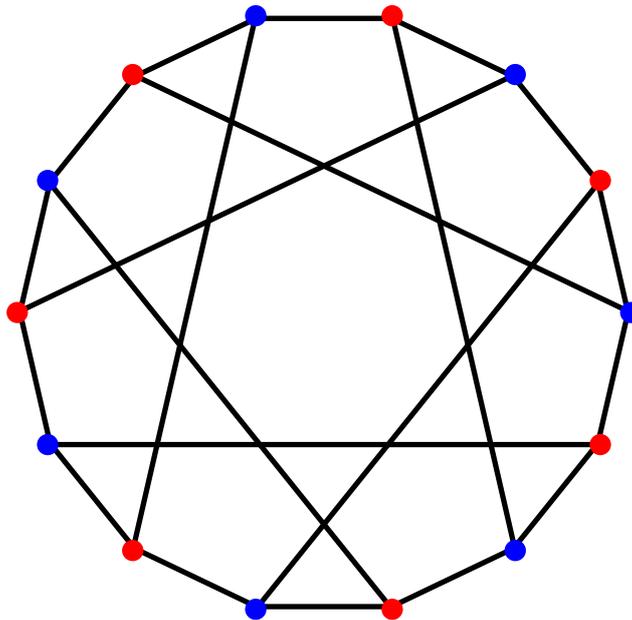


Vorlesungsmitschrift

Gebäude

Sommersemester 2017



Gelesen von DR. OLGA VARGHESE

Mitschrift von CHRISTOPH HILMES

Inhaltsverzeichnis

1	Projektive Geometrie	1
1.1	Fahnenkomplexe	1
2	Coxetergruppen	8
2.1	Spiegelungen und Diedergruppen	8
2.2	Präsentierungen	10
2.3	Coxetersysteme	13
2.4	Darstellungstheorie	18
2.5	Die geometrische Darstellung	21
2.6	Wurzelsysteme	25
2.7	Parabolische Untergruppen	29
2.8	Klassifikation sphärischer und affiner Coxetergruppen	30
2.9	Deletion und Exchange Condition	43
3	Gebäude	46
3.1	Gebäude als Kammernsysteme	46
3.2	Klassifikation dünner Gebäude	50
3.3	Gebäude vom Rang 2	52
3.4	Verallgemeinerte m -Ecke	56
3.5	Gebäude vom Rang ≥ 3	61
3.6	Coxeterkomplexe	61
3.7	Gebäude als Simplicialkomplexe	70
3.8	Übersetzung der Gebäude Konzepte	71
4	Gruppen mit Tits-Systemen	73
4.1	BN-Paare und das Einfachheitskriterium von Tits	73
4.2	Stark transitive Wirkungen	77
4.3	Geometrische Interpretation von $GL_3(K)$	78

1 Projektive Geometrie

1.1 Fahnenkomplexe

Sei K ein Körper und V ein $(n + 1)$ -dimensionaler Vektorraum über K .

Definition. Die *Projektive Geometrie* zu V ist definiert durch

$$\mathcal{PG}(V) := \{U \subseteq V \mid 0 \subsetneq U \subsetneq V \text{ echter Unterraum}\}$$

Eine *Fahne* $\{U_1, \dots, U_k\}$ der *Länge* k ist eine echt aufsteigende Kette von Unterräumen

$$0 \neq U_1 \subsetneq \dots \subsetneq U_k \neq V$$

Eine maximale Fahne der Länge n nennen wir *Kammer*. Mit dem Basisergänzungssatz erhalten wir, dass jede Fahne in einer Kammer enthalten ist.

Bemerkung. Für eine Basis $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ von V ist

$$\{U_j := \langle b_1, \dots, b_j \rangle \mid j = 1, \dots, n\}$$

offensichtlich eine Kammer. Mit dem Basisergänzungssatz sehen wir, dass jede Kammer von dieser Form ist.

Definition 1.1. Der *Fahnenkomplex* zu V ist die bzgl. Inklusion partiell geordnete Menge $\Delta(V)$ aller Fahnen, wobei wir formal auch die leere Fahne $\{\}$ erlauben.

Bemerkung. Die Gruppe $GL(V)$ operiert (in der offensichtlichen Art und Weise) auf $\mathcal{PG}(V)$ und $\Delta(V)$.

Definition 1.2. Sei X eine Menge und $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von endlichen Teilmengen von X . Wir nennen (Δ, \subseteq) einen *Simplizialkomplex*, falls X bzgl. Inklusion unter Abstieg abgeschlossen ist, d.h. wenn gilt:

$$b \in \Delta, a \subseteq b \implies a \in \Delta$$

Elemente aus Δ heißen *Simplizes* der Dimension $(\#a) - 1$.

Allgemeiner heißt eine partiell geordnete Menge *Simplizialkomplex*, wenn sie zu einem *Simplizialkomplex* im eben definierten Sinne ordnungsisomorph ist.

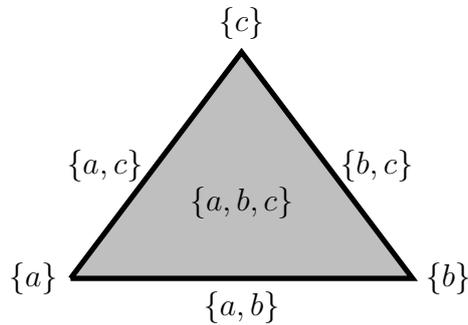
Ist (P, \leq) eine partiell geordnete Menge, so ist die Menge ΔP aller aufsteigenden endlichen Ketten in P ein *Simplizialkomplex*. Insbesondere ist

$$\Delta \mathcal{PG}(V) = \Delta(V)$$

ein $(n - 1)$ -dimensionaler *Simplizialkomplex*.

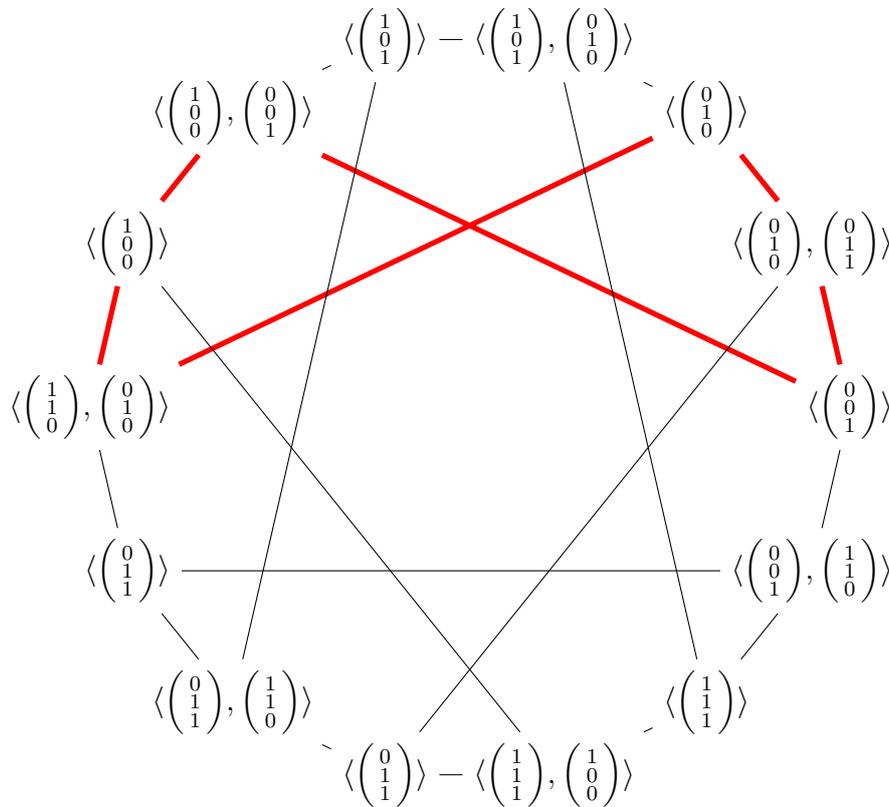
Definition 1.3. Eine Teilmenge $\Delta' \subseteq \Delta$ heißt *Unterkomplex* von Δ , falls sie unter Abstieg abgeschlossen ist.

