Musterlösung zum 8. Übungszettel

Aufgabe 8.1

Voraussetzung: Sei G eine Gruppe, B eine Untergruppe und für jedes $i \in I$ sei P_i eine Untergruppe mit $B \subsetneq P_i \subsetneq G$. Wir definieren auf der Menge der Linksnebenklassen $\{gB|g \in G\}$ für $i \in I$ folgende Äquivalenzrelation:

$$gB \sim_i hB :\Leftrightarrow gP_i = hP_i \tag{1}$$

Behauptung: Zeigen Sie, dass das Kammernsystem $(\{gB|g \in G\}, \sim_{i\in I})$ genau dann zusammenhängend ist, wenn $G = \langle P_i | i \in I\rangle$.

Beweis: "$\Leftarrow$": Sei $g \in G$ ein beliebiges Element. Da $G = \langle P_i | i \in I\rangle$ gilt, erhalten wir eine Darstellung

$$g = p_{i_1}...p_{i_m} \text{ mit } p_{i_j} \in P_{i_j} \text{ für alle } j \in \{1, ..., m\}.$$

Mithilfe dieser Darstellung lässt sich eine Galerie von B nach gB vom Typ $(i_1, ..., i_m)$ konstruieren. Dazu beobachten wir mit der Definition aus (1):

$B \sim_{i_1} p_{i_1}B$, denn $P_{i_1} = p_{i_1}P_{i_1}$,

$p_{i_1}B \sim_{i_1} p_{i_1}p_{i_2}B$, denn $p_{i_1}P_{i_2} = p_{i_1}p_{i_2}P_{i_2}$, ...

und $p_{i_1}...p_{i_{m-1}}B \sim_{i_m} gB$, denn $p_{i_1}...p_{i_{m-1}}P_{i_m} = \underbrace{p_{i_1}...p_{i_m}}_{=g}P_{i_m}$.

Also ist $(B, p_{i_1}B, ..., gB)$ eine Galerie vom Typ $(i_1, ..., i_m)$ und eine beliebige Nebenklasse gB lässt sich mit der Nebenklasse B „verbinden“.
Für eine weitere beliebige Nebenklasse hB mit $h = q_{j_1}...q_{j_n}$ mit $q_{j_k} \in P_{j_k}$ gilt dann:

$(hB, q_{j_1}...q_{j_{n-1}}B, ...q_{j_1}B, B, p_{i_1}B, ..., p_{i_1}...p_{i_{m-1}}B, gB)$ ist eine Galerie von hB nach gB vom Typ $(j_n, ..., j_1, i_1, ..., i_m)$. #

"$\Rightarrow$": Sei nun das Kammernsystem der Linksnebenklassen $(\{gB|g \in G\}, \sim_{i\in I})$ zusammenhängend. Weiter sei $g \in G$ ein beliebiges Element. Wir wollen zeigen, dass g im Erzeugnis der Untergruppen P_i enthalten ist. Dazu betrachten wir eine Galerie von B nach gB vom Typ $(i_1, ..., i_m)$, das heißt: $B \sim_{i_1} g_{i_1}B \sim_{i_2} g_{i_2}B \sim_{i_3} ... \sim_{i_m} g_{i_m}B$, wobei wir $g_{i_m} = g$ wählen können.

Wir setzen: $\tilde{g}_{i_1} := g_{i_1}$ und $g_{i_{k+1}} := g_{i_k}^{-1}g_{i_{k+1}}$.
Dann gilt: $\tilde{g}_{i_1} \in P_{i_1}$, da $B \sim_{i_1} g_{i_1}B \Leftrightarrow P_{i_1} = g_{i_1}P_{i_1}$ und
$\tilde{g}_{i_k} \in P_{i_k}$, da $g_{i_{k-1}}B \sim_{i_k} g_{i_k}B \Leftrightarrow g_{i_{k-1}}P_{i_k} = g_{i_k}P_{i_k}$.
So erhalten wir: $g = g_{i_m} = g_{i_1}(g_{i_1}^{-1}g_{i_2})...(g_{i_{m-1}}^{-1}g_{i_m}) = \tilde{g}_{i_1}...\tilde{g}_{i_m} \in P_{i_1}...P_{i_m}$.
Das heißt $G \subseteq \langle P_i | i \in I\rangle$.

