Übungen zur Vorlesung "Gebäude"

Lösungvorschlag zu Blatt 7

Aufgabe 7.1
Sei $D_3 =< i, j \mid i^2, j^2, (ij)^3 >$ die Diedergruppe der Ordnung 6 und $I = \{i, j\}$.

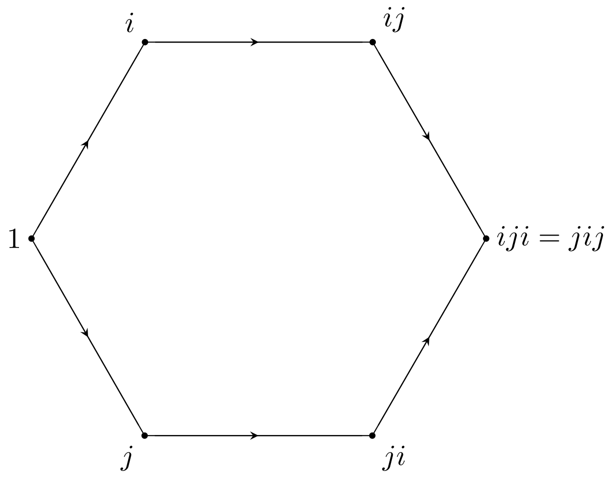
a) Zeichnen Sie den Cayleygraphen $Cay(D_3, I)$.

b) Betrachten Sie die natürliche Wirkung via Linksmultiplikation

$$\psi : D_3 \to Aut(Cay(D_3, I)).$$

Für $i \in I$ bezeichnen wir mit $Fix(\psi(i))$ die Mittelpunkte der Kanten von $Cay(D_3, I)$ die unter $\psi(i)$ geflippt werden. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $Cay(D_3, I) - Fix(\psi(i))$ gleich 2 ist und diese via $\psi(i)$ aufeinander abgebildet werden.

Beweis: a) Der Cayleygraph $Cay(D_3, I)$ besteht aus den Ecken, die die Elemente von D_3 sind und den Kanten $\{g, h\}$, wobei $g = h * s$ für $s \in I$ gilt. Damit sieht der Cayleygraph wie folgt aus:



b) $\psi(i)$ beschreibt die Linksmultiplikation mit i. Daher werden die Ecken unter $\psi(i)$ wie folgt abgebildet:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto i & i &\mapsto i^2 = 1 \\ ji &\mapsto iji & iji &\mapsto i^2ji = ji \\ ij &\mapsto j & j &\mapsto ij. \end{aligned}$$

Damit ist $\psi(i)$ die Spiegelung an der Achse durch die Mittelpunkte der Kanten $\{1, i\}$ und $\{ji, iji\}$. Also sind $\{1, i\}$ und $\{ji, iji\}$ die Kanten die geflippt werden und $Cay(D_3, I) - Fix(\psi(i))$ hat genau zwei Zusammenhangskomponenten, die aufeinander abgebildet werden.

Für $\psi(j)$ folgt analog, dass es die Spiegelung an der Achse durch die Mittelpunkte der Kanten $\{1, j\}$ und $\{ij, iji\}$ ist. Also werden wieder die Kanten $\{1, j\}$ und $\{ij, iji\}$ geflippt und $Cay(D_3, I) - Fix(\psi(j))$ hat auch genau zwei Zusammenhangskomponenten, die aufeinander abgebildet werden. $\square$

Aufgabe 7.2
Sei W eine endliche Coxetergruppe. Zeigen Sie, dass die Menge

$$A := \{w \in W \mid l(v) \leq l(w) \text{ für alle } v \in W\}$$

einelementig ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(i) Sei $w \in W$ beliebig. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
  a) $w(b_i)$ ist eine positive Wurzel für alle $i = 1, \dots, n$
  b) $w = 1$

(ii) Für $w \in W$ definieren wir

$$N(w) := \{\alpha \in \tilde{\Phi}^+ \mid w(\alpha) \in \tilde{\Phi}^-\}.$$

Zeigen Sie, dass für $w \in A$ gilt: $N(w) = \tilde{\Phi}^+$.

(iii) Zeigen Sie, dass $w \in A$ eine Involution ist.

(iv) Seien nun $v, w \in A$. Zeigen Sie, dass $v = w$ gilt.