Beispiel 1.4. Wir betrachten zu der Menge $X = \{a, b, c\}$ den Simplicialkomplex $\Delta = \mathcal{P}(X)$ und dessen *geometrische Realisierung*:



Definition 1.5. Sei $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ eine Basis von V . Wir betrachten die Menge $\Sigma(B)$ aller Fahnen, welche folgende Eigenschaft erfüllen: Jeder Unterraum der Fahne wird von einer Teilmenge von B erzeugt. Diesen Unterkomplex nennen wir ein *Apartment* von $\Delta(V)$.

Beispiel. Wir betrachten $K = \mathbb{F}_2$ und $V = \mathbb{F}_2^3$. Man rechnet nach, dass der ein-dimensionale Simplicialkomplex $\Delta(V)$ 14 Ecken und 21 Kanten besitzt. Das zu der Standardbasis zugehörige Apartment wurde in folgender Abbildung eingezeichnet.



Lemma 1.6. Seien $C = \{U_1, \dots, U_n\}$ und $D = \{W_1, \dots, W_n\}$ zwei Kammern in $\Delta(V)$. Dann existiert ein Apartment $\Sigma(B)$ welche die Kammern c und c' enthält. Genauer gilt:

1. Es gibt eine Permutation $\pi \in \text{Sym}(n+1)$ und eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_{n+1}\}$, so dass für alle $j = 1, \dots, n$ gilt:

$$U_j = \langle b_1, \dots, b_j \rangle \quad \text{und} \quad W_j = \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \rangle.$$

2. Es gilt

$$\pi(i) = \min\{j \in [n+1] \mid W_i \subseteq W_{i-1} + U_j\}$$

wobei $[k] := \{1, \dots, k\}$. Daher ist π unabhängig von der Wahl der Basis.

Beweis. 1. Wir führen den Beweis induktiv:

$n = 1$: Dann gilt $\dim(V) = 2$ und $\dim(U_1) = \dim(W_1) = 1$.

$U_1 = W_1$: Wähle $0 \neq b_1 \in U_1$ und $b_2 \in V - U_1$ und setze $\pi = id$.

$U_1 \neq W_1$: Wähle $0 \neq b_1 \in U_1$ und $0 \neq b_2 \in W_1$ und setze $\pi = (1\ 2)$.

$(n-1) \mapsto n$: Setze $U_0 = W_0 = 0$ und $W_{n+1} = U_{n+1} = V$.

$U_n = W_n$: Dann sind $\{U_1, \dots, U_{n-1}\}$ und $\{W_1, \dots, W_{n-1}\}$ Kammern in $\Delta(U_n)$. Nach I.V. existiert eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von U_n , so dass für alle $j = 1, \dots, n-1$ gilt:

$$U_j = \langle b_1, \dots, b_j \rangle \quad \text{und} \quad W_j = \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \rangle.$$

Wähle nun $b_{n+1} \in V - U_n$ und setze $B := \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ sowie $\pi(n+1) := n+1$.

$U_n \neq W_n$: Dann setze

$$W'_j := W_j \cap U_n$$

und

$$k := \max\{i \mid W_i \subseteq U_n\} < n.$$

Damit gilt $\dim(W'_{k+1}) = k$ und wegen $W'_k \subseteq W'_{k+1}$ folgt aus Dimensionsgründen bereits $W'_k = W'_{k+1}$ und somit ist

$$\{W_1, \dots, W_k, W'_{k+2}, \dots, W'_n\}$$

eine Kammer in $\Delta(U_n)$. Andererseits ist aber auch $\{U_1, \dots, U_{n-1}\}$ eine Kammer in $\Delta(U_n)$. Nach I.V. existiert somit eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ von U_n , so dass gilt:

$$\begin{aligned} U_j &= \langle b_1, \dots, b_j \rangle && \text{für } 1 \leq j \leq n-1 \\ W_j &= \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \rangle && \text{für } 1 \leq j \leq k \\ W'_{j+1} &= \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \rangle && \text{für } k < j \leq n-1 \end{aligned}$$

Nun wähle $b_{n+1} \in W_{k+1} - U_n$, also $W_{k+1} = W_k \oplus \langle b_{n+1} \rangle$. Damit erhalten wir

$$W_{j+1} = \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}, b_{n+1} \rangle.$$

Setze nun $B = \{b_1, \dots, b_n, b_{n+1}\}$ und passe π entsprechend an.

2. Für $i \in [n + 1]$ beliebig gilt:

$$\begin{aligned} W_i &= \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(i-1)}, b_{\pi(i)} \rangle \\ &= \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(i-1)} \rangle \oplus \langle b_{\pi(i)} \rangle \\ &= W_{i-1} \oplus \langle b_{\pi(i)} \rangle \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} W_i \subseteq W_{i-1} + U_j &\Leftrightarrow b_{\pi(i)} \in W_{i-1} + U_j \\ &\Leftrightarrow b_{\pi(i)} \in U_j \\ &\Leftrightarrow \pi(i) \leq j \end{aligned}$$

und damit die gewünschte (von B unabhängige) Darstellung. □

Definition. Wir bezeichnen mit $\text{cham}(\Delta(V))$ die Menge aller Kammern in $\Delta(V)$. Nach dem vorigen Lemma erhalten wir die wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \delta : \text{cham}(\Delta(V)) \times \text{cham}(\Delta(V)) &\rightarrow \text{Sym}(n + 1) \\ (C, D) &\mapsto \pi. \end{aligned}$$

Beispiel. Im Vektorraum $V = \mathbb{F}_3^3$ betrachten wir die Unterräume

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

sowie

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Im Fahnenkomplex $\Delta(\mathbb{F}_3^3)$ wollen wir nun den δ -Abstand zwischen den beiden Kammern:

$$C = \{U_1, U_2\}, \quad D = \{W_1, W_2\}$$

berechnen und betrachten dazu die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für diese gilt nun

$$U_1 = \langle b_1 \rangle, \quad U_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$$

sowie

$$W_1 = \langle b_3 \rangle, \quad W_2 = \langle b_3, b_1 \rangle$$

und damit

$$\delta(C, D) = (1, 3, 2) \in \text{Sym}(3)$$

Lemma 1.7. Wir betrachten die Transpositionen $s_i := (i, i + 1) \in \text{Sym}(n + 1)$.

