10. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“
Lösung

SoSe 2017 Dr. Olga Varghese
WWU Münster Nils Leder

Aufgabe 10.1 (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ die Menge der Kammern in $\Delta(V)$. Sei weiter $\delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to \mathrm{Sym}(n+1)$ die in der Vorlesung definierte $\mathrm{Sym}(n+1)$-wertige Abstandsfunktion auf $\mathrm{cham}(\Delta(V))$. Durch $C \sim_{s_i} D :\Leftrightarrow \delta(C, D) \in \{\mathrm{id}, s_i = (i, i+1)\}$ wird $\mathrm{cham}(\Delta(V))$ ein Kammernsystem.
Zeige: Das Kammernsystem $(\mathrm{cham}(\Delta(V)), (\sim_{s_i})_{i\in\{1,\ldots,n\}})$ ist ein dickes Gebäude vom Typ A_n.

Lösung: Wir müssen zeigen, dass $\Delta(V)$ die Gebäudeaxiome (G1') und (G2) erfüllt und dick ist, d.h. dass jede Äquivalenzklasse $[C]_i$ mindestens 3 Kammern enthält.
Zu (G1') und „$\Delta(V)$ dick“: Nach Aufgabe 2.2 ii) ist $\sim_{s_i}$ eine Äquivalenzrelation. Zu zeigen: Für jedes $C \in \mathrm{cham}(\Delta(V)), i \in \{1, \ldots, n\}$ enthält $[C]_{s_i}$ mindestens drei Kammern. Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ fest und $C = \{V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n\}, \dim V_k = k$ eine beliebige Kammer. Setze zudem $V_0 = \{0\}$ und $V_{n+1} = V$. Nun ist V_{i+1}/V_{i-1} ein 2-dimensionaler K-Vektorraum. Wähle $x \in V_i \setminus V_{i-1}$ und $y \in V_{i+1} \setminus V_i$. Dann gilt auch $x + y \in V_{i+1} \setminus V_i$.
Definiere Kammern $C' = \{U'_1 \subseteq \ldots \subseteq U'_n\}$ und $C'' = \{U''_1 \subseteq \ldots \subseteq U''_n\}$ durch $U'_j = V_j = U''_j$ für $j \neq i$, $U'_i = V_{i-1} + \langle y\rangle$ und $U''_i = V_{i-1} + \langle x + y\rangle$. Wegen $y \notin V_i, x + y \notin V_i$ gilt offenbar $U'_i \neq V_i$ und $U''_i \neq V_i$, also $C \neq C'$ und $C \neq C''$. Nun gilt auch $C' \neq C''$. Per Widerspruch: Angenommen es wäre $U'_i = U''_i$, also inbesondere $x + y \in U'_i = V_{i-1} + \langle y\rangle$. Dann gäbe es $v \in V_{i-1}$ und $\alpha \in K$ mit $x + y = v + \alpha y$. Umstellen der Gleichung liefert $(\alpha - 1)y = x - v \in V_i$.
Aus $y \notin V_i$ folgt somit $\alpha = 1$ und $x = v \in V_{i-1}$ im Widerspruch zur Wahl von $x \in V_i \setminus V_{i-1}$. ↯
Nach Aufgabe 2.2 i) gilt nun $\delta(C, C') = \delta(C, C'') = \delta(C', C'') = s_i$. Nach Definition gilt $C \sim_{s_i} C'$ und $C \sim_{s_i} C''$, d.h. $[C]_{s_i}$ enthält mindestens 3 Elemente.
Zu (G2): Sei $w = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$ eine reduzierte Darstellung von $w \in \mathrm{Sym}(n + 1)$ und $C, D \in \mathrm{cham}(\Delta(V))$ zwei Kammern. Zu zeigen: Es gilt $\delta(C, D) = w$ genau dann, wenn in $\Delta(V)$ eine Gallerie von C nach D von Typ $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$ existiert.
„$\Rightarrow$“ Diese Implikation wurde bereits in Aufgabe 2.2 iii) bewiesen.
„$\Leftarrow$“ Sei $C_0 = C, \ldots, C_k = D$ eine Gallerie vom reduzierten Typ $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k})$. Zu zeigen: $\delta(C, D) = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_k}$
Per Induktion nach k: Für $k = 0$ gilt $C = D$ und es ist nichts zu zeigen. Für $k = 1$ gilt $C \neq D$ sowie $C = C_0 \sim_{s_{i_1}} C_1 = D$ und somit nach Definition $\delta(C, D) = s_{i_1}$.
Induktionsschritt $k - 1 \to k$: Die Gallerie $(C = C_0, C_1, \ldots, C_{k-1})$ ist von reduziertem Typ $(s_{i_1}, \ldots, s_{i_{k-1}})$. Nach Induktionshypothese gilt

