Gebäude

Blatt 9 – Lösungen

Aufgabe 9.1. Sei Γ_0 ein endliches partielles m-Eck mit $\operatorname{diam}(\Gamma_0) \geq m+1$ und $\mathcal{T}(\Gamma_0) = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} \Gamma_i$ der freie Abschluss von Γ_0. Sei weiter δ_m die gewichtete Eulercharakteristik.

(a) Es gilt $\delta_m(\Gamma_0) = \delta_m(\Gamma_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Beweis. Γ_{i+1} geht aus Γ_i durch Hinzufügen von endlich vielen Wegen der Länge $m-1$ hervor. Sei $p = (v_0, \dots, v_{m-1})$ ein Weg mit $v_0, v_{m-1} \in V(\Gamma_i)$, $d_{\Gamma_i}(v_0, v_{m-1}) = m+1$. Sei $\Gamma_i \cup p$ der Graph, der aus Γ_i durch Hinzufügen des Weges p entsteht. Dabei nehmen wir $v_1, \dots, v_{m-2} \notin V(\Gamma_i)$ an. Wir fügen also $m-2$ Ecken und $m-1$ Kanten hinzu. Es gilt

$$\begin{aligned}
\delta_m(\Gamma_i \cup p) &= (m-1)(|V(\Gamma_i)| + m - 2) - (m-2)(|E(\Gamma_i)| + m - 1)\\
&= (m-1)|V(\Gamma_i)| + (m-1)(m-2) - (m-2)|E(\Gamma_i)| - (m-1)(m-2)\\
&= (m-1)|V(\Gamma_i)| - (m-2)|E(\Gamma_i)| = \delta_m(\Gamma_i)
\end{aligned}$$

und damit

$$\delta_m(\Gamma_{i+1}) = \delta_m(\Gamma_i).$$

$\square$

(b) Ist A ein Graph mit $\Gamma_0 \subseteq A \subseteq \Gamma_{i+1}$, dann gilt $\delta_m(\Gamma_0) \leq \delta_m(A)$.

Beweis. Wir führen eine Induktion durch. $i = 1$: Sei $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup p_1 \cup \ldots \cup p_\ell$, wobei $p_1, \dots, p_\ell$ die hinzugefügten Wege der Länge $m-1$ seien. Wir zeigen, dass

$$\delta_m(A) \geq \delta_m(A \setminus (A \cap \mathring{p}_1)) \geq \ldots \geq \delta_m(A \setminus (A \cap \mathring{p}_1 \cap \ldots \cap \mathring{p}_\ell)).$$

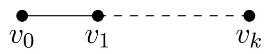
Dabei bezeichnet $\mathring{p}_j$ den Weg p_j ohne Endpunkte. Es genügt zu zeigen, dass

$$\delta_m(A) \geq \delta_m(A \setminus (A \cap \mathring{p}_1)).$$

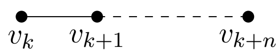
Gilt $p_1 \subseteq A$, so ist

$$\delta_m(A) = \delta_m(A \setminus (A \cap \mathring{p}_1)),$$

wie wir im Beweis von (a) gesehen haben. Liegt $p_1 = (v_0, \ldots, v_{m-1})$ nicht vollständig in A, so besteht $A \cap \mathring{p}_1$ aus Teilgraphen der Form



mit $0 \leq k < m-1$ oder der Form



mit $n \geq 0$, $k > 0$ und $k + n < m - 1$. Im ersten Fall beträgt die Änderung von δ_m

$$k(m-1) - k(m-2) = k \geq 0$$

und im zweiten Fall

$$(n+1)(m-1) - n(m-2) = n + m - 1 > 0.$$

Insgesamt ist die Änderung von δ_m nicht-negativ. Also gilt

$$\delta_m(A) \geq \delta_m(A \setminus (A \cap \mathring{p}_1)).$$

$i \rightsquigarrow i+1$: Betrachte $A \setminus (A \cap \Gamma_i)$ und zeige wie für $i = 1$, dass

$$\delta_m(A) \geq \delta_m(A \cap \Gamma_i).$$

Da $A \cap \Gamma_i \subseteq \Gamma_i$ gilt nach I.V. also

$$\delta_m(A) \geq \delta_m(A \cap \Gamma_i) \geq \delta_m(\Gamma_0).$$

$\square$

Bemerkung. Urspünglich war in der Voraussetzung A als zusammenhängender Graph gegeben. Diese Eigenschaft wird nicht benötigt.

