1. Übungszettel zur Vorlesung „Gebäude“
Lösung

SoSe 2017 — Dr. Olga Varghese
WWU Münster — Nils Leder

Aufgabe 1.1
Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler K-Vektorraum. Sei $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V und $\Phi : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Sym}(\Delta(V))$ die in der Vorlesung definierte Wirkung von $\mathrm{GL}(V)$ auf $\Delta(V)$. Zeige:

a) Jede Kammer (d.h. maximale Fahne) hat Länge n und jede Fahne $\{U_1, \ldots, U_k\} \in \Delta(V)$ ist in einer Kammer enthalten.

b) Der Komplex $\Delta(V)$ ist die Vereinigung aller Apartments, d.h.

$$\Delta(V) = \bigcup_{B \text{ Basis}} \Sigma(B).$$

c) Der Kern von Φ besteht genau aus den Vielfachen der Einheitsmatrix, d.h.

$$\ker \Phi = \{\lambda E_n \mid \lambda \in K^*\}.$$

d) $\mathrm{GL}(V)$ wirkt transitiv auf der Menge der Kammern in $\Delta(V)$.
Wirkt $\mathrm{GL}(V)$ auch transitiv auf den Ecken von $\Delta(V)$?

Lösung:

a) Sei $\{U_1, \ldots, U_k\} \in \Delta(V)$ eine Fahne mit $U_1 \subsetneq \ldots U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k$. Wegen $\dim U_k \leq n$ und $\dim U_{i+1} \geq \dim U_i + 1$ folgt $k \leq n$.
Setze $U_0 = \{0\}$ und $U_{k+1} = V$. Ist $k < n$, so gilt

$$D := \{\dim(U_i) \mid i = 1, \ldots, k\} \neq \{1, \ldots, n\}.$$

Also gibt es $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \notin D$. Betrachte U_l, U_{l+1} mit $\dim U_l < i < \dim U_{l+1}$ und wähle $v \in U_{l+1} \setminus U_l$. Dann ist $\{U_1, \ldots, U_l, U_l + \langle v \rangle, U_{l+1}, \ldots, U_k\}$ eine Fahne, die $\{U_1, \ldots, U_k\}$ echt enthält.
Da Kammern maximale Fahnen sind (und somit in keiner Fahne echt enthalten sein können), haben Kammern die Länge n.
Iteriert man das obige Verfahren für eine Fahne $\{U_1, \ldots, U_k\}$ der Länge $k < n$, so erhält man nach $n-k$ Schritten eine Kammer, die diese enthält.

b) Nach a) ist jede Fahne in einer Kammer enthalten. Daher genügt es zu zeigen, dass jede Kammer in einem Apartment enthalten ist.
Sei $C = \{U_1, \ldots, U_n\} \in \Delta(V)$ eine Kammer mit $U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n$. Setze $U_0 = \{0\}$ und $U_{n+1} = V$. Wähle für jedes $i = 1, \ldots, n+1$ ein Element $v_i \in U_i \setminus U_{i-1}$. Dann gilt $U_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$. Dies sieht man induktiv: Wegen $v_1 \neq 0$ und $\dim U_1 = 1$ gilt $\langle v_1 \rangle = U_1$.
Sei $\langle v_1, \ldots, v_i \rangle = U_i$ für ein $1 \leq i \leq n$. Dann gilt für $i+1$:

Wegen $v_{i+1} \in U_{i+1} \setminus U_i$ gilt $U_i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle \subsetneq \langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle \subseteq U_{i+1}$. Somit folgt $\dim U_i = i < \dim\langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle \leq i + 1 = \dim U_{i+1}$, also $\dim\langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle = i + 1$ und daher $\langle v_1, \ldots, v_{i+1} \rangle = U_{i+1}$.
Insbesondere ist $B = \{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ eine Basis von V und die Kammer C liegt nach Definition im Apartment $\Sigma(B) \subseteq \Delta(V)$.

c) Durch Wahl einer Standardbasis $e_1, \ldots, e_{n+1}$ können wir V mit K^{n+1} und $\mathrm{GL}(V)$ mit dem Matrizenring $K^{(n+1)\times(n+1)}$ identifizieren.
Die Menge $\{\lambda E_n \mid \lambda \in K^*\}$ ist offensichtlich in $\ker \Phi$ enthalten.
Umgekehrt bildet ein Element $g \in \ker \Phi$ jede Fahne auf sich selbst ab, insbesondere also auch jeden eindimensionalen Unterraum von V. Da g somit jedes e_i auf ein skalares Vielfaches abbildet, ist g eine Diagonalmatrix mit Einträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in K^*$. Es bleibt zu zeigen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1}$
Seien $i, j \in \{1, \ldots, n+1\}, i \neq j$ beliebig. Da g den Unterraum $\langle e_i + e_j \rangle$ stabilisiert, gilt $g(e_i + e_j) = \mu(e_i + e_j)$ für ein $\mu \in K^*$. Somit erhalten wir:

$$\mu e_i + \mu e_j = g(e_i + e_j) = g(e_i) + g(e_j) = \lambda_i e_i + \lambda_j e_j$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert $\lambda_i = \mu = \lambda_j$.

