1. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“

SoSe 2017 — Dr. Olga Varghese
WWU Münster — Nils Leder

Aufgabe 1.1
Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\Phi : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Sym}(\Delta(V))$ die in der Vorlesung definierte Wirkung von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\Delta(V)$. Zeige:

a) Jede Kammer (d.h. maximale Fahne) hat Länge n und jede Fahne $\{U_1, \ldots, U_k\} \in \Delta(V)$ ist in einer Kammer enthalten.

b) Der Komplex $\Delta(V)$ ist die Vereinigung aller Apartments, d.h.

$$\Delta(V) = \bigcup_{B \text{ Basis}} \Sigma(B).$$

c) Der Kern von Φ besteht genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix, d.h.

$$\ker \Phi = \{\lambda E_n \mid \lambda \in K^*\}.$$

d) $\mathrm{GL}(V)$ wirkt transitiv auf der Menge der Kammern in $\Delta(V)$.
Wirkt $\mathrm{GL}(V)$ auch transitiv auf den Ecken von $\Delta(V)$?

Aufgabe 1.2
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Sei weiter $V = \mathbb{F}_p^3$ und $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V.

a) Wie viele Ecken hat $\Delta(V)$?

b) Wie viele Kanten hat $\Delta(V)$?

c) Wie viele Apartments enthält $\Delta(V)$?

Aufgabe 1.3
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Für $x \in X$ sei $G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ der *Stabilisator* von x. Zeige:

a) Ist H eine Untergruppe von G, die transitiv auf X wirkt, so wird G erzeugt von $H \cup G_x$ für jedes $x \in X$.

b) Die Gruppe $\mathrm{Sym}(n+1)$ wird von den n Involutionen $(1,2), \ldots, (n, n+1)$ erzeugt.

Besprechung: Montag, den 24.4.2017