Aufgabe 9.2. Sei Γ ein dickes verallgemeinertes m-Eck und $v, w \in V(\Gamma)$ zwei Ecken. Weiter sei die Valenz $\text{val}(v)$ die Anzahl der Nachbarn von v, d.h. $\text{val}(v) = \Gamma_v$.

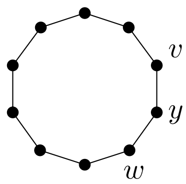
(i) Haben v und w geraden Abstand voneinander, so gilt $\text{val}(v) = \text{val}(w)$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage in zwei Schritten:

1. Gegenüberliegende Ecken v, w (d.h. $d(v, w) = m$) haben die gleiche Valenz. Dies gilt nach Lemma 22 (ii).

2. Haben v und w eine gemeinsame benachbarte Ecke, so existiert eine Ecke x, die beiden gegenüberliegt, d.h. $d(v, x) = d(w, x) = m$.

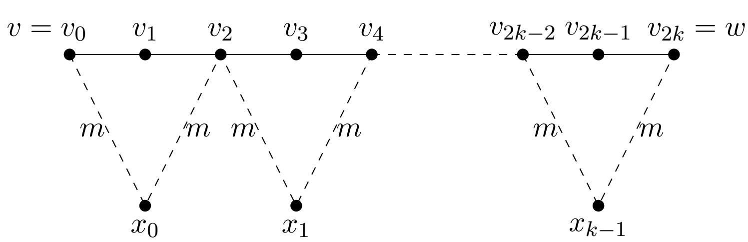
Wir zeigen den 2. Schritt: Sei y ein gemeinsamer Nachbar von v, w und c ein Kreis der Länge $2m$, der v, w enthält. Ein solcher Kreis existiert nach Lemma 22 (iv). y ist auch ein Nachbar von v, w in c, d.h. c ist von folgender Form:



Sonst hätten wir einen Kreis mit Länge $< 2m$, was nicht möglich ist, da $\mathrm{g}(\Gamma) = 2m$. Wir finden eine Ecke $z \in c$, die y gegenüberliegt, indem wir von y aus m Schritte auf c entlanggehen. Es gilt nämlich $d(y, z) \geq m$, da wir sonst einen Kreis mit Länge $< 2m$ hätten. Es gilt mit dem gleichen Argument $d(z, v) = d(z, w) = m - 1$. Da Γ dick ist, ist z benachbart zu einer Ecke x, die nicht in c liegt. Es gilt $d(x, v) \geq m$, da wir sonst einen Kreis mit Länge $< 2m$ hätten. Außerdem gilt

$$d(x, v) \leq d(x, z) + d(z, v) = 1 + m - 1 = m,$$

also $d(x, v) = m$. Analog folgt $d(x, w) = m$.
Sei nun der Abstand von v, w gerade, d.h. $d(v, w) = 2k$. Sei $(v_0, \ldots, v_{2k})$ ein Weg von $v = v_0$ nach $w = v_{2k}$. Da v_{2i} und v_{2i+2} einen gemeinsamen Nachbarn haben, gibt es nach dem 2. Schritt eine Ecke x_i mit $d(v_{2i}, x_i) = d(v_{2i+2}, x_i) = m$.



Nach dem 1. Schritt bzw. Lemma 22 (ii) gilt nun

$$\mathrm{val}(v) = \mathrm{val}(v_0) = \mathrm{val}(v_2) = \mathrm{val}(v_4) = \ldots = \mathrm{val}(v_{2k}) = \mathrm{val}(w).$$

□

(ii) Ist m ungerade, so haben alle Ecken in Γ die gleiche Valenz.