d) Seien $C = \{U_1 \subsetneq \ldots \subsetneq U_n\}, D = \{W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_n\} \in \Delta(V)$ Kammern. Nach b) existieren Basen $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ und $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ von V mit $U_i = \langle a_1, \ldots, a_i \rangle$ und $W_i = \langle b_1, \ldots, b_i \rangle$ für alle $i = 1, \ldots, n+1$.
Sei $g \in \mathrm{GL}(V)$ der durch $g(a_i) = b_i$ für $i = 1, \ldots, n+1$ definierte Automorphismus von V. Dann gilt nach Konstruktion $g(U_i) = W_i$ für alle i und somit $g(C) = D$. Da C und D beliebige Kammern waren, wirkt $\mathrm{GL}(V)$ transitiv auf der Menge der Kammern von $\Delta(V)$.
Die Ecken von $\Delta(V)$ sind genau die Fahnen der Länge 1 und können somit mit den echten, nicht-trivialen Unterräumen von V identifiziert werden. Da die Automorphismen von V die Dimension von Unterräumen erhalten, ist die Wirkung von $\mathrm{GL}(V)$ auf den Ecken von $\Delta(V)$ für $n \geq 2$ nicht transitiv. (Es lässt sich jedoch genauso wie oben zeigen, dass $\mathrm{GL}(V)$ transitiv auf den Unterräumen einer festen Dimension k wirkt.)

Aufgabe 1.2
Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ der Körper mit p Elementen. Sei weiter $V = \mathbb{F}_p^3$ und $\Delta(V)$ der Fahnenkomplex zu V.

a) Wie viele Ecken hat $\Delta(V)$?

b) Wie viele Kanten hat $\Delta(V)$?

c) Wie viele Apartments enthält $\Delta(V)$?

Lösung:

a) Die Ecken von $\Delta(V)$ entsprechen den echten, nicht-trivialen Unterräumen von V. Gesucht ist also die Anzahl aller Unterräume von V der Dimension 1 oder 2.

$V = \mathbb{F}_p^3$ enthält genau $p^3 - 1$ von 0 verschiedene Vektoren und zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ gibt es $p-1$ Vektoren (nämlich die skalaren Vielfachen von v), die den gleichen eindimensionalen Unterraum aufspannen. Folglich enthält V genau $\frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$ verschiedene eindimensionale Unterräume.
Da es zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ genau $\#(V \setminus \langle v \rangle) = p^3 - p$ linear unabhängige Vektoren gibt, existieren $(p^3-1)(p^3-p)$ geordnete Paare (v_1, v_2) von linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2 \in V$. Analog existieren für jedes solche Paar (v_1, v_2) genau $(p^2 - 1)(p^2 - p)$ geordnete Paare von linear unabhängigen Vektoren aus $\langle v_1, v_2 \rangle$, welche dann ebenfalls eine Basis des Unterraums $\langle v_1, v_2 \rangle$ bilden. Somit enthält V genau

$$\frac{(p^3-1)(p^3-p)}{(p^2-1)(p^2-p)} = \frac{(p^3-1)(p^2-1)}{(p^2-1)(p-1)} = \frac{p^3-1}{p-1} = p^2 + p + 1$$

verschiedene zweidimensionale Unterräume.
Folglich hat $\Delta(V)$ genau $2p^2 + 2p + 2$ Ecken.

b) Die Kanten in $\Delta(V)$ entsprechen Paaren (U_1, U_2) von Unterräumen mit $U_1 \subseteq U_2$ und $\dim U_i = i$ für $i = 1, 2$. Jeder zweidimensionale Unterraum U_2 von V enthält genau $p^2 - 1$ von 0 verschiedene Vektoren und zu jedem $v \in U_2 \setminus \{0\}$ gibt es $p - 1$ Vektoren in U_2, die den gleichen eindimensionalen Unterraum aufspannen. Deshalb enthält U_2 genau $\frac{p^2-1}{p-1} = p + 1$ eindimensionale Unterräume.
Nach a) enthält V genau $p^2 + p + 1$ verschiedene zweidimensionale Unterräume, von denen jeder wiederum $p + 1$ verschiedene eindimensionale Unterräume enthält. Die Anzahl der Kanten in $\Delta(V)$ beträgt daher $(p^2 + p + 1) \cdot (p + 1) = p^3 + 2p^2 + 2p + 1$.