1. Für Kammern $C = \{U_1, \dots, U_n\}$ und $D = \{W_1, \dots, W_n\}$ gilt

$$\delta(C, D) = s_i \Leftrightarrow \forall 1 \leq j \leq n : \begin{cases} U_j = W_j, & j \neq i \\ U_j \neq W_j, & j = i \end{cases}$$

2. Auf $\text{cham}(\Delta(V))$ ist durch

$$C \sim_{s_i} D \Leftrightarrow \delta(C, D) \in \{id, s_i\}$$

eine Äquivalenzrelation gegeben.

3. Für Kammern C, D mit $\delta(C, D) = s_{i_1} \cdots s_{i_m}$ existieren Kammern C_1, \dots, C_{m-1} mit

$$C \sim_{s_{i_1}} C_1 \sim_{s_{i_2}} \cdots \sim_{s_{i_{m-1}}} C_{m-1} \sim_{s_{i_m}} D.$$

Beweis.

1. Es gelte zunächst $\delta(C, D) = s_i$. Sei (b_1, \dots, b_{n+1}) eine Basis wie im Lemma 1.6. D.h. für alle $j \in [n]$ gilt

$$\begin{aligned} U_j &= \langle b_1, \dots, b_j \rangle \\ W_j &= \langle b_{s_i(1)}, \dots, b_{s_i(j)} \rangle \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} j < i : W_j &= \langle b_{s_i(1)}, \dots, b_{s_i(j)} \rangle = \langle b_1, \dots, b_j \rangle = U_j \\ j = i : W_i &= \langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1} \rangle \neq \langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_i \rangle = U_i \\ j > i : W_j &= \langle b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, b_i, \dots, b_j \rangle = U_i \end{aligned}$$

Nun gelte andererseits $U_j = W_j \Leftrightarrow j \neq i$. Sei (b_1, \dots, b_{n+1}) eine Basis mit

$$U_j = \langle b_1, \dots, b_j \rangle$$

für alle $j \in [n]$. Wegen $U_i \neq W_i$ gibt es

$$b'_{i+1} \in W_i - U_i$$

und es folgt wegen $b'_{i+1} \in W_i \subseteq W_{i+1} = U_{i+1}$ dass gilt:

$$b'_{i+1} \in U_{i+1} - U_i$$

Aus Dimensionsgründen erhalten wir somit

$$\langle b_1, \dots, b_i, b'_{i+1} \rangle = U_{i+1}$$

und

$$\langle b_1, \dots, b_{i-1}, b'_{i+1} \rangle = W_i$$

Durch Ersetzung von b_{i+1} durch b'_{i+1} erhalten wir damit

$$\begin{aligned} U_j &= \langle b_1, \dots, b_j \rangle \\ W_j &= \langle b_{s_i(1)}, \dots, b_{s_i(j)} \rangle \end{aligned}$$

für alle $j \in [n]$ und somit $\delta(C, D) = s_i$.

2. Nach Konstruktion von δ gilt

$$\delta(C, D) = id \Leftrightarrow C = D$$

und mit Teil 1 erhalten wir somit

$$\begin{aligned} C \sim_{s_i} D &\Leftrightarrow \delta(C, D) \in \{s_i, id\} \\ &\Leftrightarrow \forall j \neq i : U_j = W_j \end{aligned}$$

und daran kann man die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation direkt ablesen.

3. Nach Voraussetzung gilt

$$\delta(C, D) = \pi := s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_m} \in \text{Sym}(n+1)$$

und daher gibt es eine Basis (b_1, \dots, b_{n+1}) von V mit

$$\begin{aligned} U_j &= \langle b_1, \dots, b_j \rangle \\ W_j &= \langle b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \rangle \end{aligned}$$

für alle $j \in [n]$. Für $k \in [m]$ betrachten wir die Permutationen

$$\pi_k := s_{i_1} \cdot \dots \cdot s_{i_k} \in \text{Sym}(n+1)$$

und $\pi_0 := id \in \text{Sym}(n+1)$. Für die Unterräume

$$U_j^k := \langle b_{\pi_k(1)}, \dots, b_{\pi_k(j)} \rangle$$

definieren nun

$$C_k = \{U_1^k, \dots, U_n^k\}$$

Kammern in $\Delta(V)$ und nach Konstruktion gilt $\pi_0 = id$ und $\pi_m = \pi$ und somit:

$$\begin{aligned} C_0 &= \{U_1^0, \dots, U_n^0\} = \{U_1, \dots, U_n\} = C \\ C_n &= \{U_1^m, \dots, U_n^m\} = \{W_1, \dots, W_n\} = D \end{aligned}$$

Ferner rechnet man leicht nach, dass

$$C_j \sim_{s_{i_j}} C_{j+1}$$

für alle $j = 0, \dots, m-1$.

□

Bemerkung 1.8. Wir werden später sehen, dass δ eine $\text{Sym}(n+1)$ -wertige “Abstandsfunktion” ist und den kürzesten Weg in $\text{cham}(\Delta(V))$ zwischen Kammern angibt.

Definition 1.9.

1. Ein *Kammersystem* über eine Indexmenge I ist eine Menge K mit einer Äquivalenzrelation \sim_i für alle $i \in I$. Die Elemente in K heißen *Kammern*.

2. Eine *Galerie* in K ist eine endliche Folge von Kammern (c_0, \dots, c_l) mit $c_{k-1} \neq c_k$ für alle $k = 1, \dots, l$ und $c_k \sim_{i_{k+1}} c_{k+1}$ für alle $k = 0, \dots, l-1$.
3. Für eine Teilmenge $J \subseteq I$ nennen wir eine Galerie (c_0, \dots, c_l) eine *J-Galerie*, falls $i_k \in J$ gilt.
4. Ferner nennen wir K (*J*-)zusammenhängend falls je zwei Kammern durch eine (*J*-)Galerie verbunden werden können. Die (*J*-)Zusammenhangskomponenten heißen (*J*-)Residuen.

Beispiel 1.10. $\text{cham}(\Delta(V))$ ist ein Kammersystem über $I = \{(1, 2), \dots, (n, n+1)\}$.

Bemerkung. Jedem *schönen* Kammersystem kann man auf natürliche Weise einen Simplicialkomplex zuordnen:

Kammersystem über I	Simplizialkomplex
Elemente in K	Simplexes der Dim. $\#I$
$\{i\}$ -Residuen	Simplexes der Kodim. 1
$\{i, j\}$ -Residuen	Simplexes der Kodim. 2
...	...

Folgendes ist lediglich eine erste *grobe* Definition eines Gebäudes. Später werden wir die formale Definition angeben.

Definition 1.11. Ein *Gebäude* ist ein Kammersystem \mathcal{B} über I mit einer “Abstandsfunktion”

$$\delta : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \rightarrow (W, I)$$

wobei (W, I) ein *Coxetersystem* ist.

Beispiel 1.12. $\text{cham}(\Delta(V))$ ist ein Gebäude mit δ wie oben.

