3.Übungszettel zur Vorlesung Gebäude – Musterlösung

Aufgabe 3.1

Sei $D_m = \langle g, h \mid g^2, h^2, (gh)^m \rangle$.
Behauptung. g und h sind konjugiert $\Leftrightarrow$ $m < \infty$ und m ungerade.

Beweis. Zu $\Leftarrow$: Also $(gh)^m = 1$ und m ungerade. Es gilt:

$$(gh)^m = (gh)^{\frac{m-1}{2}} \cdot g \cdot (hg)^{\frac{m-1}{2}} \cdot h = 1$$

Wobei $\frac{m-1}{2} \in \mathbb{N}$ weil m nach Voraussetzung ungerade ist. Weiter gilt:

$$(gh)^{-1} = hg$$

Demnach:

$$((gh)^{\frac{m-1}{2}})^{-1} = (hg)^{\frac{m-1}{2}}$$

Wähle $a = (gh)^{\frac{m-1}{2}} \in D_m$.

$$a \cdot g \cdot a^{-1} \cdot h = 1 \Leftrightarrow a \cdot g \cdot a^{-1} = h$$

Also sind g und h konjugiert.

Zu $\Rightarrow$: Für diese Richtung haben wir zwei Beweisideen herausgefunden. Die etwas längere werde ich im Folgenden als Skizze ausführen.

Längere Lösung: Wir wissen: Wenn g und h konjugiert sind, dann gibt es ein $a \in D_m$, sodass $g = aha^{-1}$. Die Behauptung folgt dann nach einer Fallunterscheidung nach der Gestalt von a.

Kürzere Lösung: Durch Kontraposition. Wir werden also zeigen: Ist $m < \infty$ und gerade oder $m = \infty$, so sind g und h nicht konjugiert. Wobei der Fall $m = \infty$ klar ist. Deshalb betrachten wir im Folgenden $m < \infty$ und m ungerade. Wir wissen: Wenn g und h konjugiert sind und eines der beiden Elemente liegt im Kern eines Homomorphismus, so muss das andere auch im Kern diese Homomorphismus liegen. Wenn man also einen Homomorphismus findet, wo eines der beiden Elemente im Kern liegt und das andere nicht, so sind g und h nicht konjugiert. Wir definieren zuerst $G := D_m$ und:

$$\begin{aligned} \lambda : g &\mapsto -1 \in C_2 = \{\pm 1\} \\ h &\mapsto 1 \end{aligned}$$

Wir wollen die universelle Eigenschaft von Präsentierungen benutzen und betrachten deshalb nun $F(\lambda) : F(g,h) \to C_2$. Es ergibt sich:

$$F(\lambda)(g^2) = (-1)^2 = 1 = F(\lambda)(h^2)$$
$$F(\lambda)((gh)^m) = (F(\lambda)(gh))^m = (-1)^m = 1$$

Wobei $(-1)^m = 1$ gilt, da m gerade ist. Nun folgt aus er universellen Eigenschaft von Präsentierungen, dass ein $\varphi : G \to C_2$ existiert, sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F(g,h) \arrow[rr, "F(\lambda)"] \arrow[dr] & & C_2 \\ & G \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Nun gilt $g \notin \ker(\varphi)$ aber $h \in \ker(\varphi)$. Demnach sind g und h nicht konjugiert in G. $\square$

Aufgabe 3.2

Behauptung. $D_3 \times C_2 \cong D_6$

Beweis. Zur Wiederholung:

$$D_3 = \langle g, h \mid g^2, h^2, (gh)^3 \rangle$$
$$C_2 = \langle s \rangle \text{ mit } \operatorname{ord}(s) = 2$$

Schritt 1. Betrachte $\tilde{g} := (g, 1)$ und $\tilde{h} := (h, s)$. Dann:

$$(\tilde{g})^2 = (g,1)^2 = (g^2, 1) = (1,1)$$
$$(\tilde{h})^2 = (h,s)^2 = (h^2, s^2) = (1,1)$$

Also gilt: $\operatorname{ord}(\tilde{g}) = 2$ und $\operatorname{ord}(\tilde{h}) = 2$.

Schritt 2. Wir zeigen: $\operatorname{ord}(\tilde{g}\tilde{h}) = 6$. Für $k \in N$ gerade gilt:

$$(\tilde{g}\tilde{h})^k = ((gh)^k, (s)^k) = ((gh)^k, 1)$$

Und sonst gilt:

$$(\tilde{g}\tilde{h})^k = ((gh)^k, (s)^k) = ((gh)^k, s)$$

Wir wissen: $\operatorname{ord}(gh) = 3$ und $\operatorname{ord}(s) = 2$. Damit bei $(\tilde{g}\tilde{h})^k = ((gh)^k, (s)^k)$ die letzte Komponente 1 wird, muss k gerade sein. Damit die erste Komponente 1 wird, muss k ein Vielfaches von 3 sein, denn $\operatorname{ord}(gh) = 3$, (weil das ja eine unserer Relationen in D_m war). Die Ordnung von $(\tilde{g}\tilde{h})$ ist also die kleinste

Zahl, die gerade ist und ein Vielfaches von 3. Demnach muss die Ordnung von $(\tilde{g}\tilde{h})$ wie behauptet 6 sein.

