2. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“
Lösung

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

Aufgabe 2.1

a) Zeige: Die in der Vorlesung definierte „Abstandsfunktion“ δ ist wohldefiniert, d.h. die Permutation π in Lemma 6 von Kapitel 1 ist unabhängig von der Wahl der Basis.

b) Sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen, $V = \mathbb{F}_3^3$ und $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V. Berechne den δ-Abstand $\delta(C, D)$ für die Kammern $C = \{U_1, U_2\}$ und $D = \{W_1, W_2\}$ mit $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle, U_2 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, W_1 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $W_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Lösung:

a) Sei $b_1, \ldots, b_{n+1}$ eine Basis von V mit $U_i = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle$ und $W_i = \langle b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(i)} \rangle$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
Wir zeigen nun, dass $\pi(i) = \min\{j \mid W_i \subseteq W_{i-1} + U_j\}$ gilt. Insbesondere hängt π also nicht von der Wahl der Basis $b_1, \ldots, b_{n+1}$ ab.
Sei $i \in \{1, \ldots n+1\}$ beliebig. Es gilt:

$$W_i = \langle b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(i)} \rangle = \langle b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(i-1)} \rangle + \langle b_{\pi(i)} \rangle = W_{i-1} + \langle b_{\pi(i)} \rangle$$

Damit erhalten wir folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} W_i \subseteq W_{i-1} + U_j &\Leftrightarrow b_{\pi(i)} \in W_{i-1} + U_j \\ &\Leftrightarrow b_{\pi(i)} \in U_j \\ &\Leftrightarrow \pi(i) \leq j \end{aligned}$$

Hieraus folgt $\pi(i) = \min\{j \mid W_i \subseteq W_{i-1} + U_j\}$ und π ist wohldefiniert.

b) Für die Basis $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $U_1 = \langle b_1 \rangle$, $U_2 = \langle b_1, b_2 \rangle, W_1 = \langle b_3 \rangle$ und $W_2 = \langle b_3, b_1 \rangle$. Nach Definition gilt also $\delta(C, D) = \pi$, wobei π der 3-Zykel mit $\pi(1) = 3, \pi(2) = 1$ und $\pi(3) = 2$ ist.

Aufgabe 2.2

Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei

$\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ die Menge der Kammern in $\Delta(V)$. Für $i \in \{1,\ldots,n\}$ sei $s_i = (i, i+1) \in \mathrm{Sym}(n+1)$.
Sei weiter $\delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to \mathrm{Sym}(n+1)$ die in der Vorlesung definierte $\mathrm{Sym}(n+1)$-wertige Abstandsfunktion auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$. Zeige:

i) Sind $C = \{U_1, \ldots, U_n\}$ und $C' = \{W_1, \ldots, W_n\}$ Kammern in $\Delta(V)$, so gilt:

$$\delta(C, C') = s_i \Leftrightarrow U_j = W_j \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\} \text{ und } U_i \neq W_i$$

ii) Für $C, C' \in \mathrm{cham}(\Delta(V))$ definiert

$$C \sim_{s_i} C' :\Leftrightarrow \delta(C, C') \in \{\mathrm{id}, s_i\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$.

iii) Sind $C, C' \in \mathrm{Cham}(\Delta(V))$ mit $\delta(C, C') = s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_m}$, so existieren Kammern $C_1, \ldots, C_{m-1} \in \mathrm{cham}(\Delta(V))$ mit

$$C \sim_{s_{i_1}} C_1 \sim \ldots \sim C_{m-1} \sim_{s_{i_m}} C'.$$

Lösung:

i) „$\Rightarrow$“ Nach Voraussetzung existiert eine Basis $b_1, \ldots, b_{n+1}$ von V mit $U_j = \langle b_1, \ldots, b_j \rangle$ und $W_i = \langle b_{s_i(1)}, \ldots, b_{s_i(j)} \rangle$ für alle $j = 1, \ldots, n$.
Damit gilt für alle $j < i$:

$$W_j = \langle b_{s_i(1)}, \ldots, b_{s_i(j)} \rangle = \langle b_1, \ldots, b_j \rangle = U_j$$

Desweiteren ist $W_i = \langle b_{s_i(1)}, \ldots, b_{s_i(i)} \rangle = \langle b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1} \rangle \neq U_i$.
Für $j \geq i+1$ gilt ferner:

$$W_j = \langle b_{s_i(1)}, \ldots, b_{s_i(j)} \rangle = \langle b_1, \ldots, b_{i+1}, b_i, \ldots, b_j \rangle = U_j$$

