# Gebäude - Blatt 5

## Aufgabe 1

(a) **Beh:** $\tilde{\Phi}_{D_3} = \{\pm b_i, \pm b_j, \pm(b_i + b_j)\}$
**Bew:** Wir wissen $D_3 = \{1, i, j, ij, ji, jij\}$ und es gilt

$$\sigma_i(b_i) = -b_i$$
$$\sigma_i(b_j) = b_j + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) b_i = b_i + b_j.$$

Bezüglich der Basis $(b_i, b_j)$ erhalten wir

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow -b_i, b_i + b_j \in \tilde{\Phi}$$

und analog

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow -b_j, b_i + b_j \in \tilde{\Phi}.$$

Weiter erhalten wir

$$\Phi(ij) = \sigma_i\sigma_j = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow b_j, -(b_i + b_j) \in \tilde{\Phi}$$
$$\Phi(ji) = \sigma_j\sigma_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -(b_i + b_j), b_i \in \tilde{\Phi}$$

und zuletzt noch

$$\Phi(jij) = (\sigma_j\sigma_i)\sigma_j = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow -b_i, -b_j \in \tilde{\Phi}.$$

(b) **Beh:** $\tilde{\Phi}_{D_\infty} = \{kb_i + lb_j \mid k, l \in \mathbb{Z}, |k - l| = 1\}$
**Bew:** Wegen $m_{ij} = \infty$ gilt

$$\sigma_i(b_i) = -b_i$$
$$\sigma_i(b_j) = b_j - 2(-1)b_i = 2b_i + b_j.$$

und somit

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und analog

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen nun induktiv, dass gilt:

$$(\sigma_i\sigma_j)^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -(2n-1) \end{pmatrix}$$

Für $n = 1$ gilt
$$\sigma_i\sigma_j = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$
und induktiv erhalten wir somit wie gewünscht
$$\begin{aligned}(\sigma_i\sigma_j)^{n+1} &= (\sigma_i\sigma_j)(\sigma_i\sigma_j)^n \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -(2n-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2n+3 & -2n-2 \\ 2n+2 & -2n-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2(n+1)+1 & -2(n+1) \\ 2(n+1) & -(2(n+1)-1) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$
Da sich $D_\infty = \langle i \rangle * \langle j \rangle$ als freies Produkt schreiben lässt, hat jedes $w \in D_\infty$ die Form
$$w = j^\epsilon (ij)^n i^\delta$$
für gewisse $\epsilon, \delta \in \{0, 1\}$ und $n \in \mathbb{N}$ ($i, j$ sind Involutionen). Nun gilt
$$\Phi((ij)^n) = (\sigma_i\sigma_j)^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & -2n \\ 2n & -(2n-1) \end{pmatrix}$$
Damit erhalten wir
$$\begin{aligned}(2n+1)b_i + 2nb_j &\in \tilde{\Phi} \\ (-2n)b_i - (2n-1)b_j &\in \tilde{\Phi}.\end{aligned}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$. Berechnet man nun $\Phi(j(ij)^n) = \sigma_j(\sigma_i\sigma_j)^n$ sowie $\Phi((ij)^n i) = (\sigma_i\sigma_j)^n\sigma_i$ erhält man noch
$$\begin{aligned}(2n+1)b_i + (2n+2)b_j &\in \tilde{\Phi} \\ (-2n)b_i + (-2n-1)b_j &\in \tilde{\Phi}.\end{aligned}$$
sowie
$$\begin{aligned}(-2n-1)b_i + (-2n)b_j &\in \tilde{\Phi} \\ (-2n+1)b_i + (-2n+2)b_j &\in \tilde{\Phi}.\end{aligned}$$
und damit insgesamt genau die gewünschten Linearkombinationen.

## Aufgabe 2

(a) Betrachte das kompakte (und damit abgeschlossene) aber nicht diskrete Intervall $X = Y = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

(b) Betrachte das kompakte Intervall $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ und den offensichtlich diskreten Teilraum
$$Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 1}\}$$
der wegen $Y \ni \frac{1}{n} \to 0 \notin Y$ nicht abgeschlossen ist.

## Aufgabe 3

Wir betrachten

$$G = \{g \in Sym[-n,n] \mid \forall i = 1,..,n : g(i) = -g(i)\}$$

und $\sigma, s_i \in G$ mit $\sigma(1) = -1, \sigma(k) = k \geq 2$ und $s_i = (i, i+1)$.