2 Coxetergruppen

2.1 Spiegelungen und Diedergruppen

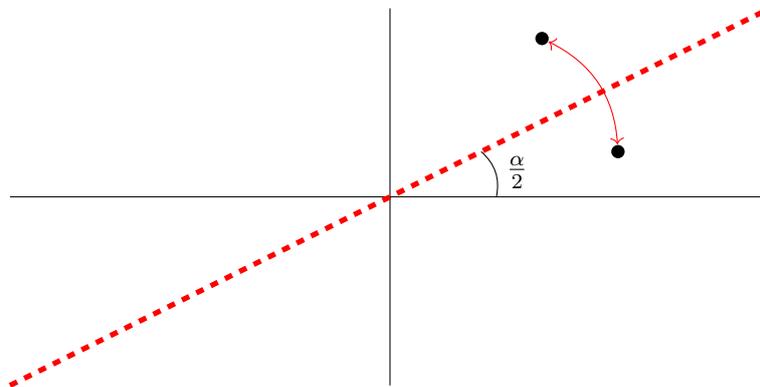
Definition 2.1. Sei $V = \mathbb{R}^d$ ein d -dim. Vektorraum. Wir nennen $H \subseteq V$ eine *Hyperebene*, falls H ein Unterraum von V ist mit Kodimension 1. Die *Spiegelung* an H ist die lineare Abbildung

$$s_H : V \rightarrow V$$

mit $s_H|_H = id_H$ und $s_H|_{H^\perp} = -id_{H^\perp}$.

Beispiel 2.2. Betrachte die Spiegelung in \mathbb{R}^2 an der Geraden welche den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x -Achse einschließt, wobei $\alpha \in [0, \pi]$:

$$s : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$



Definition 2.3. Sei $W \leq GL(\mathbb{R}^d)$ eine Untergruppe. Wir nennen W eine *Spiegelungsgruppe*, falls es eine Menge \mathcal{H} von Hyperebenen gibt, so dass gilt

$$W = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H} \rangle.$$

Beispiel 2.4.

1. Falls $\#\mathcal{H} = 1$, so gilt schon $W \cong \mathbb{Z}_2$.
2. Falls $\#\mathcal{H} = 2$ und $V = \mathbb{R}^2$ betrachte

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen $\langle s, t \rangle \subseteq GL_2(\mathbb{R})$ genauer:

$$ts = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \triangleq \text{Drehung um Winkel } \alpha$$

Falls α von der Form $\frac{2\pi}{m}$ ist, gilt $o(ts) = m$. In diesem Fall definieren wir

$$D_m := \langle s, t \rangle.$$

Definition 2.5. Eine Gruppe heißt *Diedergruppe*, falls sie von zwei verschiedenen Involutionen erzeugt wird.

Beispiel 2.6.

- D_m ist für jedes $m \geq 2$ eine Diedergruppe.
- Wir betrachten die affin linearen Abbildungen

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 2 - t$$

welche den Spiegelungen an 0 und 1 an der reellen Achse entsprechen. Es gilt $o(g) = o(h) = 2$ sowie $(g \circ h)(t) = t - 2$ und somit $o(g \circ h) = \infty$. Wir definieren

$$D_\infty := \langle g, h \rangle.$$

Es gibt also endliche und unendliche Diedergruppen. Der folgende Satz ist nun eine Klassifikation aller Diedergruppe anhand ihrer Mächtigkeit.

Satz 2.7. Sei $G = \langle g, h \rangle$ eine Diedergruppe und $m = o(gh)$ sowie $R = \langle gh \rangle$. Dann gilt

1. $G = \langle g \rangle \rtimes R$
2. $G \cong \begin{cases} C_2 \times \mathbb{Z}_m & \text{falls } m < \infty \\ C_2 \times \mathbb{Z} & \text{falls } m = \infty \end{cases}$

Beweis.

1. Zunächst zeigen wir, dass R normal ist. Wegen $g^2 = h^2 = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} g(gh)g^{-1} &= g^2hg^{-1} = hg = (gh)^{-1} \in R \\ h(gh)h^{-1} &= h^{-1}gh^2 = hg = (gh)^{-1} \in R \end{aligned}$$

Weiter gilt $g(gh) = h$ und somit $G = \langle g, R \rangle$. Für $w \in G$ gilt nun:

$$w = \begin{cases} g & \Rightarrow w \in \langle g \rangle \cdot R \\ gh & \Rightarrow w \in R \\ ghg & \Rightarrow w = g \cdot (gh)^{-1} \in \langle g \rangle \cdot R \\ \dots & \end{cases}$$

und analog falls w die Form $h\dots$ hat. Somit folgt $G = \langle g \rangle \cdot R$. Es bleibt zu zeigen, dass $\langle g \rangle \cap R$ trivial ist. Würde g in R liegen, so gäbe es ein $k \geq 1$ mit

$$g = (gh)^k \Rightarrow 1 = g(gh)^k = h(gh)^{k-1}.$$

Somit würde folgen

$$h = (gh)^{k-1} \in R.$$

Da R abelsch ist, würde nun folgen

$$(gh)^2 = ghgh = g^2h^2 = 1$$

und somit $G = R \cong C_2$. Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass G wegen $1 \neq i \neq j \neq 1$ mindestens drei Elemente besitzt.

2. Folgt direkt aus Teil 1, da g eine Involution ist und $R = \langle gh \rangle$.

□

Bemerkung 2.8. Der vorige Satz übersetzt uns also die geometrischen Diedergruppen in algebraische semidirekte Produkte. *Coxetergruppen* sind nun bestimmte von Involutionen erzeugte Gruppen, die abstrakt definiert werden.

2.2 Präsentierungen

Definition 2.9. Sei X eine Menge. Die *freie Gruppe* über X ist die Menge

$$F(X) := \{w = x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n} \mid x_i \in X, \epsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$$

aller formalen endlichen *Worte* über dem *Alphabet* X . Die Konkatenation der Worte mit den Rechenregeln

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1 \text{ für alle } x \in X$$

bildet die Gruppenstruktur. Weiter sind zwei Worte äquivalent, wenn sie durch Anwenden der Rechenregeln auseinander hervorgehen.

Die freie Gruppe $F(X)$ ist durch folgende *universelle Eigenschaft* charakterisiert:

(UE) Für jede Gruppe G und jede Abbildung $X \xrightarrow{\lambda} G$ existiert genau ein Homomorphismus $F(\lambda) : F(X) \rightarrow G$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\lambda} & G \\ & \searrow & \nearrow F(\lambda) \\ & F(X) & \end{array}$$

Definition 2.10. Für eine Teilmenge $R \subseteq F(X)$ bezeichnen wir mit

$$\langle\langle R \rangle\rangle := \bigcap \{N \mid N \trianglelefteq G, R \subseteq N\}$$

den *normalen Abschluss* von R in G . Weiter schreiben wir

$$\langle X \mid R \rangle := F(X) / \langle\langle R \rangle\rangle$$

und nennen dies eine *Präsentierung* mit *Erzeugern* X und *Relatoren* R für die definierende Gruppe.

Bemerkung. Betrachten wir $\langle a, b \mid a^2 \rangle$ so müssten wir formal eigentlich

$$baaba\langle\langle a^2 \rangle\rangle = bba\langle\langle a^2 \rangle\rangle$$

schreiben. Wir einigen uns in dieser Vorlesung darauf, einfach

$$baaba = bba$$

in $\langle a, b \mid a^2 \rangle$ usw. zu schreiben.