Insgesamt erhalten wir also $U_j = W_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ und $U_i \neq W_i$.
„$\Leftarrow$“ Sei $U_j = W_j$ für alle $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$ und $U_i \neq W_i$. Sei $b_1, \ldots, b_{n+1}$ eine Basis von V mit $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle = U_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Wegen $W_i \neq U_i$ existiert $b'_{i+1} \in W_i \backslash U_i$. Dann gilt $b'_{i+1} \in W_i \subseteq W_{i+1} = U_{i+1}$, also $b'_{i+1} \in U_{i+1} \backslash U_i$. Aus Dimensionsgründen folgt $\langle b_1, \ldots, b_i, b'_{i+1} \rangle = U_{i+1}$ und $\langle b_1, \ldots, b_{i-1}.b'_{i+1} \rangle = W_i$.
Ersetzen wir also b_{i+1} durch b'_{i+1}, erhalten wir eine Basis $b_1, \ldots, b_{n+1}$ von V mit $\langle b_1, \ldots, b_j \rangle = U_j$ und $\langle b_{s_i(1)}, \ldots, b_{s_i(j)} \rangle = W_j$ für $j = 1, \ldots, n$.
Daher gilt $\delta(C, C') = s_i$.

ii) Nach Definition ist $\delta(C, C') = \mathrm{id}$ genau dann, wenn $C = C'$. Nach *i)* gilt somit

$$C \sim_{s_i} C' \Leftrightarrow \delta(C, C') \in \{\mathrm{id}, s_i\} \Leftrightarrow U_j = W_j \text{ für alle } j \neq i.$$

An dieser Darstellung sieht man sofort, dass $\sim_{s_i}$ eine Äquivalenzrelation definiert.

iii) Setze $\pi = s_{i_1} \dots s_{i_m} \in \mathrm{Sym}(n+1)$. Sei $C = \{U_1, \dots, U_n\}$ und $C' = \{W_1, \dots, W_n\}$. Wegen $\delta(C, C') = \pi$ existiert eine Basis $b_1, \dots, b_{n+1}$ von V mit $U_i = \langle b_1, \dots, b_i \rangle$ und $W_i = \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(i)} \rangle$ für $i = 1, \dots, n$.

Setze $\pi_k = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ und $U_j^{(k)} = \langle b_{\pi_k(1)}, \dots, b_{\pi_k(j)} \rangle$ für $k = 0, \dots, m$. Dann definieren $C_k = \{U_1^{(k)}, \dots, U_n^{(k)}\}$ Kammern in $\Delta(V)$. Es gilt nach Konstruktion $C_0 = C$ und $C_m = C'$. Desweiteren rechnet man nach, dass für alle $j = 0, \dots, m-1$ gilt $C_j \sim_{s_{i_j}} C_{j+1}$.

Aufgabe 2.3

Seien E, N Gruppen und $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$ ein Gruppenhomomorphimus. Zeige:

a) Das semi-direkte Produkt $N \rtimes E$ ist eine Gruppe, die E als Untergruppe und N als Normalteiler enthält.

b) Ist G eine Gruppe mit Untergruppen E und N, sodass $N \trianglelefteq G$, $G = NE$ und $N \cap E = \{1\}$ gilt, so ist G isomorph zu einem semi-direkten Produkt $N \rtimes_\varphi E$ für einen geeigneten Homomorphismus $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N)$.

c) Sei G eine Diedergruppe, die von zwei Involutionen $g, h \in G$ erzeugt wird und $m := \mathrm{ord}(gh)$. Dann gilt:

$$G \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rtimes C_2 & \text{wenn } m < \infty \\ \mathbb{Z} \rtimes C_2 & \text{wenn } m = \infty \end{cases}$$

Lösungsskizze:

a) Man weist nach, dass die Verknüpfung assoziativ ist, $(1_N, 1_E)$ ein neutrales Element in $N \rtimes E$ ist und zu $(n, e) \in N \rtimes E$ das Element $(\varphi(e^{-1})(n^{-1}), e^{-1})$ ein inverses Element definiert. Es gilt $\{(n, e) \in N \rtimes E \mid e = 1\} \cong N$ und $\{(n, e) \in N \rtimes E \mid n = 1\} \cong E$. Zudem rechnet man leicht nach, dass N normal in $N \rtimes E$ ist.

b) Betrachte die Konjugationswirkung $\varphi : E \to \mathrm{Aut}(N), e \mapsto [n \mapsto ene^{-1}]$. Nun kann man nachprüfen, dass $\alpha : N \rtimes_\varphi E \to G, (n, e) \mapsto ne$ einen Gruppenisomorphismus definiert. (Wegen $G = NE$ ist α surjektiv. Die Bedingung $N \cap E = \{1\}$ impliziert, dass α injektiv ist.)

c) Es genügt die Eigenschaften aus b) nachzuweisen. Dies entspricht genau dem Beweis von Satz 7, i) in Kapitel 2 der Vorlesung.