(a) **Beh:** $G = \langle \sigma, s_1, ..., s_{n-1} \rangle$
**Bew:** Zunächst betrachten wir $\sigma_i \in G$ mit $\sigma_i(i) = -i$ und $\sigma_i(k) = k$ für $k \neq i$. Damit gilt insbesondere $\sigma_1 = \sigma$ und wir erhalten für alle $i = 1, ..., n$:

$$\sigma_i = (s_{i-1}...s_1)^{-1}\sigma(s_{i-1}...s_1) \in \langle \sigma, s_1, ..., s_{n-1} \rangle$$

Für beliebiges $g \in G$ betrachten wir nun $\tau, \tau_k \in G$ mit

$$\tau_k = \begin{cases} id, & g(k) > 0 \\ \sigma_k, & g(k) < 0 \end{cases}$$

und

$$\tau := \tau_1...\tau_k \in \langle \sigma_1, ..., \sigma_n \rangle \subseteq \langle \sigma, s_1, ..., s_{n-1} \rangle.$$

(Dies ist nur eine technische Art um $\tau(g(n)) = |g(n)|$ zu schreiben). Damit erhalten wir nun formal

$$\tau \circ g|_{\{1,...,n\}} \in Sym(n)$$

und nach Blatt 1 gibt es somit $i_1, ..., i_m \in \{1, ..., n-1\}$ mit

$$\tau \circ g|_{\{1,...,n\}} = s_{i_1}|_{\{1,...,n\}}...s_{i_m}|_{\{1,...,n\}} = (s_{i_1}...s_{i_m})|_{\{1,...,n\}}$$

und nach Konstruktion von $\tau$ gilt somit

$$g = \tau s_{i_1}...s_{i_m} \in \langle \sigma_1, ..., \sigma_n \rangle \cdot \langle s_1, ..., s_{n-1} \rangle \subseteq \langle \sigma, s_1, ..., s_{n-1} \rangle.$$

(b) **Beh:** $G \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes Sym(n)$
**Bew:** Für die beiden Untergruppen

$$\begin{aligned} N &= \{g \in G \mid \forall k = 1, ..., n : g(k) \in \{\pm k\}\} = \langle \sigma_1, ..., \sigma_n \rangle \\ E &= \{g \in G \mid \forall k = 1, ..., n : g(k) \in \{1, ..., n\} = \langle s_1, ..., s_{n-1} \rangle \end{aligned}$$

gilt offensichtlich $N \cap E = \{1\}$ und in der letzten Zeile von (a) haben wir gesehen $G = NE$. Weiter liegt $N$ wegen

$$\pi \sigma_i \pi^{-1} = \sigma_{\pi(i)}$$

für alle $\pi \in Sym(n)$ normal in $G$. Damit erhalten wir

$$G \cong N \rtimes E \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes Sym(n).$$

(Die Wirkung von $Sym(n)$ auf $Aut(\mathbb{Z}_2^n)$ ist hier die Permutation der Standard-Basisvektoren)

## Aufgabe $*$

**Beh:** Die Gruppe $G$ der Permutationen mit Vorzeichen aus Aufgabe 3 ist isomorph zu der Coxetergruppe von Typ $C_n$.
**Bew:** Sei $W$ die Coxetergruppe von Typ $C_n$. Aus dem Coxeterdiagramm ergibt sich die folgende Präsentierung:

$$W = \langle \tau, i_1, \ldots, i_{n-1} \mid \tau^2, i_j^2, (\tau i_1)^4, (\tau i_j)^2 \text{ für } j \geq 2, (i_j i_{j+1})^3, (i_j i_k)^2 \text{ für } |j-k| \geq 2 \rangle$$

Nach Aufgabe 3b) gilt $G \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes Sym(n)$, wobei $Sym(n)$ durch Permutation der Einträge wirkt. Ist also $\sigma_k \in \mathbb{Z}_2^n$ der $k$-te Standardvektor, so gilt $s_j \sigma_k s_j = \sigma_{s_j(k)}$ für $s_j = (j, j+1) \in Sym(n)$. Aus der Vorlesung kennen wir die folgenden Präsentierungen:

$$\mathbb{Z}_2^n \cong \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \mid \sigma_j^2, [\sigma_j, \sigma_k] \text{ für alle } 1 \leq j, k \leq n \rangle$$
$$Sym(n) \cong \langle s_1, \ldots, s_{n-1} \mid s_j^2, (s_j s_{j+1})^3, (s_j s_k)^2 \text{ für } |j-k| \geq 2 \rangle$$