Bemerkung 2.11. Mittels dem Homomorphiesatz erhalten wir folgende universelle Eigenschaft für Präsentierungen:

(UE) Für jede Gruppe G und jede Abbildung $X \xrightarrow{\lambda} G$ mit $R \subseteq \ker F(\lambda)$ existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\phi : \langle X \mid R \rangle \rightarrow G$, so dass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(\lambda)} & G \\ & \searrow \pi & \nearrow \phi \\ & \langle X \mid R \rangle & \end{array}$$

Offensichtlich lässt sich jede Gruppe G präsentieren:

$$G \cong F(G) / \ker F(\text{id}_G) = \langle G \mid \ker F(\text{id}_G) \rangle$$

Allerdings ist man in der Theorie der Präsentierungen an endlich vielen Erzeugern und Relationen interessiert.

Beispiel 2.12.

1. $F(a) = \{\dots, a^{-2}, a^{-1}, a^0 = 1, a, a^2, \dots\} \cong \mathbb{Z}$
2. $F(X) = \langle X \mid \emptyset \rangle$

Proposition 2.13. Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ und $H = \langle Y \mid S \rangle$ mit $X \cap Y = \emptyset$. Dann gilt

$$G \times H = \langle X \cup Y \mid T \rangle$$

mit $T = R \cup S \cup [X, Y]$ wobei $[X, Y] := \{[x, y] \mid x \in X, y \in Y\}$.

Beweis. Betrachte zunächst

$$\lambda : X \cup Y \rightarrow G \times H, \quad X \ni x \mapsto (x, 1), \quad Y \ni y \mapsto (1, y)$$

mit der surjektiven Fortsetzung $F(\lambda) : F(X \cup Y) \twoheadrightarrow G \times H$.

Sei nun $r \in T$ beliebig. Da $F(\lambda)$ die Abbildung λ fortsetzt, gilt:

$$F(\lambda)(r) = \begin{cases} (r, 1_H) = (1_G, 1_H), & r \in R \\ (1_G, r) = (1_G, 1_H), & r \in S \\ [\lambda(x), \lambda(y)] = [(x, 1), (1, y)] = 1, & r = [x, y] \in [X, Y] \end{cases}$$

Somit erhalten wir $T \subseteq \ker F(\lambda)$ und damit nach der (UE) einen surjektiven Homomorphismus

$$\langle X \cup Y \mid T \rangle \xrightarrow{\phi} G \times H \text{ mit } \phi \circ \pi = F(\lambda).$$

Zu zeigen bleibt $\ker \phi = \{1\}$. Sei dazu $w \in \ker \phi$ beliebig.

Da in $\langle X \cup Y \mid T \rangle$ die Gleichung $[x, y] = 1$ gilt, erhalten wir

$$w = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m \text{ mit } x_i \in X^{\pm 1}, y_i \in Y^{\pm 1}.$$

Somit gilt also

$$(1_G, 1_H) = \phi(w) = \lambda(x_1)\dots\lambda(x_n)\lambda(y_1)\dots\lambda(y_m) = (x_1\dots x_n, y_1\dots y_m)$$

also $x_1\dots x_n = 1_G$ und $y_1\dots y_m = 1_H$. Somit gilt

$$x_1\dots x_n \in \langle\langle R \rangle\rangle_{F(X)} \text{ und } y_1\dots y_m \in \langle\langle S \rangle\rangle_{F(Y)}$$

und damit

$$w = x_1\dots x_n y_1\dots y_m \in \langle\langle T \rangle\rangle_{F(X \cup Y)}$$

also $w = 1$. Also ist ϕ ein Isomorphismus und $\langle X \cup Y \mid T \rangle$ somit eine Präsentation für $G \times H$. \square

Proposition 2.14. Sei $G = \langle X \mid R \rangle$ und $H = \langle Y \mid S \rangle$ mit $X \cap Y = \emptyset$ und $H \xrightarrow{\phi} \text{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann gilt

$$G \times H = \langle X \cup Y \mid T \rangle$$

mit $T = R \cup S \cup \{yxy^{-1}(\phi(y)(x))^{-1} \mid x \in X, y \in Y\}$.

Beweis. ÜA. \square

Beispiel 2.15. Es gilt $C_2 = \langle a \mid a^2 \rangle$ und $\mathbb{Z}_m = \langle b \mid b^m \rangle$ und damit

$$\begin{aligned} D_m &\cong C_2 \times \mathbb{Z}_m = \langle a, b \mid a^2, b^m, aba^{-1}b \rangle \\ &= \langle a, b \mid a^2, b^m, (ab)^2 \rangle \end{aligned}$$

Betrachten wir die Spiegelung s an der x -Achse und die Spiegelung t an der Geraden mit Winkel $\frac{\pi}{m}$ so gilt offensichtlich $s^2 = 1, t^2 = 1$ und $(st)^m = 1$. Damit erhalten wir nach der (UE) einen Gruppenhomomorphismus

$$\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle \xrightarrow{\phi} D_m$$

Insbesondere gilt damit $s \neq t$ und $m = o(\phi(st)) \leq o(st) \leq m$ in $\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle$. Mit dem Satz 2.7 erhalten wir damit aber schon:

$$\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle \cong C_2 \times \mathbb{Z}_m \cong D_m$$

Damit hat D_m also die beiden Präsentierungen:

$$\begin{aligned} D_m &\cong C_2 \times \mathbb{Z}_m = \langle a, b \mid a^2, b^m, (ab)^2 \rangle \\ &= \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle \end{aligned}$$

Letztere gefällt uns besser, da die Erzeuger eine einfachere Gestalt haben.

Damit haben wir für die Diedergruppen eine schöne Präsentation gefunden, welche wir im nächsten Abschnitt verallgemeinern wollen.

2.3 Coxetersysteme

Definition 2.16. Sei I eine endliche Menge. Eine Coxetermatrix über I ist eine Matrix $m = (m_{ij})_{i,j \in I}$ mit

- $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,
- $m_{ii} = 1$,
- $m_{ji} = m_{ij} \geq 2$ für $i \neq j$.

Wir nennen

$$W := \langle I \mid (ij)^{m_{ij}} \text{ für } i, j \in I \text{ mit } m_{ij} \neq \infty \rangle$$

die zugehörige *Coxetergruppe* und das Paar (W, I) ein *Coxetersystem* vom Rang $\#I$.

Beispiel 2.17.

Coxetermatrix	Coxetergruppe	a.k.a.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2, (ba)^2 \rangle$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$	$\langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$	D_∞

Als nächstes wollen wir die Informationen einer Coxetermatrix anschaulich durch einen Graphen darstellen.

Definition. Sei m eine Coxetermatrix bzgl. der Menge I . Der gewichtete *Coxetergraph* besteht aus den Ecken I und den Kanten $\{i, j\}$ mit Gewicht m_{ij} , falls $m_{ij} > 2$. Da wir oft Kanten vom Gewicht 3 haben werden, lassen wir bei diesen Kanten die Beschriftung weg.

Beispiel 2.18.

Coxetergraph	Coxetermatrix
	$\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Definition 2.19. Ein Coxetersystem (W, I) heißt *irreduzibel*, falls der zugehörige Coxetergraph zusammenhängend ist.