Beweis: (i) Zu zeigen: *a)* $\Leftrightarrow$ *b)*

a) $\Rightarrow$ *b)*: Sei $w \in W, w \neq 1$. Seien $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ mit $w = i_1 \dots i_k$ und $l(w) = k$. Dann gilt $l(wi_k) = l(i_1 \dots i_{k-1}) \leq k - 1$ und damit nach Aufgabe 4.1d $l(wi_{k-1}) = l(w) - 1 = k - 1$. Aus Theorem 2.52 folgt dann $w(b_{i_k}) < 0$. Da Wurzeln entweder positiv oder negativ sind, folgt dann, dass $w(b_{i_k})$ keine positive Wurzel sein kann. Also muss schon $w = 1$ gelten.

b) $\Rightarrow$ *a)*: Für $w = 1$ gilt $w(b_i) = b_i$ für alle $i \in \{i, \dots, n\}$ und b_i ist für alle i eine positive Wurzel.

(ii) Sei $w \in A$ beliebig. Es ist klar, dass $N(w) \subseteq \tilde{\Phi}^+$ gilt.

Sei nun $\alpha \in \tilde{\Phi}^+$ beliebig. Schreibe $\alpha = \sum_{i=1}^n c_i b_i$ und $c_i \geq 0$ für alle i. Da $w \in A$ gilt für $i \in \{1, \dots, n\}$, dass $l(wi) \leq l(w)$ und damit schon nach Aufgabe 4.1d $l(wi) = l(w) - 1$. Aus Theorem 2.52 folgt dann wieder $w(b_i) < 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und damit

$$w(\alpha) = \sum_{i=1}^n \underbrace{c_i}_{\geq 0} \underbrace{w(b_i)}_{<0} < 0 \Rightarrow w(\alpha) \in \tilde{\Phi}^-.$$

Also gilt für alle $w \in A$, dass gilt $N(w) = \tilde{\Phi}^+$ und damit gilt auch

$$w(\tilde{\Phi}^+) = \tilde{\Phi}^- \text{ und } w(\tilde{\Phi}^-) = \tilde{\Phi}^+.$$

(iii) Sei $w \in A$ beliebig. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Da b_i eine positive Wurzel ist, folgt mit (ii) das gilt $w(b_i) \in \tilde{\Phi}^-$. Dann folgt

$$w^2(b_i) = w(\underbrace{w(b_i)}_{\in \tilde{\Phi}^-}) \in \tilde{\Phi}^+.$$

Da dies für alle i gilt, folgt mit (i) schon $w^2 = 1$.

(iv) Seien $v, w \in A$. Es gilt $v^2 = w^2 = 1$ nach (iii) und damit auch $v^{-1} = v$. Desweitern gilt dann mit (iii) für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$(v^{-1}w)(b_i) = v(\underbrace{w(b_i)}_{\in \tilde{\Phi}^-}) \in \tilde{\Phi}^+.$$

Mit (i) folgt dann wieder $v^{-1}w = 1 \Leftrightarrow v = w$.

Also ist A einelementig und maximale Elemente in endlichen Coxetergrupppen sind eindeutig. □

Aufgabe 7.3

Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $W = D_m =< i, j \mid i^2, j^2, (ij)^m >$ die Diedergruppe der Ordnung $2m$ und $I = \{i, j\}$. Sei weiter $\Phi : W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W und B die in der Vorlesung definierte Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^I$. Zeige:

a) Es gilt $l_I(w) \leq m$ für alle $w \in W$.

b) Endet desweiteren jede reduzierte Darstellung von $w \in W$ nicht mit i, so gilt $l_I(w) \leq m - 1$ und $w(b_i) > 0$, d.h. $w(b_i)$ ist eine positive Wurzel.

Beweis: a) Sei $w \in W$ beliebig. Dann ist w von der Form $(ij)^n, (ji)^n, i(ij)^n$ oder $i(ji)^n$ für $n \in \mathbb{N}, n \leq m$.

1. Fall: $w = (ij)^n$

$$\begin{aligned}
n \leq \frac{m}{2} &\Rightarrow l(w) \leq l((ij)^n) = 2n \leq m \\
n > \frac{m}{2} &\Rightarrow w = (ji)^{m-n} \qquad\qquad (\text{da } 1 = (ij)^{m-n}w) \\
&\Rightarrow l(w) \leq l((ji)^{m-n}) = 2m - 2n \leq m
\end{aligned}$$

2. Fall: $w = (ji)^n$

$$\begin{aligned}
n \leq \frac{m}{2} &\Rightarrow l(w) \leq l((ji)^n) = 2n \leq m \\
n > \frac{m}{2} &\Rightarrow w = (ij)^{m-n} \\
&\Rightarrow l(w) \leq l((ij)^{m-n}) = 2m - 2n \leq m
\end{aligned}$$

3. Fall: $w = i(ij)^n$

$$\begin{aligned}
n \leq \frac{m-1}{2} &\Rightarrow l(w) \leq l(i(ij)^n) = 2n + 1 \leq m \\
n > \frac{m-1}{2} &\Rightarrow w = i(ji)^{m-n} \qquad\qquad (\text{da } 1 = w(ij)^{m-n}i\ )
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow l(w) \leq l(i(ji)^{m-n}) = 2m - 2n + 1 \leq 2m - m - 1 + 1 = m$$

