10. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ die Menge der Kammern in $\Delta(V)$. Sei weiter $\delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to \mathrm{Sym}(n+1)$ die in der Vorlesung definierte $\mathrm{Sym}(n+1)$-wertige Abstandsfunktion auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$. Durch $C \sim_{s_i} D :\Leftrightarrow \delta(C, D) = s_i = (i, i+1)$ wird $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ ein Kammernsystem.
Zeige: Das Kammernsystem $(\mathrm{cham}(\Delta(V)), (\sim_{s_i})_{i \in \{1,\ldots,n\}})$ ist ein dickes Gebäude vom Typ A_n.
Hinweis: Für das Axiom (G2) muss folgendes nachgewiesen werden:
Ist $w = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ eine reduzierte Darstellung und $(C = C_0, C_1, \ldots, C_{k-1}, C_k = D)$ eine Galerie von C nach D von reduziertem Typ $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$, so gilt $\delta(C, D) = w$. Argumentiere mit Induktion nach k. Hierbei ist nützlich (vgl. Aufg. 2.1): Gilt $C = \{U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n\}$ und $D = \{W_1 \subseteq W_2 \subseteq \ldots \subseteq W_n\}$, so ist $\delta(C, D) = \pi$ mit $\pi(i) = \min\{j \mid W_i \subseteq W_{i-1} + U_j\}$. Folgere hieraus, dass $\delta(C, D) = \delta(C, C_{k-1})$ oder $\delta(C, D) = \delta(C, C_{k-1}) \cdot s_{i_k}$ gilt. Zeige nun, dass aus $\delta(C, D) = \delta(C, C_{k-1})$ folgt, dass $w = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ keine reduzierte Darstellung ist.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)
Sei $G = \{g \in \mathrm{Sym}([-n, n]) \mid g(i) = -g(-i) \text{ für alle } i = 1, \ldots n\}$ die Gruppe der Permutationen mit Vorzeichen (wie auf Blatt 5). Zeige: G ist isomorph zu der Isometriegruppe eines n-dimensionalen Würfels.
Hinweis: Fasse den n-dimensionalen Würfel als Teilraum $[-1, 1]^n \subseteq \mathbb{R}^n$ auf. Die Aussage kann nun in folgenden Schritten gezeigt werden:

a) Konstruiere einen geeigneten Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Isom}([-1, 1]^n)$, d.h. eine isometrische Wirkung von G auf $[-1, 1]^n$.

b) Beweise, dass eine Isometrie $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1, 1]^n)$ durch das Bild auf der Eckenmenge $\{-1, 1\}^n$ eindeutig bestimmt ist.

c) Zeige, dass G mittels φ transitiv auf den Ecken wirkt.

d) Zeige, dass eine Isometrie $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1, 1]^n)$ durch das Bild einer Ecke und all ihrer Nachbarn (d.h. der Ecken mit Abstand 1) eindeutig festgelegt wird.

e) Beweise, dass der Stabilisator $\mathrm{Isom}([-1, 1]^n)_{v_0}$ der Ecke $v_0 = (1, \ldots, 1)$ isomorph zu $\mathrm{Sym}(n)$ und im Bild von φ enthalten ist. Folgere daraus mithilfe von c), dass φ surjektiv ist.

f) Berechne die Ordnung von $\mathrm{Isom}([-1, 1]^n)$ und zeige, dass φ injektiv ist.

Abgabe bis: Dienstag, den 4.7.2017, 10 Uhr