Lemma 2.20. Sei (W, I) ein Coxetersystem und Γ der zugehörige Coxetergraph. Weiter seien $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ die Zusammenhangskomponenten von Γ . Für $W_i := W(\Gamma_i)$ gilt dann

$$W \cong W_1 \times \dots \times W_k.$$

Beweis. Wende Proposition 2.13 an. □

Beispiel 2.21.

	m	Γ	W
Reduzibel:	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	• —•—•	$\mathbb{Z}_2 \times D_3$
Irreduzibel:	$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$	• $\xrightarrow{6}$ •	D_6

Wegen $\mathbb{Z}_2 \times D_3 \cong D_6$ sehen wir, dass eine Coxetergruppe verschiedene Coxetersysteme besitzen kann. Hier ist das eine sogar reduzibel und das andere irreduzibel.

Proposition 2.22. *Sei (W, I) ein Coxetersystem. Dann existiert genau ein Epimorphismus*

$$\epsilon : W \longrightarrow \{1, -1\}$$

mit $\epsilon(i) = -1$ für alle $i \in I$.

Beweis. Betrachte zu $\lambda(i) = -1$ die Fortsetzung $F(I) \xrightarrow{F(\lambda)} \{\pm 1\}$. Für $i, j \in I$ mit $m_{ij} \neq \infty$ gilt:

$$F(\lambda)((ij)^{m_{ij}}) = (F(\lambda)(ij))^{m_{ij}} = (\lambda(i)\lambda(j))^{m_{ij}} = 1^{m_{ij}} = 1$$

und mit der (UE) erhalten wir den gesuchten Epimorphismus. □

Bemerkung.

1. Insbesondere sehen wir damit, dass die $i \in I$ Ordnung 2 haben und Coxetergruppen daher niemals trivial sind.
2. $W \xrightarrow{\epsilon} \{\pm 1\}$ ist eine Verallgemeinerung der bekannten Signumsfunktion:

$$\text{sign} : \text{Sym}(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

Unser Ziel in diesem Kapitel ist die Klassifikation aller *endlichen* Coxetergruppen. Nach Lemma 2.20 reicht es, die endlichen irreduziblen Coxetersysteme zu finden. Wir formulieren hier zunächst die Klassifizierung und werden im restlichen Kapitel auf den Beweis hinarbeiten.

Theorem 2.23 (Coxeter 1934). *Gegeben sei ein irreduzibles Coxetersystem (W, I) mit dem zugehörigen Coxetergraphen Γ .*

Die Gruppe W ist genau dann endlich, wenn Γ einer der folgenden Graphen ist:

Bezeichnung

Graph

A_n ($n \geq 1$)



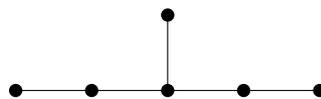
$B_n = C_n$ ($n \geq 2$)



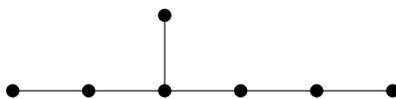
D_n ($n \geq 4$)



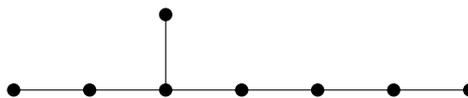
E_6



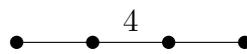
E_7



E_8



F_4



G_2



H_3



H_4



$I_2(m)$ ($m = 5, m \geq 7$)



Bemerkung 2.24. Wir werden dabei folgende Beweisidee verfolgen:

- Wir werden zeigen, dass alle aufgelisteten Graphen tatsächlich Coxetergraphen von endlichen Coxetergruppen sind.
- Weiter zeigen wir, dass alle nicht aufgelisteten Coxetergraphen einen „verbotenen“ Untergraphen enthalten.

Wir werden für den Beweis folgende Hilfsmittel benötigen:

- Die Längenfunktion auf W .
- Eine Darstellung $W \hookrightarrow GL(V)$ von W .

Satz. *Es gilt*

$$\text{Sym}(n+1) \cong W(A_n) = \underbrace{\langle t_1, \dots, t_n \rangle}_{T_n} \mid \underbrace{t_i^2, (t_i t_{i+1})^3, (t_i t_j)^2 \text{ für } |i-j| > 1}_{R_n}$$

und insbesondere sind die symmetrischen Gruppen Coxetergruppen.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion:

$$n = 1 : \text{Sym}(2) \cong \mathbb{Z}_2 \cong \langle t_1 \mid t_1^2 \rangle.$$

$n \mapsto n+1$: Sei $G := W(A_{n+1})$ und setze $R := R_{n+1}$. Betrachte zu $\lambda(t_i) := (i, i+1)$ die Fortsetzung

$$F(\lambda) : F(T_{n+1}) \rightarrow \text{Sym}(n+2),$$

welche surjektiv ist, da $\text{Sym}(n+2)$ von den Transpositionen $(i, i+1)$ erzeugt wird (ÜA). Die Relationen $r \in R_{n+1}$ sind in $\text{Sym}(n+2)$ offensichtlich erfüllt und wir erhalten mit der (UE) den Epimorphismus

$$\phi : G \twoheadrightarrow \text{Sym}(n+2).$$

Da die Gruppen endlich sind, reicht es zu zeigen: $\#G \leq \#\text{Sym}(n+2)$.

Betrachte dazu die Untergruppe $H := \langle t_2, \dots, t_{n+1} \rangle \leq G$.

Schritt 1: Wir zeigen: $\#H \leq (n+1)!$.

Nach IV gilt $\text{Sym}(n+1) = \langle S_n \mid R_n \rangle$. Genau wie oben erhalten wir zu $\mu(s_i) = t_{i+1}$ die surjektive Fortsetzung $F(\mu) : F(S_n) \rightarrow H$ und den Epimorphismus

$$\psi : \text{Sym}(n+1) \twoheadrightarrow H.$$

Somit erhalten wir $\#H \leq \#\text{Sym}(n+1) = (n+1)!$.

Schritt 2: Wir zeigen: $[G : H] \leq n+2$.

Setze $H_0 := H$ und $H_i := Ht_1 \cdots t_i$ für $1 \leq i \leq n+1$. Sei nun $w = t_{i_1} \cdots t_{i_k} \in G$ mit $t_{i_l} \in T_{n+1}$ beliebig.

$j = i$: Dann gilt $H_i t_i = Ht_1 \cdots t_i t_i = Ht_1 \cdots t_{i-1} = Ht_{i-1}$.

$j = i+1$: Dann gilt $H_i t_{i+1} = Ht_1 \cdots t_i t_{i+1} = Ht_{i+1}$.

$j \geq i+2$: Dann gilt $|j-l| > 1$ für alle $l \leq i$ und damit $t_l t_j = t_j t_l$. Somit erhalten wir:

$$H_i t_j = Ht_1 \cdots t_i t_j = Ht_1 \cdots t_{i-1} t_j t_i = \dots = Ht_j t_1 \cdots t_i = Ht_1 \cdots t_i = H_i.$$

$j \leq i-1$: Dann gilt

$$\begin{aligned} H_i t_j &= Ht_1 \cdots t_{j-1} t_j t_{j+1} t_{j+2} \cdots t_i t_j \\ &= Ht_1 \cdots t_{j-1} (t_j t_{j+1} t_j) t_{j+2} \cdots t_i \\ &= Ht_1 \cdots t_{j-1} (t_{j+1} t_j t_{j+1}) t_{j+2} \cdots t_i \\ &= Ht_{j+1} t_1 \cdots t_{j-1} t_j t_{j+1} t_{j+2} \cdots t_i \\ &= Ht_1 \cdots t_{j-1} t_j t_{j+1} t_{j+2} \cdots t_i = H_i \end{aligned}$$

Damit erhalten wir induktiv $w \in \cup_{l=0}^{n+1} H_l$ und somit $[G : H] \leq n + 2$.