$$\delta(C, C_{k-1}) = s_{i_1} \cdot \ldots \cdot s_{i_{k-1}}.$$

Schreibe $C=\{U_1\subseteq\ldots\subseteq U_n\}$, $C_{k-1}=\{V_1\subseteq\ldots\subseteq V_n\}$ und $D=\{W_1\subseteq\ldots\subseteq W_n\}$. Setze $\pi:=\delta(C,D)$ und $\pi':=\delta(C,C_{k-1})=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_{k-1}}$. Wegen $C_{k-1}\sim_{s_{i_k}} D$ gilt nach Aufgabe 2.2 i) $V_j=W_j$ für alle $j\neq i_k$ und $V_{i_k}\neq W_{i_k}$. Aus Aufgabe 2.1 wissen wir aber, dass $\pi(i)=\min\{j\mid W_i\subseteq W_{i-1}+U_j\}$ und entsprechend $\pi'(i)=\min\{j\mid V_i\subseteq V_{i-1}+U_j\}$ gilt. Wegen $V_j=W_j$ für alle $j\neq i_k$ erhalten wir also $\pi(i)=\pi'(i)$ für alle $i\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i_k,i_{k+1}\}$. Somit gilt entweder $\pi=\pi'$ oder $\pi=\pi'\cdot s_{i_k}$. Wir behaupten, das der zweite Fall zutreffen muss.
Per Widerspruch: Angenommen, es sei $\pi=\pi'$, also $\delta(C,D)=\pi=\pi'=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_{k-1}}$. Nach Aufgabe 2.2 iii) existiert eine Gallerie $C=C'_0,C'_1,\ldots C'_{k-1}=D$ von reduziertem Typ $(s_{i_1},\ldots,s_{i_{k-1}})$. Nun haben die Gallerien $(C_j)_j,(C'_j)_j$ verschiedene Längen und es existiert daher ein $j\in\{1,\ldots,k-1\}$ mit $C_j\neq C'_j$. Ohne Einschränkung sei $j=1$. (Sonst vergesse den gemeinsamen Anfangsteil beider Gallerien.)
Wegen $C\sim_{s_{i_1}} C_1$ und $C\sim_{s_{i_1}} C'_1$ folgt mit Transitivität $C_1\sim_{s_{i_1}} C'_1$. Dann sind $(C_1,C_2,\ldots,C_k=D)$ und $(C_1,C'_1,C'_2,\ldots,C'_{k-1}=D)$ Gallerien von C_1 nach D von reduziertem Typ $(s_{i_2},\ldots,s_{i_k})$ bzw. $(s_{i_1},\ldots,s_{i_{k-1}})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $s_{i_2}\cdot\ldots\cdot s_{i_k}=\delta(C_1,D)=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_{k-1}}$. Damit erhalten wir:

$$w=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_k}=s_{i_2}\cdot\ldots\cdot s_{i_k}\cdot s_{i_k}=s_{i_2}\cdot\ldots\cdot s_{i_{k-1}}\quad\lightning$$

Dies steht im Widerspruch dazu, dass $w=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_k}$ eine reduzierte Darstellung ist. Also war die Annahme $\pi=\pi'$ falsch und es gilt $\pi=\pi'\cdot s_{i_k}=s_{i_1}\cdot\ldots\cdot s_{i_{k-1}}\cdot s_{i_k}=w$. Damit ist das Axiom (G2) nachgewiesen.
Insgesamt ist $\Delta(V)$ ein dickes Gebäude vom Typ A_n.

Aufgabe 10.2 (6 Punkte)
Sei $G=\{g\in\mathrm{Sym}([-n,n])\mid g(i)=-g(-i)\text{ für alle } i=1,\ldots n\}$ die Gruppe der Permutationen mit Vorzeichen (wie auf Blatt 5). Zeige: G ist isomorph zu der Isometriegruppe eines n-dimensionalen Würfels.