Da $G \supseteq \langle P_i | i \in I\rangle$ nach der Voraussetzung ebenfalls erfüllt ist, gilt also: $G = \langle P_i | i \in I\rangle$. $\square$

Aufgabe 8.2

Behauptung: Zeigen Sie, dass verallgemeinerte 2-Ecke vollständige bipartite Graphen sind.

Beweis: Laut Definition 3.20 der Vorlesung ist ein verallgemeinertes 2-Eck ein zusammenhängender, bipartiter Graph $\Gamma = (V, E)$ mit Durchmesser $diam(\Gamma) = 2$ und Umfang $g(\Gamma) = 2 \cdot 2 = 4$.
Nach der Definition der Bipartitheit (Vgl. Vorlesung 3.15) erhalten wir eine Zerlegung der Eckenmenge $V = V_1 \dot{\cup} V_2$, sodass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt: $v \in V_1 \Rightarrow w \in V_2$ oder
$v \in V_2 \Rightarrow w \in V_1$.

Es bleibt zu zeigen, dass sich jede Ecke in V_1 mittels einer Kante mit jeder Ecke in V_2 verbinden lässt.
Seien dazu $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ beliebig. Wegen $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ gilt $v_1 \neq v_2$.

Angenommen, $\{v_1, v_2\} \notin E$. Da Γ zusammenhängend ist, existiert aber ein Weg zwischen den Ecken v_1 und v_2. Weiter gilt $diam(\Gamma) = 2$, sodass ein Weg der Länge kleiner gleich 2 existiert.
Da $\{v_1, v_2\} \notin E$ ist, finden wir also eine Ecke $v \in V$ mit $\{v_1, v\}$, $\{v, v_2\} \in E$.
Mit der Bipartitheit von Γ folgt wegen $\{v_1, v\} \in E$ und $v_1 \in V_1$, dass $v \in V_2$ ist. Analog folgt wegen $\{v, v_2\} \in E$ und $v_2 \in V_2$, dass $v \in V_1$ ist. Also ist $v \in V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Widerspruch.

Folglich war die Annahme falsch und es muss für alle $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ gelten: $\{v_1, v_2\} \in E$.
$\square$

Bemerkung: Es gilt sogar: Ein Graph Γ ist genau dann ein verallgemeinertes 2-Eck, wenn Γ ein vollständiger bipartiter Graph ist.

Aufgabe 8.3

Behauptung: Zeigen Sie, dass Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ Bäume ohne Blätter sind.

Beweis: Wir erinnern uns zunächst an den Coxetergraphen $\tilde{A}_1$:

$$\circ\overset{\infty}{\text{———}}\circ$$

Die zugehörige Coxetergruppe zum Coxetergraphen $\tilde{A}_1$ ist die Gruppe D_∞.

Für ein Gebäude Δ vom Typ $\tilde{A}_1$ gilt nach der Definition eines Gebäudes (Vgl. Vorlesung 3.2):
Δ ist ein Kammernsystem mit Äquivalenzrelationen $\sim_i$ und $\sim_j$ und Abstandsfunktion $\delta : \Delta \times \Delta \to D_\infty$ mit den folgenden Eigenschaften:
(G₁) Für die Äquivalenzrelationen gilt $x \sim_k y \Leftrightarrow \delta(x, y) \in \{1, k\}$ für alle $k \in \{i, j\}$ und jede Äquivalenzklasse $[...]_i$, $[...]_j$ enthält mindestens zwei Elemente.
(G₂) Ist $w = i_1...i_k \in D_\infty$ ein reduziertes Wort, so gilt für $C, D \in \Delta$: Die Abstandfunktion liefert genau dann $\delta(C, D) = w$, wenn eine Galerie von C nach D vom Typ $(i_1, ..., i_k)$ existiert.