<u>4. Fall:</u> $w = i(ji)^n$

$$\begin{aligned} n \leq \frac{m-1}{2} &\Rightarrow l(w) \leq l(i(ji)^n) = 2n + 1 \leq m \\ n > \frac{m-1}{2} &\Rightarrow w = i(ij)^{m-n} \\ &\Rightarrow l(w) \leq l(i(ij)^{m-n}) = 2m - 2n + 1 \leq m \end{aligned}$$

Also gilt $l(w) \leq m$ für alle $w \in W$.

b) Dazu zeigen wir zuerst mit Induktion nach k, dass gilt:

$$(\sigma_i\sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i + \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_j.$$

<u>Induktionsanfang</u>: $k = 1$
Mit der Identität $2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 = \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_i\sigma_j(b_i) &= \sigma_i\left(b_i - 2B(b_i, b_j)b_j\right) \\ &= \sigma_i(b_i) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sigma_i(b_i) \\ &= -b_i + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_j + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2\, b_i \\ &= \left(4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - 1\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_j \\ &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 + \cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right)\, b_i + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_j \\ &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\left(\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}_{=\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}\right)\, b_i + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_j \\ &= \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_j \\ &= \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i + \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_j \end{aligned}$$

<u>Induktionsschritt</u>: $k \mapsto k + 1$

$$\begin{aligned} (\sigma_i\sigma_j)^{k+1}(b_i) &\overset{IV}{=} \sigma_i\sigma_j\left(\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i + \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_j\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\left(-b_i + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\left(b_j + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_i\right)\right) \\ &\qquad - \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\left(b_j + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\, b_i\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) - 2\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i \\
&\qquad + \frac{2\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_j \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2k+3)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_i + \frac{\sin\left(\frac{(2k+2)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\, b_j
\end{aligned}
$$

Wobei die letzte Gleichheit gilt wegen:

$$
\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{(2k+3)\pi}{m}\right) \\
&= \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)}_{2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - 1} + \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \\
&= 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}_{2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \left[\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right] \\
&\qquad + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)\right] \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + \cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right] \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\left[2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right] \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad - 2\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \underbrace{\left[\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2\right]}_{1-2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\qquad + 4\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^3 - 2\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \left[\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right] \\
&\qquad - 2\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \\
&= -\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) + 4\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) - 2\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)
\end{aligned}
$$

Und aufgrund der Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\left[\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\right] - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\underbrace{\left[2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)^2 - 1\right]}_{=\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)} + \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}_{=\sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)}\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = \sin\left(\frac{(2k+2)\pi}{m}\right)
\end{aligned}
$$

Nun zeigen wir, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$
\sigma_i(\sigma_i\sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_j.
$$

Dafür benötigen wir noch folgende Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right) \\
&\quad = 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = \sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\cos\left(\frac{2k\pi}{m}\right) \\
&\quad = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)
\end{aligned}
$$

Damit folgt nun die gewünschte Gleichheit:

$$
\begin{aligned}
\sigma_i(\sigma_i\sigma_j)^k(b_i) &= \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ \sigma_i(b_i) + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ \sigma_i(b_j) \\
&= -\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ \left(b_j + 2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\ b_i\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_j \\
&= \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_j
\end{aligned}
$$

Desweiteren gilt

$$\frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \geq 0$$

für $k \leq \frac{m}{2}$ und ebenso für $1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$

$$\frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\sin\left(\frac{2k\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)} \geq 0.$$

Sei nun $w \in W$ beliebig. Endet jede reduzierte Darstellung von w nun nicht auf i, so gilt entweder $w = (ij)^k$ für $k \leq \frac{m}{2}$ oder $w = i(ij)^k$ für $1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$, denn sonst gäbe es, wie in a), eine kürzere Darstellung von w die auf i endet.

Im ersten Fall gilt dann

$$w(b_i) = \Phi(w)(b_i) = (\sigma_i\sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_j.$$

Und im zweiten Fall

$$w(b_i) = \Phi(w)(b_i) = \sigma_i(\sigma_i\sigma_j)^k(b_i) = \frac{\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_i + \frac{\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}\ b_j.$$

Damit ist $w(b_i)$ eine positive Wurzel.

Nach Aufgabenteil a) folgt $l(wi) \leq m$, da $wi \in W$ und aus Theorem 2.52(i) folgt $l(wi) \leq l(w) + 1$. Also gilt

$$l(w) = l(wi) - 1 \leq m - 1. \qquad \square$$