-1}(\varphi(y)(x))^{-1} \mid y \in Y, x \in X\}.$$

Zeige: Es gilt $G \rtimes_\varphi H \cong \langle X \cup Y \mid T \rangle$.

**Aufgabe 4.3**
Sei $K$ ein Körper und $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum. Weiter sei $\rho : G \to \operatorname{GL}(V)$ eine lineare Darstellung einer Gruppe $G$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

*i)* Jeder $G$-invariante Untervektorraum $U$ von $V$ besitzt ein $G$-invariantes Komplement $W$.

*ii)* $V$ ist ein halbeinfacher $G$-Modul, d.h. $V$ ist eine direkte Summe von $G$-invarianten Unterräumen $U_1, \ldots, U_k$, sodass die induzierten Darstellungen $G \to \operatorname{GL}(U_i)$ irreduzibel sind.

Abgabe bis: Dienstag, den 16.5.2017, 10 Uhr