Schritt 3: Es gilt nun:

$$\#G = \#H \cdot [G : H] \leq (n + 1)! \cdot (n + 2) = (n + 2)!.$$

□

Bemerkung 2.25. In der geometrischen Gruppentheorie untersucht man Gruppen unter Anderem mittels metrischer Methoden. Ein sehr wichtiges Werkzeug dabei ist die Wortlänge, welche wir nun einführen.

Definition 2.26. Sei G eine endlich erzeugbare Gruppe und $S \subseteq G$ ein endliches Erzeugendensystem. Wir definieren auf G die *Längenfunktion*

$$l_S(g) := \begin{cases} 0, & g = 1 \\ \min\{n \mid g = s_1 \dots s_n, s_i \in S \cup S^{-1}\}, & g \neq 1 \end{cases}$$

Die Wortlänge hängt dabei offensichtlich von S ab!

Proposition 2.27. *Es gilt:*

1. $l_S(g) = l_S(g^{-1}) \geq 0$.
2. $l_S(g) = 0 \iff g = 1$.
3. $l_S(gh) \leq l_S(g) + l_S(h)$.
4. $l_S(gh) \geq l_S(g) - l_S(h)$.

Beweis. ÜA.

□

Beispiel 2.28.

1. Für $G = \mathbb{Z}$ betrachte die beiden Erzeugendensysteme $S_1 = \{1\}$ und $S_2 = \{2, 3\}$. Dann gilt $l_{S_1}(1) = 1$ und $l_{S_2}(1) = 2$.
2. Ist (W, I) ein Coxetersystem, so haben wir auf W die Wortlänge bzgl. I . Wir schreiben dann kurz:

$$l(g) := l_I(g).$$

Proposition 2.29. *Der Homomorphismus $W \xrightarrow{\epsilon} \{\pm 1\}$ aus 2.22 ist gegeben durch:*

$$\epsilon(w) = (-1)^{l(w)}.$$

Beweis. Sei $w \in W$ beliebig und $k := l(w)$. Da die $i \in I$ Involutionen sind, erhalten wir die Darstellung

$$w = i_1 \dots i_k$$

für gewisse $i_j \in I$ und damit

$$\epsilon(w) = \epsilon(i_1) \cdot \dots \cdot \epsilon(i_k) = (-1)^k.$$

□

Proposition 2.30. Für alle $w \in W$ und $i \in I$ gilt:

1. $l(wi) = l(w) \pm 1$,
2. $l(iw) = l(w) \pm 1$.

Beweis. ÜA. □

Bemerkung 2.31.

- Viele Aussagen über Coxetergruppen werden induktiv nach der Wortlänge bewiesen. Wir wollen daher $l(wi), l(iw)$ in Bezug auf $l(w)$ besser verstehen.
- Wie brauchen dafür eine „schöne Darstellung“ von W .

Dazu benötigen wir etwas Darstellungstheorie.

2.4 Darstellungstheorie

Sei nun G eine beliebige Gruppe und K ein beliebiger Körper.

Definition 2.32. Eine *lineare Darstellung* von G ist ein Paar (ϕ, V) wobei V ein K -Vektorraum ist und $G \xrightarrow{\phi} GL(V)$ ein Homomorphismus. Man nennt $\dim(V)$ den *Grad* der Darstellung und diese *treu*, falls ϕ injektiv ist.

Bemerkung.

- Durch solch eine lineare Darstellung können wir G mittels linearer Algebra und Geometrie untersuchen.
- Für eine abstrakte Gruppe G kann man auch glatte Darstellungen

$$G \longrightarrow \text{Diff}(M)$$

auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten studieren.

Beispiel 2.33.

1. Die triviale Darstellung

$$\phi : G \rightarrow GL(K), g \mapsto id_K$$

hat Grad 1, ist aber nicht besonders hilfreich...

2. Sind $(\phi_i, V_i)_{i=1}^n$ Darstellungen von G , so auch ihre direkte Summe:

$$\bigoplus \phi_i : G \rightarrow GL(\bigoplus V_i), (x_1, \dots, x_n) \mapsto (\phi_1(g)(x_1), \dots, \phi_n(g)(x_n))$$

Definition 2.34. Eine *Matrixdarstellung* von G über einem Körper K des Grades n ist ein Homomorphismus

$$G \xrightarrow{\psi} GL_n(K).$$

Bemerkung.

- Für einen endlich dimensionalen Vektorraum mit einer Basis B stehen lineare Darstellungen und Matrixdarstellungen offensichtlich in einer 1:1 Beziehung.
- Ab jetzt sei $\dim(V) < \infty$ und wir benutzen die Begriffe synonym.

Definition 2.35. Zwei Darstellungen (ϕ_1, V_1) und (ϕ_2, V_2) von G heißen *ähnlich* (oder auch *gleich*), wenn es einen Isomorphismus $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ gibt, so dass für alle $g \in G$ das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \\ \phi_1(g) \downarrow & & \downarrow \phi_2(g) \\ V_1 & \xrightarrow{f} & V_2 \end{array}$$

Bemerkung.

- Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation.
- In der Darstellungstheorie interessiert man sich für Darstellungen bis auf Ähnlichkeit.

Definition 2.36. Sei (ϕ, V) eine Darstellung von G . Ein Untervektorraum $U \leq V$ heißt *ϕ -invariant*, falls:

$$\forall g \in G : \phi(g)(U) \subseteq U.$$

In diesem Fall erhält man dann die induzierte Darstellung

$$\tilde{\phi} : G \rightarrow GL(U), \quad g \mapsto \phi(g)|_U.$$

Beispiel 2.37. Sei $G = \text{Sym}(3)$ und $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis des \mathbb{R}^3 . Dann ist

$$\phi : \text{Sym}(3) \longrightarrow GL_3(\mathbb{R}), \quad \pi \mapsto \begin{pmatrix} e_{\pi(1)} & e_{\pi(2)} & e_{\pi(3)} \end{pmatrix}$$

eine treue Darstellung und der Unterraum $U := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ist ϕ -invariant.

Definition 2.38. Eine Darstellung $(\phi, V \neq 0)$ heißt *irreduzibel*, falls $\{0\}$ und V die einzigen ϕ -invarianten Unterräume sind.

Satz 2.39 (von Maschke). *Sei G eine endliche Gruppe und es gelte $\text{char}(K) \nmid \#G$. Sei (ϕ, V) eine lineare Darstellung von G und U ein ϕ -invarianter Unterraum. Dann existiert ein ϕ -invarianter Unterraum \tilde{U} mit $V = U \oplus \tilde{U}$.*

Beweis.

Schritt 1: Wähle einen beliebigen Unterraum X mit $V = U \oplus X$.
Betrachte die orthogonale Projektion auf U :

$$\pi : V \longrightarrow V, \quad v = u + x \mapsto u$$

Schritt 2: Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : V \longrightarrow V, v \mapsto \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \phi(g)^{-1} \circ \pi \circ \phi(g)(v)$$

welche wegen $\text{char}(K) \nmid \#G$ wohldefiniert ist. Setze $\tilde{U} := \ker f$.