c) Wir bestimmen zunächst die Anzahl der geordneten Basen von V:
Nach a) gibt es $(p^3 - 1)(p^3 - p)$ geordnete Paare (v_1, v_2) von linear unabhängigen Vektoren $v_1, v_2 \in V$. Da es zu jedem solchen Paar (v_1, v_2) genau $\#(V \setminus \langle v_1, v_2 \rangle) = p^3 - p^2$ linear unabhängige Vektoren in V gibt, hat V genau $(p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2)$ geordnete Basen.
Nun müssen wir noch bestimmen, welche Basen das gleiche Apartment definieren. Nach Definition der Apartments spielt die Ordnung der Basis keine Rolle. Jede ungeordnete Basis von V liefert $\dim V! = 3! = 6$ verschiedene geordnete Basen.
Desweiteren lässt sich leicht beobachten, dass zwei ungeordnete Basen $\{b_1, b_2, b_3\}$ und $\{c_1, c_2, c_3\}$ von V genau dann das gleiche Apartment definieren, wenn sie die gleichen eindimensionalen Unterräume von V definieren, d.h. wenn $\{\langle b_1 \rangle, \langle b_2 \rangle, \langle b_3 \rangle\} = \{\langle c_1 \rangle, \langle c_2 \rangle, \langle c_3 \rangle\}$ gilt. Für eine feste ungeordnete Basis $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ kann also jedes der b_i nur durch ein skalares Vielfaches $\lambda_i b_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{F}_p^*$ ersetzt werden, um eine Basis zu erhalten die ebenfalls das Apartment $\Sigma(B)$ definiert. Dafür gibt es $(\#\mathbb{F}_p^*)^3 = (p - 1)^3$ verschiedene Möglichkeiten.

Damit berechnet sich die Anzahl der Apartments in $\Delta(V)$ durch:

$$\begin{aligned}\#\{\Sigma(B) \mid B \text{ Basis von } V\} &= \frac{(p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)}{6(p-1)^3} \\ &= \frac{(p^3-1)p(p^2-1)p^2(p-1)}{6(p-1)^3} \\ &= \frac{(p^2+p+1)(p+1)p^3}{6}\end{aligned}$$

Aufgabe 1.3
Sei G eine Gruppe, die auf einer Menge X wirkt. Für $x \in X$ sei
$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$ der *Stabilisator* von x. Zeige:

a) Ist H eine Untergruppe von G, die transitiv auf X wirkt, so wird G erzeugt von $H \cup G_x$ für jedes $x \in X$.

b) Die Gruppe $\mathrm{Sym}(n+1)$ wird von den n Involutionen $(1,2), \ldots, (n, n+1)$ erzeugt.

Lösung:

a) Sei H eine Untergruppe von G, die transitiv auf X wirkt und $x \in X$ beliebig.
Sei $g \in G$ beliebig. Da H transitiv auf X wirkt, existiert $h \in H$ mit $h(x) = g(x)$. Dann gilt für $q := h^{-1}g$:

$$q(x) = h^{-1}g(x) = h^{-1}(g(x)) = h^{-1}(h(x)) = x$$

Dies bedeutet $q \in G_x$ und es gilt $g = h(h^{-1}g) = hq$ mit $h \in H, q \in G_x$. Da $g \in G$ beliebig war, wird G also von $H \cup G_x$ erzeugt.

b) Per Induktion nach n:
Für $n = 1$ gilt $\mathrm{Sym}(n+1) = \mathrm{Sym}(2) = \{\mathrm{id}, (1,2)\} = \langle(1,2)\rangle$.
Sei $\mathrm{Sym}(k+1) = \langle(1,2), \ldots, (k, k+1)\rangle$ für ein $k \geq 1$. Dann gilt für $k+1$: $G = \mathrm{Sym}(k+2)$ operiert auf natürliche Weise auf $\{1, \ldots, k+2\}$ und für $x = k+2$ gilt $G_x = \mathrm{Sym}(k+1) = \langle(1,2), \ldots, (k, k+1)\rangle$ nach Induktionsvoraussetzung.
Sei desweiteren $(1, 2, \ldots, k+2)$ der $(k+2)$-Zykel, der i auf $i+1$ abbildet für $1 \leq i \leq k+1$ und $k+2$ auf 1 schickt. Dann gilt $(1, 2, \ldots, k+2)^{j-1}(1) = j$ für $j = 1, \ldots, k+2$. Insbesondere wirkt die Untergruppe $\langle(1, 2, \ldots, k+2)\rangle$ transitiv auf der Menge $\{1, \ldots, k+2\}$. Nach *a)* wird $\mathrm{Sym}(k+2)$ von $\mathrm{Sym}(k+1) \cup \langle(1, 2, \ldots, k+2)\rangle$, also von $\{(1,2), \ldots, (k, k+1), (1, 2 \ldots, k+2)\}$ erzeugt. Es gilt aber:

$$(1, 2, \ldots, k+2) = (1,2) \circ (2,3) \circ \ldots \circ (k, k+1) \circ (k+1, k+2)$$

Somit ist $(1, 2, \ldots, k+2) \in \langle(1,2), \ldots (k+1, k+2)\rangle$ und $\mathrm{Sym}(k+2)$ wird erzeugt von der Menge $\{(1,2), \ldots, (k+1, k+2)\}$.