Lösung: Wir fassen den n-dimensionalen Würfel als Teilraum $[-1,1]^n\subseteq\mathbb{R}^n$ auf. Wir zeigen die Aussage nun in den folgenden sechs Schritten:

a) Konstruktion einer isometrischen Gruppenwirkung von G auf $[-1,1]^n$:
Nach der *)-Aufgabe auf Blatt 5 hat G die Präsentierung:

$$G=\langle\sigma,s_1,\ldots,s_{n-1}\mid\sigma^2,s_i^2,(\sigma s_1)^4,(\sigma s_j)^2\text{ für }j\geq 2,(s_is_{i+1})^3,(s_is_j)^2\text{ für }|i-j|\geq 2\rangle$$

Definiere nun eine Wirkung von G auf $[-1,1]^n$ durch

$$\sigma(x_1,\ldots,x_n)=(-x_1,x_2,\ldots,x_n)\text{ und}$$
$$s_i(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},x_i,x_{i+2},\ldots,x_n).$$

Beh.: Dies induziert einen Gruppenhomomorphismus $\varphi:G\to\mathrm{Isom}([-1,1]^n)$.
Offensichtlich sind die oben definierten Abbildungen für σ und die s_i Isometrien. (Sie bilden z.B. die Standard-Orthonormalbasis $e_1,\ldots,e_n$ wieder auf eine ONB ab.)
Es genügt also zu zeigen, dass die Relationen von G erhalten werden. Wir rechnen das für die Relation $(\sigma s_1)^4$ nach. (Für die anderen Relationen sieht man das sehr leicht.) Sei $(x_1,\ldots,x_n)\in[-1,1]^n$ beliebig.
Dann gilt: $\sigma s_1(x_1,\ldots,x_n)=\sigma(x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n)=(-x_2,x_1,x_3,\ldots,x_n)$.

Dies liefert:

$$\begin{aligned}(\sigma s_1)^4(x_1,\dots x_n) &= (\sigma s_1)^3(-x_2,x_1,x_3,\dots,x_n)\\ &= (\sigma s_1)^2(-x_1,-x_2,x_3,\dots,x_n)\\ &= \sigma s_1(x_2,-x_1,x_3,\dots x_n) = (x_1,x_2,x_3,\dots x_n)\end{aligned}$$

Somit wirkt $(\sigma s_1)^4$ trivial. Da die Relationen erhalten werden, setzt sich obige Zuordnung nach der universellen Eigenschaft der Präsentierung fort zu einem Gruppenhomomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$.
Im Folgenden zeigen wir, dass φ ein Isomorphismus ist.

b) Behauptung: Eine Isometrie $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ wird durch das Bild auf der Eckenmenge $V = \{-1,1\}^n$ eindeutig bestimmt.
Beweis: Sei $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ eine beliebige Isometrie. Da die Ecken genau die Punkte in $[-1,1]^n$ von maximalem Abstand zum Mittelpunkt $(0,\dots,0)$ sind, bildet α Ecken wieder auf Ecken ab. Desweiteren ist $[-1,1]^n$ bzgl. der Standardmetrik eindeutig geodätisch und α bildet Geodäten (kürzeste Verbindungen) wieder auf Geodäten ab. Damit legen die Bilder der Ecken auch die Bilder aller Punkte auf den Kanten des Würfels fest. Analog legen die Bilder der Kanten wiederum die Bilder der 2-dimensionalen Seitenflächen des Würfels fest. Induktiv wird durch die Bilder der Ecken damit das Bild des gesamten Rands festgelegt und schließlich liegt jeder Punkt p im Inneren des Würfels auf einer Geodäte, die zwei Randpunkte x, y verbindet. Mit dem vorhergehenden Konvexitätsargument ist $\alpha(p)$ durch die Bilder $\alpha(x), \alpha(y)$ wieder eindeutig festgelegt.

c) Behauptung: G wirkt mittels φ transitiv auf der Eckenmenge V.
Beweis: Offenbar wirkt $\mathrm{Sym}(n) = \langle s_1,\dots s_{n-1}\rangle \subseteq G$ transitiv auf den Ecken „mit gleich vielen Vorzeichen“, d.h. $\mathrm{Sym}(n)$ wirkt transitiv auf der Menge $V_k = \{x \in V \mid \#\{i \mid x_i = -1\} = k\}$ für jedes $k \in \{0,\dots,n\}$. Weiter gilt $\sigma(1,\dots,1) = (-1,1,\dots,1)$. Setze $\sigma_k := s_{k-1}\dots s_1\sigma s_1\dots s_{k-1}$. Dann gilt $\sigma_k(x_1,\dots,x_n) = (x_1,\dots,-x_k,\dots,x_n)$. Also gilt $\sigma_1\dots\sigma_k(1,\dots,1) \in V_k$ für alle $k = 1,\dots n$. Folglich wirkt G transitiv auf V.

