Musterlösung zu Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1:

Behauptung:
Die Isometriegruppe eines regelmäßigen n-Ecks ist isomorph zu der Diedergruppe D_n.
Beweis:
Wir betten das regelmäßige n-Eck P_n durch die Abbildung, $\{1, ..., n\} \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, mit $k \mapsto e^{\frac{2(k-1)\pi_i}{n}}$, in die Ebene ein.

Sei λ die Abbildung :
$\lambda : j \mapsto$ Spiegelung an der x-Achse
$\lambda : i \mapsto$ Spiegelung an der Seitenhalbierenden der Seite 1-2.
Der Winkel zu den Spiegelungsachsen beträgt dann $\frac{\pi}{n}$, also ist $\lambda(i)\lambda(j)$ eine Drehung um $\frac{2\pi}{n}$. Also gilt $F(\lambda)(i^2) = F(\lambda)(j^2) = id$ und $F(\lambda)((ij)^n) = ((\lambda)(i)\lambda(j))^n = id$. So setzt sich λ fort zu einem Homomorphismus $\varphi : D_n \to Isom(P_n)$

Nun zu zeigen: φ ist ein Isomorphismus.
Injektiv:
$\varphi(D_n) \subset Isom(P_n)$ ist eine Gruppe, die von zwei verschiedenen Spiegelungen $\lambda(i), \lambda(j)$ erzeugt wird, wobei gilt $Ord(\lambda(i)\lambda(j)) = n$. Aus der Klassifikation der Diedergruppen folgt nun $\varphi(D_n) \cong D_n$. Also ist φ injektiv.
Surjektiv:
Jedes $\alpha \in Isom(P_n)$ ist eindeutig bestimmt durch das Bild der Ecken von P_n, also ist $Isom(P_n)$ endlich. P_n wirkt transitiv auf den Ecken. Also folgt aus der Bahnengleichung $\#Isom(P_n) = \#Stab(1) \cdot n$, da gilt $G_x \cong G/G_x$.
Sei nun $\alpha \in Stab(1)$. Da 2 zu 1 benachbart ist, gilt $\alpha(2) \in \{2, n\}$.
Falls $\alpha(2) = 2$ gilt, so folgt $\alpha(3) = 3$ und iterativ $\alpha(k) = k$, also $\alpha = id$.
Falls $\alpha(2) = n$.
Beh: dann ist $\alpha = \lambda(j)$
Bew:$\alpha^{-1}\lambda(j)(2) = 2$. Dann folgt $\alpha^{-1}\lambda(j) = id$, also $\alpha = \lambda(j)$
Also gilt $\#Stab(1) = 2$. Nun folgt $\#Isom(P_n) = 2n = \#D_n$.

□

Aufgabe 6.2:

Behauptung a): Die Coxetergruppe E_6 ist endlich.
Beweis: Die Coxetermatrix von E_6 ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gram-Matrix ist dann:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es reicht nun zu zeigen, dass alle Hauptminoren von A positiv sind: $det\left(1\right) = 1 > 0$

$$det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} > 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 0 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) - 1 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot det\left(...\right) - 0 \cdot det\left(...\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}) = \frac{5}{16} > 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot det\left(...\right) - 0 \cdot det\left(...\right) + 0 \cdot det\left(...\right)$$

$$= \frac{5}{16} + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + 0) = \frac{5}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{16} > 0$$

$$det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} - 0 \cdot det\left(...\right) + 0 \cdot det\left(...\right)$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 - \frac{1}{2} & \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot det\left(...\right) - 0 \cdot det\left(...\right)$$

$$= \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \cdot (\; det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot det \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix})$$

$$= \frac{3}{16} - \frac{1}{4} \cdot ((1 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{1}{8})) = \frac{3}{64} > 0$$

Mit Theorem 58 folgt nun, dass E_6 endlich ist.

□

Behauptung b):
Die Coxetergruppe H_3 ist endlich.
Beweis:
Die Coxetermatrix von H_3 ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gram-Matrix ist dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \\ 0 & -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) & 1 \end{pmatrix}$$

Nun reicht es wieder zu zeigen, dass die Hauptminoren der Gram-Matrix positiv sind.

$$det \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \\ 0 & -\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) & 1 \end{pmatrix} = 1 + (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})) \cdot 0 + 0 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})) -$$

$$(-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5}) \cdot (-\frac{1}{4}(1+\sqrt{5})) - (-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}) - 0 = \frac{3}{4} - (\frac{1}{16} \cdot (1 + 2 \cdot \sqrt{5} + 5)) = \frac{12}{16} - \frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{16} > 0$$

Mit Theorem 52 folgt, dass H_3 endlich ist.

□

Aufgabe 6.3

Sei W eine Coxetergruppe
Behauptung a):
W ist residuell endlich
Beweis:
Wir haben gesehen, dass für W=$< I >$ gilt:
$W \hookrightarrow GL_{\#I}(\mathbb{R})$
Also ist W eine Matrizengruppe über einem Körper. Außerdem ist W per Definition endlich erzeugt. Nun folgt mit dem Satz von Malcev (GGT2), dass W residuell endlich ist.
Behauptung b):
W hat ein Lösbares Wortproblem.
Beweis:
W ist endlich präsentierbar und residuell endlich, daraus folgt mit (GGT2) direkt, dass W ein lösbares Wortproblem hat.

□

Aufgabe 6.4

Sei (W, I) ein Coxetersystem, $\Phi : W \to GL(V)$ die geometrische Darsrellung von W und B die in der Vorlesung definierte Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^I$

Behauptung :

B ist W-invariant. *Beweis:*

Es reicht zu zeigen, dass gilt $B(\sigma_i(u), \sigma_i(v)) = B(u, v)$ für beliebige $i \in I$ $u, v \in W$,
da für $w = (i_1, ..., i_n)$ gilt $w(u) = i_1(i_2(...i_n(u)..))$

$B(\sigma_i(u), \sigma_i(v)) = B(u - 2B(b_i, u) + b_i, v - 2B(b_i, v) \cdot b_i)$

$\overset{\text{(Bilin.)}}{=} B(u, v - 2B(b_i, v) \cdot b_i) - B(2B(b_i, u), v - 2B(b_i, v) \cdot b_i)$

$\overset{\text{(Bilin.)}}{=} B(u, v) - B(u, 2B(b_i, v) \cdot b_i) - B(2B(b_i, u) \cdot b_i, v) + B(2B(b_i, u) \cdot b_i, 2B(b_i, v) \cdot b_i)$

$\overset{\text{(Bilin.)}}{=} B(u, v) - 2B(b_i, v) \cdot B(u, b_i) - 2B(b_i, u) \cdot B(b_i, v) + 2 \cdot B(b_i, u) \cdot 2 \cdot B(b_i, v) \cdot B(b_i, b_i)$

$= B(u, v) + 2 \cdot B(b_i, v) \cdot (-B(u, b_i) - B(b_i, u) + 2 \cdot B(b_i, u))$

$= B(u, v) + 2 \cdot B(b_i, v) \cdot (B(b_i, u) - B(u, b_i)) = B(u, v)$ $\square$