Beweis. Seien v, w zwei Ecken. Falls $d(v,w)$ gerade ist, so gilt $\mathrm{val}(v) = \mathrm{val}(w)$ nach (i). Sei also $d(v,w)$ ungerade. Sei x eine Ecke, die v gegenüberliegt, d.h. $d(v,x) = m$. Dann gilt $\mathrm{val}(v) = \mathrm{val}(x)$ nach Lemma 22 (ii). Da Γ bipartit ist, muss $d(w,x)$ gerade sein. Nach (i) gilt somit $\mathrm{val}(v) = \mathrm{val}(x) = \mathrm{val}(w)$. □

Aufgabe 9.3. Sei W eine Gruppe, die von einer Menge I von Involutionen erzeugt wird. Dann gilt: (W, I) erfüllt **(F)** genau dann, wenn (W, I) die Bedingung **(D)** erfüllt.

Beweis. **(F)** $\Rightarrow$ **(D)**: Sei $w = i_1 \ldots i_k \in W$ mit $i_1, \ldots, i_k \in I$, $\ell(w) < k$. Wir führen eine Induktion nach $k \geq 2$ durch. $k = 2$: Es gilt $\ell(i_1) = \ell(1) + 1$ und $\ell(i_2) = \ell(1) + 1$. Außerdem ist $\ell(i_1 1 i_2) = \ell(i_1 i_2) = \ell(w) < 2 = \ell(1) + 2$. Nach **(F)** gilt also $w = i_1 1 i_2 = 1 = \widehat{i_1}\widehat{i_2}$.
$k-1 \rightsquigarrow k$: Definiere $w' = i_2 \ldots i_{k-1}$. Wir können annehmen, dass $i_1 \ldots i_{k-1}$ und $i_2 \ldots i_k$ reduziert sind. Sonst können wir nach I.V. zwei Elemente in $i_1 \ldots i_{k-1}$ bzw. $i_2 \ldots i_k$ löschen und damit auch in w. Es gilt also $\ell(i_1 w') = k - 1 = \ell(w') + 1$ und $\ell(w' i_k) = k - 1 = \ell(w') + 1$. Außerdem ist $\ell(i_1 w' i_k) = \ell(w) < k = \ell(w') + 2$. Nach **(F)** gilt also

$$w = i_1 w' i_k = w' = \widehat{i_1} i_2 \ldots i_{k-1} \widehat{i_k}.$$

(D) $\Rightarrow$ **(F)**: Sei $w = i_1 \ldots i_k \in W$, $i_1, \ldots, i_k, i, j \in I$ mit $\ell(w) = k$, $\ell(iw) = \ell(w) + 1$ und $\ell(wj) = \ell(w) + 1$. Angenommen, $\ell(iwj) \neq \ell(w) + 2$. Da $\ell(iwj) \leq \ell(w) + 2$ gilt, ist $\ell(iwj) < \ell(w) + 2 = k + 2$. Nach **(D)** existieren $i_r, i_s \in \{i_1, \ldots, i_k, i, j\}$ mit

$$iwj = ii_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots \widehat{i_s} \ldots i_k j.$$

Angenommen, $i_r, i_s \in \{i_1, \ldots, i_k\}$. Dann ist $w = i_1 \ldots \widehat{i_r} \ldots \widehat{i_s} \ldots i_k$, was ein Widerspruch zu $\ell(w) = k$ ist. Angenommen, $i_r = i$ und $i_s \in \{i_1, \ldots i_k\}$. Dann ist $iwj = i_1 \ldots \widehat{i_s} \ldots i_k j$, also $iw = i_1 \ldots \widehat{i_s} \ldots i_k$, was ein Widerspruch zu $\ell(iw) = k + 1$ ist. Analog führt der Fall $i_s = j$ und $i_r \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ zum Widerspruch. Es bleibt also nur der Fall, dass $i_r = i$ und $i_s = j$. Somit gilt

$$iwj = \widehat{i} i_1 \ldots i_k \widehat{j} = w.$$

□