2. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

Aufgabe 2.1

a) Zeige: Die in der Vorlesung definierte „Abstandsfunktion“ δ ist wohldefiniert, d.h. die Permutation π in Lemma 6 von Kapitel 1 ist unabhängig von der Wahl der Basis.
Hinweis: Zeige $\pi(i) = \min\{j \mid W_i \subseteq W_{i-1} + U_j\}$.

b) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen, $V = \mathbb{F}_3^3$ und $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V. Berechne den δ-Abstand $\delta(C, D)$ für die Kammern $C = \{U_1, U_2\}$ und $D = \{W_1, W_2\}$ mit $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, W_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 2.2
Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ die Menge der Kammern in $\Delta(V)$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $s_i = (i, i+1) \in \mathrm{Sym}(n+1)$.
Sei weiter $\delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to \mathrm{Sym}(n+1)$ die in der Vorlesung definierte $\mathrm{Sym}(n+1)$-wertige Abstandsfunktion auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$. Zeige:

i) Sind $C = \{U_1, \ldots, U_n\}$ und $C' = \{W_1, \ldots, W_n\}$ Kammern in $\Delta(V)$, so gilt:
$$\delta(C, C') = s_i \Leftrightarrow U_j = W_j \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\} \text{ und } U_i \neq W_i$$

ii) Für $C, C' \in \mathrm{cham}(\Delta(V))$ definiert
$$C \sim_{s_i} C' :\Leftrightarrow \delta(C, C') \in \{\mathrm{id}, s_i\}$$
eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$.

iii) Sind $C, C' \in \mathrm{Cham}(\Delta(V))$ mit $\delta(C, C') = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}$, so existieren Kammern $C_1, \ldots, C_{m-1} \in \mathrm{cham}(\Delta(V))$ mit
$$C \sim_{s_{i_1}} C_1 \sim \ldots \sim C_{m-1} \sim_{s_{i_m}} C'.$$

Bitte wenden.

Definition: Seien E und N Gruppen sowie $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ eine Gruppenwirkung von E auf N durch Automorphismen. Dann definieren wir das *semi-direkte Produkt* von N mit E bzgl. φ, geschrieben $N \rtimes E = N \rtimes_\varphi E$, wie folgt:
Als Menge sei $N \rtimes E = N \times E$ das kartesische Produkt von N und E. Zudem erklären wir eine Verknüpfung durch

$$(n_1, e_1) \cdot (n_2, e_2) := (n_1 \varphi(e_1)(n_2), e_1 e_2),$$

wobei eintragsweise in den Gruppen N bzw. E multipliziert wird.

Aufgabe 2.3
Seien E, N und $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ wie in voriger Definition. Zeige:

a) Das semi-direkte Produkt $N \rtimes E$ ist eine Gruppe, die E als Untergruppe und N als Normalteiler enthält.

b) Ist G eine Gruppe mit Untergruppen E und N, sodass $N \trianglelefteq G$, $G = NE$ und $N \cap E = \{1\}$ gilt, so ist G isomorph zu einem semi-direkten Produkt $N \rtimes_\varphi E$ für einen geeigneten Homomorphismus $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$.

c) Sei G eine Diedergruppe, die von zwei Involutionen $g, h \in G$ erzeugt wird und $m := \mathrm{ord}(gh)$. Dann gilt:

$$G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes C_2 & \text{wenn } m < \infty \\ \mathbb{Z} \rtimes C_2 & \text{wenn } m = \infty \end{cases}$$

Abgabe bis: Dienstag, den 2.5.2016, 10 Uhr