d) Behauptung: Eine Isometrie $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ wird durch das Bild einer Ecke v und all ihrer Nachbarn (d.h. der Ecken mit Abstand 1) eindeutig festgelegt.
Beweis: Sei $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$. Sei $v_0 = v = (x_1,\dots,x_n)$.
Seien $v_i = (x_1,\dots,-x_i,\dots,x_n)$ die n zu v benachbarten Ecken. Für alle $i,j \in \{1,\dots,n\}, i \neq j$ gibt es nun eine eindeutige von v verschiedene Ecke $v_{i,j}$, die zu v_i und v_j benachbart ist, nämlich

$$v_{i,j} = (x_1,\dots,-x_i,\dots,-x_j,\dots,x_n).$$

Da α benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbildet, ist nun $\alpha(v_{i,j})$ die eindeutige Ecke, die verschieden von $\alpha(v)$ und zu $\alpha(v_i)$ sowie $\alpha(v_j)$ benachbart ist. Damit ist das Bild von α auf jedem 2-dimensionalen Teilwürfel von $[-1,1]^n$ festgelegt.
Sind nun $i,j,k \in \{1,\dots,n\}$ paarweise verschieden, so gibt es eine eindeutige Ecke $v_{i,j,k}$ die zu $v_{i,j}, v_{j,k}$ und $v_{i,k}$ benachbart ist, nämlich

$$v_{i,j,k} = (x_1,\dots,-x_i,\dots,-x_j,\dots,-x_k,\dots,x_n).$$

Wie oben ist $\alpha(v_{i,j,k})$ eindeutig durch die Bilder $\alpha(v_{i,j}), \alpha(v_{j,k})$ und $\alpha(v_{i,k})$ bestimmt. Somit ist das Bild von α auf jedem 3-dimensionalen Teilwürfel von $[-1,1]^n$ festgelegt.
Induktiv erhalten wir hieraus, dass die Bilder von v und den benachbarten Ecken das Bild von α auf jedem k-dimensionalen Teilwürfel ($k \leq n$) von $[-1,1]^n$ festlegen.

e) Behauptung: Der Stabilisator $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0}$ der Ecke $v_0 = (1,\ldots,1)$ ist isomorph zu $\mathrm{Sym}(n)$ und im Bild von φ enthalten. Insbesondere folgt, dass φ surjektiv ist.
Beweis: Da Isometrie benachbarte Ecken auf benachbarte Ecken abbilden, operiert der Stabilisator $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0}$ auf den n Nachbarn von v_0.
Diese Wirkung induziert einen Gruppenhomomorphismus
$\psi : \mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0} \to \mathrm{Sym}(n)$. Da nach d) jede Isometrie durch das Bild einer Ecke und deren Nachbarn eindeutig festgelegt wird, ist ψ injektiv.
Nach Konstruktion der Wirkung von G, erzeugen die Bilder $\varphi(s_1),\ldots,\varphi(s_{n-1})$ jede Permutation der Nachbarn von v_0.
Somit ist ψ surjektiv und $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0} = \langle \varphi(s_1),\ldots,\varphi(s_{n-1})\rangle$ ist im Bild von φ enthalten. Noch zu zeigen: φ ist surjektiv.
Sei $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ beliebig. Da G transitiv wirkt, gibt es $g \in G$ mit $\varphi(g)(v_0) = \alpha(v_0)$. Dann gilt $\varphi(g^{-1})\alpha(v_0) = v_0$, also $\varphi(g^{-1})\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0}$.
Wegen $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0} \subseteq \varphi(G)$ existiert $h \in G$ mit $\varphi(h) = \varphi(g^{-1})\alpha$. Daraus erhalten wir $\alpha = \varphi(g)\varphi(h) = \varphi(gh)$. Da $\alpha \in \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ beliebig war, ist φ somit surjektiv.

f) Behauptung: Der Homomorphismus φ ist injektiv.
Beweis: Da G transitiv auf V wirkt, wirkt auch $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ transitiv auf V. Weiter gilt nach e) $\#\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0} = \#\mathrm{Sym}(n) = n!$. Mit der Bahnengleichung erhalten wir:

$$\#\mathrm{Isom}([-1,1]^n) = \#\mathrm{Isom}([-1,1]^n)_{v_0} \cdot \#V = n! \cdot 2^n$$

Nach Aufgabe 5.3 b) gilt aber auch $G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathrm{Sym}(n)$, d.h.

$$\#G = \#(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \cdot \#\mathrm{Sym}(n) = 2^n \cdot n! = \#\mathrm{Isom}([-1,1]^n).$$

Da G und $\mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ die gleiche endliche Ordnung haben und der Homomorphismus $\varphi : G \to \mathrm{Isom}([-1,1]^n)$ surjektiv ist, ist φ auch injektiv, also ein Isomorphismus.