Schritt 3. Wir zeigen: $\langle \tilde{g}\tilde{h} \rangle = D_3 \times C_2$.
Schau: $(\tilde{g}\tilde{h})^3 = (1, s)$. Und: $\tilde{h}(1, s) = (h, 1)$. Es folgt:

$$\langle \tilde{g}\tilde{h} \rangle = \langle g, h \rangle \times \langle s \rangle = D_3 \times C_2$$

Jetzt folgt schon aus unserer Klassifikation von Diedergruppen, dass die Behauptung $D_3 \times C_2 \cong D_6$ gilt. $\square$

Aufgabe 3.3

a) Sei $\mathrm{I} = \{i_1, \dots, i_n\}, W$ die Coxetergruppe mit Coxetersystem (W, I) und $\varepsilon : W \to \{-1, 1\}$ der durch $\varepsilon(i) = -1$ für alle $i \in \mathrm{I}$ definierte Homomorphismus. Außerdem sei $W^+ := \ker \varepsilon = \{w \in W \mid \varepsilon(w) = 1\}$.

Behauptung. $W^+ = \langle \{i_j i_n \mid 1 \leq j \leq n-1\} \rangle$

Beweis. Sei $w \in W$ beliebig. Zu zeigen ist $w \in \langle \{i_j i_n \mid 1 \leq j \leq n-1\} \rangle$. Wir wissen, dass sich jedes $w \in W$ als Wort mit Buchstaben aus I schreiben lässt. Also:

$$w = i_{s_1} \dots i_{s_m}$$

Wir wissen auch, dass w genau dann im Kern von ε liegt, wenn m gerade ist, weil ε ein Homomorphismus ist und dann gilt:

$$\varepsilon(w) = \varepsilon(i_{s_1} \dots i_{s_m}) = \varepsilon(i_{s_1}) \dots \varepsilon(i_{s_m}) = (-1)^m = 1$$

Also muss w, weil $w \in \ker(\varepsilon)$, eine gerade Anzahl an Buchstaben haben. Wir betrachten jetzt das w als Wort $i_{s_1} \dots i_{s_m}$ und fügen ein paar Einsen zwischendrin ein.

$$w = i_{s_1} \dots i_{s_m} = i_{s_1} 1 i_{s_2} \dots i_{s_{m-1}} 1 i_{s_m}$$

Da $(i_n)^2 = 1$ können wir die Einsen durch $i_n i_n$ ersetzen. Also:

$$w = i_{s_1} \dots i_{s_m} = i_{s_1} i_n i_n i_{s_2} \dots i_{s_{m-1}} i_n i_n i_{s_m}$$

Nun liegen $i_{s_1} i_n$ und $i_{s_3} i_n$ und ... und $i_{s_{m-1}} i_n$ offensichtlich in der Menge $\langle \{i_j i_n \mid 1 \leq j \leq n-1\} \rangle$. Aber auch $i_n i_{s_2}$ und $i_n i_{s_4}$ und ... und $i_n i_{s_m}$ liegen in dieser Menge, weil diese $i_n i_l$ (für $i_l \in \mathrm{I}$ und l gerade) die Inversen von $i_l i_n$ sind und damit auch im Erzeugnis enthalten. Nun wissen wir also, dass wir w aus Elementen aus $\langle \{i_j i_n \mid 1 \leq j \leq n-1\} \rangle$ schreiben können. Demnach liegt w in $\langle \{i_j i_n \mid 1 \leq j \leq n-1\} \rangle$, wie wir wollten. $\square$

b)

Behauptung. Sind alle Einträge m_{ij} für $i \neq j$ in der Coxetermatrix (W, I) gerade, so gilt $\#W \geq 2^n$.

Beweis. Wir wollen einen Epimorphismus von W nach G finden, wobei $\#G = 2^n$ sein soll. Als G wählen wir deshalb $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n = C_2 \times \cdots \times C_2$.

Sei $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$-te Zeile.

Setze $\lambda(i_j) = e_j$ und betrachte wieder $F(\lambda) : F(i_1, \dots, i_n) \to G$. Dann ist

$$F(\lambda)(i_j^2) = 2 \cdot e_j = 0$$
$$F(\lambda)((i_j i_k)^{m_{jk}}) = m_{jk}(e_j + e_k) = 0$$

wobei m_{jk} gerade war. Nun wissen wir also, dass $F(\lambda)$ die Relationen in W respektiert. Also können wir wieder die unvierselle Eigenschaft von Präsentierungen ausnutzen. Das heißt es existiert ein $\varphi : W \to (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ mit $\varphi \circ \pi = F(\lambda)$.

$$\begin{tikzcd} F(i_1, \dots, i_n) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ & W \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Also erzeugen $e_1, \dots, e_n$ die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ und φ ist surjektiv. Also haben wir einen Epimorphismus gefunden und $\#W \geq \#G = 2^n$. $\square$