Nach Aufgabe 4.2 hat $G \cong \mathbb{Z}_2^n \rtimes Sym(n)$ die Präsentierung $G = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n, s_1, \ldots, s_{n-1} \mid R \rangle$, wobei die Relationen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} R = \{ &\sigma_j^2, \sigma_k^2, [\sigma_j, \sigma_k] \text{ für alle } 1 \leq j, k \leq n, (s_j s_{j+1})^3, (s_j s_k)^2 \text{ für } |j-k| \geq 2, \\ &s_j \sigma_k s_j \sigma_{s_j(k)} \text{ für alle } 1 \leq j \leq n-1, 1 \leq k \leq n \}. \end{aligned}$$

Um $G \cong W$ zu zeigen, konstruieren wir Isomorphismen in beide Richtungen.
Betrachte die Abbildung $\lambda$ gegeben durch $\lambda(i_j) = s_j$ und $\lambda(\tau) = \sigma_1$.
Sei $F(\lambda) : F(\tau, i_1, \ldots, i_{n-1}) \to G$ der induzierte Gruppenhomomorphismus auf der freien Gruppe. Zu zeigen: $F(\lambda)$ erhält alle Relationen von $W$. Es genügt zu zeigen, dass $F(\lambda)((\tau i_j)^2) = 1$ für $j \geq 2$ und $F(\lambda)((\tau i_1)^4 = 1$ gilt, da die restlichen Relationen offensichtlich erhalten werden. Sei $j \geq 2$. Dann ist $s_j(1) = 1$ und es gilt:

$$\begin{aligned} F(\lambda)((\tau i_j)^2) &= (\lambda(\tau)\lambda(i_j))^2 = (\sigma_1 s_j)^2 \\ &= \sigma_1 s_j \sigma_1 s_j = \sigma_1 \sigma_{s_j(1)} = \sigma_1 \sigma_1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda)((\tau i_1)^4) &= (\lambda(\tau)\lambda(i_1))^4 = (\sigma_1 s_1)^4 = (\sigma_1 s_1 \sigma_1 s_1)^2 \\ &= (\sigma_1 \sigma_{s_1(1)})^2 = (\sigma_1 \sigma_2)^2 = \sigma_1^2 \sigma_2^2 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

$F(\lambda)$ respektiert somit die Relationen von $W$ und nach der universellen Eigenschaft von Präsentierungen existiert ein Gruppenhomomorphismus $\varphi : W \to G$ mit $\varphi \circ \pi_W = F(\lambda)$, wobei $\pi_W : F(\tau, i_1, \ldots, i_{n-1}) \to W$ die kanonische Projektion ist.
Umgekehrt definieren wir eine Abbildung $\mu$ durch $\mu(s_j) = i_j$ und $\mu(\sigma_k) = i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1}$.
Sei $F(\mu) : F(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, s_1, \ldots, s_{n-1}) \to W$ der induzierte Gruppenhomomorphismus auf der freien Gruppe.
Zu zeigen: $F(\mu)$ erhält die Relationen $R$ von $G$. Es ist ausreichend zu beweisen, dass $F(\mu)$ die Ausdrücke der Form $s_j \sigma_k s_j \sigma_{s_j(k)}$ auf 1 und $\sigma_j, \sigma_k$ auf miteinander kommutierende Elemente abbildet.
Seien $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig. Gilt $k \notin \{j, j+1\}$, so ist $s_j(k) = k$ und es ist zu zeigen, dass $\mu(s_j)$ und $\mu(\sigma_k)$ miteinander kommutieren.
1. Fall: Sei $j \geq k+2$. Dann kommutiert $i_j = \mu(s_j)$ (nach Präsentierung von $W$) mit

den Elementen $\tau, i_1, \ldots, i_{j-1}$, also auch mit $i_{j-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{j-1} = \mu(\sigma_k)$.
2. Fall: Sei $j \leq k-2$. Wegen $(i_j i_{j+1})^3 = 1$ in $W$ gilt nun $i_j i_{j+1} i_j = i_{j+1} i_j i_{j+1}$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}
\mu(s_j) \cdot \mu(\sigma_k) &= i_j i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-1} \ldots i_{j+2} i_j i_{j+1} i_j i_{j-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-1} \ldots i_{j+2} i_{j+1} i_j i_{j+1} i_{j-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{j+1} i_j i_{j+1} i_{j+2} \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_j i_{j+1} i_j i_{j+2} \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} i_j = \mu(\sigma_k) \cdot \mu(s_j)
\end{aligned}$$