Wir ordnen Δ den folgenden Graphen Γ_Δ:
Ecken: alle Äquivalenzklassen bzgl. $\sim_i$ und $\sim_j$
Kanten: Für $i_1 \neq i_2$ gilt: $\{[c]_{i_1}, [d]_{i_2}\} \in E(\Gamma_\Delta) :\Leftrightarrow [c]_{i_1} \cap [d]_{i_2} \neq \emptyset$.

Wir zeigen nun: Der Graph Γ_Δ ist zusammenhängend (i), enthält keine Kreise (ii) und enthält keine Ecken mit Valenz 1 ($\hat{=}$ Blätter) (iii).

zu *(i)*: Nach Lemma 3.9(i) der Vorlesung ist Δ als Kammernsystem zusammenhängend. Nach einer Bemerkung in 3.5 ist also auch der Graph Γ_Δ zusammenhängend. #

Alternativ kann (i) mithilfe von ***(G₂)*** überprüft werden.

zu *(ii)*: Aufgrund der Definition der Kanten in Γ_Δ gilt für zwei benachbarte Ecken $[x]_{i_1}$ und $[y]_{i_2}$, dass $i_1 \neq i_2$ gilt. Das heißt die Ecken in Γ_Δ lassen sich wie bei einem bipartiten Graphen mit den Farben i und j färben, sodass benachbarte Ecken nie die gleiche Farbe haben.

Angenommen, der Graph Γ_Δ enthält einen Kreis. Dann hat dieser Kreis aufgrund der Definition des Graphen eine Länge $m \geq 3$, denn Kreise der Länge 1 sind Schleifen und Kreise der Länge 2 sind doppelte Kanten also nach unserer Definition von Graphen verboten.

Betrachten wir nun zwei benachbarte Kanten $e_1, e_2 \in \Delta$, die im Kreis der Länge m enthalten sind. Dann gilt *oBdA*:
$\delta(e_1, e_2) = i$ ist ein reduziertes Wort der Länge 1.
Weiter gilt bei Betrachtung in der entgegengesetzten Kreisrichtung: $\delta(e_1, e_2) = w$ ist ein reduziertes Wort (da die Ecken abwechselnd mit i und j besetzt sind) mit einer Länge größer gleich 2.

Dies steht im Widerspruch zur eindeutigen Wortlänge in D_∞.

Folglich war die Annahme falsch, sodass Γ_Δ keinen Kreis enthält. #.

zu (*iii*): Sei $[x]_i$ ein beliebige Ecke vom Typ i. Wegen $\boldsymbol{(G_1)}$ existiert ein $y \in [x]_i$ mit $x \neq y$. Es gilt ebenfalls nach $\boldsymbol{(G_1)}$: $\delta(x,y) \in \{1, i\}$ und wegen $x \neq y$: $\delta(x,y) \neq 1$. Also folgt: $\delta(x,y) = i$. Dies impliziert $x \not\sim_j y$ und somit $[x]_j \neq [y]_j$.

Wir erhalten: $[x]_i \cap [y]_j \neq \emptyset$, da $y \in [x]_i$ gemäß der Wahl von y und $y \in [y]_j$ und
$[x]_i \cap [x]_j \neq \emptyset$, da $x \in [x]_i$ und $x \in [x]_j$.

Weiter gilt: $[x]_i \neq [y]_j$, da $x \in [x]_i$ aber $x \notin [y]_j$ und
$[x]_i \neq [x]_j$, da $y \in [x]_i$ aber $y \notin [x]_j$.

Insgesamt folgt: $\{[x]_i, [y]_j\}, \{[x]_i, [x]_j\} \in E$. Also gilt wegen $[x]_j \neq [y]_j$, dass $\#V_{[x]_i} \geq 2$.

Analoges kann auch für eine beliebige Ecke $[x]_j$ vom Typ j gezeigt werden. #

Insgesamt ist Γ_Δ also ein Baum ohne Blätter. $\square$

Bemerkung: Es gilt sogar: Ein Gebäude Δ ist genau dann vom Typ $\tilde{A}_1$, wenn Γ_Δ ein Baum ohne Blätter ist.