3. Fall: Sei $j = k-1$. Dann gilt $s_j(k) = s_{k-1}(k) = k-1$. Wegen $i_{k-1}^2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(s_{k-1}) \cdot \mu(\sigma_k) &= i_{k-1} i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} \\
&= i_{k-2} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-2} i_{k-1} = \mu(\sigma_{k-1}) \cdot \mu(s_{k-1})
\end{aligned}$$

Dies impliziert $F(\mu)(s_j \sigma_k s_j \sigma_{s_j(k)}) = F(\mu)(s_{k-1} \sigma_k s_{k-1} \sigma_{k-1}) = 1$.
4. Fall: Sei $j = k$. Dann gilt $s_j(k) = s_k(k) = k+1$. Mit $i_k^2 = 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\mu(s_k) \cdot \mu(\sigma_k) &= i_k i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} \\
&= i_k i_{k-1} \ldots i_1 \tau i_1 \ldots i_{k-1} i_k i_k = \mu(\sigma_{k+1}) \cdot \mu(s_k)
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich $F(\mu)(s_j \sigma_k s_j \sigma_{s_j(k)}) = F(\mu)(s_k \sigma_k s_k \sigma_{k+1}) = 1$.
Insgesamt haben wir in jedem Fall $F(\mu)(s_j \sigma_k s_j \sigma_{s_j(k)}) = 1$.

Seien nun $j, k \in \{1, \dots, k\}$ mit $j \neq k$ beliebig. OBdA sei $j < k$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mu(\sigma_k) \cdot \mu(\sigma_j) = i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{k-1} i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} \\
=& i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_j i_{j-1} i_j i_{j-2} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{k-1} \dots i_j i_{j-1} i_j \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_{j-1} i_{j-2} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{k-1} \dots i_{j-1} i_j i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-1} i_{j-2} i_{j-1} i_{j-3} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} i_{k-1} \dots i_{j-1} i_{j-2} i_{j-1} i_{j-3} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-2} i_{j-3} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-1} i_{j-2} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} i_{k-1} \dots i_j i_{j-2} i_{j-1} i_{j-2} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-2} i_{j-3} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-1} i_{j-2} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} i_{j-2} i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-2} i_{j-3} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-3} i_{j-1} i_{j-2} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} = \dots \\
=& i_{j-1} \dots i_1 i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \tau i_2 i_1 i_3 i_2 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 i_{k-1} \dots i_2 \tau i_1 \tau i_1 i_2 i_1 i_3 i_2 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_{k-1} \dots i_1 \tau i_2 i_1 i_2 i_3 i_2 i_4 i_3 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_{k-1} \dots i_2 i_1 i_2 \tau i_1 i_2 i_3 i_2 i_4 i_3 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_{k-1} \dots i_3 i_1 i_2 i_1 \tau i_1 i_3 i_2 i_3 i_4 i_3 i_5 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 i_{k-1} \dots i_3 i_2 i_3 i_1 \tau i_1 i_2 i_4 i_3 i_4 i_5 i_4 i_6 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 i_{k-1} \dots i_4 i_2 i_3 i_2 i_1 \tau i_1 i_2 i_4 i_3 i_4 i_5 i_4 i_6 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 i_2 i_{k-1} \dots i_4 i_3 i_4 i_2 i_1 \tau i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_4 \dots i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} = \dots \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} i_j i_{j-1} i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_j i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_{k-1} \dots i_j i_{j-1} i_j i_{j-2} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-2} i_{k-1} \dots i_{j+1} i_{j-1} i_j i_{j-1} i_{j-2} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{k-1} \\
=& i_{j-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{j-1} i_{k-1} \dots i_1 \tau i_1 \dots i_{k-1} = \mu(\sigma_j) \cdot \mu(\sigma_k)
\end{aligned}$$

Somit kommutieren die Bilder $\mu(\sigma_j)$ und $\mu(\sigma_k)$ für alle $j, k$. Da $F(\mu)$ die Relationen von $G$ erhält, existiert ein induzierter Homomorphismus $\psi : G \to W$.
Man rechnet leicht nach, dass $\varphi$ und $\psi$ zueinander inverse Abbildungen sind. Folglich sind $\varphi$ und $\psi$ Gruppenisomorphismen und es gilt $G \cong W$.