Schritt 3: Wir zeigen $U \cap \tilde{U} = \{0\}$:

Sei dazu $v \in U \cap \tilde{U}$. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} v \in U &\implies \phi(g)(v) \in U \\ &\implies \pi(\phi(g)(v)) = \phi(g)(v) \\ &\implies f(v) = \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} v = \frac{1}{\#G} \#G \cdot v = v \\ v \in \tilde{U} &\implies 0 = f(v) = v. \end{aligned}$$

Schritt 4: Wir zeigen $V = U + \tilde{U}$.

Für beliebiges $v \in V$ erhalten wir $v = f(v) + (v - f(v)) \in U + \tilde{U}$, da

$$f(v - f(v)) = f(v) - f \circ f(v) = 0, \text{ denn } f^2 = f.$$

Schritt 5: Wir zeigen zuletzt, dass \tilde{U} ϕ -invariant ist:

Sei $v \in \tilde{U}$ und $h \in G$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} f(\phi(h)(v)) &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \phi(g)^{-1} \circ \pi \circ \phi(g)(\phi(h)(v)) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \phi(h) \circ \phi(h^{-1}) \circ \phi(g)^{-1} \circ \pi \circ \phi(g) \circ \phi(h)(v) \\ &= \phi(h) \left(\frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \phi(gh)^{-1} \circ \pi \circ \phi(gh)(v) \right) \\ &= \phi(h)(f(v)) = \phi(h)(0) = 0 \end{aligned}$$

und damit $\phi(h)(v) \in \ker f = \tilde{U}$.

□

Bemerkung.

- Wählt man Basen (b_1, \dots, b_n) von U und (d_1, \dots, d_m) von \tilde{U} so erhalten wir bezüglich der Basis

$$B := (b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_m)$$

von V die folgende Matrixdarstellung:

$$\phi(g) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array} \right] =: \left[\begin{array}{c|c} \phi_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \phi_2(g) \end{array} \right]$$

Folglich sind $\phi \sim \phi_1 \oplus \phi_2$ ähnlich.

- Jede Darstellung von G ist also ähnlich zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen. Dies motiviert nachträglich die Definition irreduzibler Darstellungen.

2.5 Die geometrische Darstellung

Bemerkung 2.40.

- Unser Ziel ist es nun eine schöne Darstellung von W zu konstruieren. Das heißt wir suchen einen endlich dimensionalen Vektorraum V und eine treue lineare Darstellung

$$W \hookrightarrow GL(V).$$

- Motiviert durch die endlichen Diedergruppen ist unser geometrischer Wunsch, dass $\phi(i)$ für jedes $i \in I$ eine Spiegelung in V ist.
- Das wird i.A. so leider nicht funktionieren. Wir müssen die Bedingung einer Spiegelung daher etwas abschwächen.

Definition 2.41. Eine lineare Abbildung $s \in GL(\mathbb{R}^d)$ heißt *abstrakte Spiegelung*, falls eine Hyperebene $H \leq \mathbb{R}^d$ und ein Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^d$ existieren, so dass gilt:

1. $s|_H = id_H$
2. $s(v) = -v$

Der Vektor v muss also, im Gegensatz zu vorher, nicht orthogonal zu H sein.

Konstruktion. Gegeben sei ein Coxetersystem (W, I) mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{ij}$. Wir betrachten $V = \mathbb{R}^I$ mit der Standardbasis $\{b_i\}_{i \in I}$ und die symmetrische Bilinearform

$$B : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (b_i, b_j) \mapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right), & m_{ij} \neq \infty \\ -1, & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

Es gilt:

1. $B(b_i, b_i) = -\cos(\pi) = 1$.
2. $B(b_i, b_j) \leq 0$ für $i \neq j$ da $m_{ij} \geq 2$.
3. $B(b_i, b_j) = 0 \Leftrightarrow -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = 0 \Leftrightarrow m_{ij} = 2$.

Wir definieren nun

$$\phi : I \longrightarrow GL(V), i \mapsto \sigma_i$$

wobei

$$\sigma_i : V \longrightarrow V, v \mapsto v - 2B(b_i, v)b_i.$$

Lemma 2.42. Für $i \in I$ ist σ_i eine abstrakte Spiegelung.

Beweis. Der Unterraum $H_i := \{v \in V \mid B(v, b_i) = 0\}$ ist als Kern der surjektiven linearen Abbildung

$$V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto B(v, b_i)$$

eine Hyperebene in V . Für beliebiges $v \in H_i$ erhalten wir

$$\sigma_i(v) = v - 2B(b_i, v)b_i = v - 0 \cdot b_i = v$$

und es gilt

$$\sigma_i(b_i) = b_i - 2B(b_i, b_i)b_i = b_i - 2b_i = -b_i.$$

□

Bemerkung. Für eine symmetrische positiv definite Bilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem Vektorraum V können wir abstrakt den Winkel zweier Vektoren $x, y \in V$ definieren:

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cdot \cos \angle(x, y)$$

Satz 2.43. Die oben definierte Abbildung $I \xrightarrow{\phi} GL(V)$ setzt sich fort zu einem Homomorphismus

$$W \xrightarrow{\Phi} GL(V).$$

Wir nennen Φ die geometrische Darstellung von W .

Beweis. Nach der (UE) der freien Gruppe erhalten wir zunächst eine Fortsetzung

$$F(I) \xrightarrow{\tilde{\phi}} GL(V).$$

Wir müssen nun zeigen, dass $\tilde{\phi}$ durch W faktorisiert. Nach der (UE) der Präsentierung reicht es zu zeigen, dass für beliebige $i, j \in I$ mit $m_{ij} < \infty$ gilt:

$$\tilde{\phi}((ij)^{m_{ij}}) = id_V.$$

Fall $i = j$: Dann ist $m_{ii} = 1$ und $\phi(i) = \sigma_i$ nach Lemma 2.42 eine Spiegelung und hat damit insbesondere Ordnung 2. Damit erhalten wir

$$\tilde{\phi}((ii)^{m_{ii}}) = \tilde{\phi}(ii) = \tilde{\phi}(i)^2 = \sigma_i^2 = id_V.$$

Fall $i \neq j$: Wir betrachten den Unterraum $V_0 := \langle b_i \rangle \oplus \langle b_j \rangle$.

Schritt 1: Wir zeigen: V_0 ist $\langle \sigma_i \circ \sigma_j \rangle$ -invariant.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_i(b_i) &= b_i - 2B(b_i, b_i)b_i = -b_i \in V_0 \\ \sigma_i(b_j) &= b_j - 2B(b_j, b_i)b_i \in V_0 \end{aligned}$$

Analog erhalten wir $\sigma_j(b_j), \sigma_j(b_i) \in V_0$ und damit $\sigma_i \circ \sigma_j(V_0) = V_0$.

Schritt 2: Wir zeigen: $o\left((\sigma_i \circ \sigma_j)|_{V_0}\right) = m_{ij}$.

Dazu betrachten wir $c_1 = b_j$ und $\tilde{c}_2 = b_i - B(b_i, b_j)b_j$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{c}_2\| &= B(b_i - B(b_i, b_j)b_j, b_i - B(b_i, b_j)b_j) \\ &= B(b_i, b_i) - 2 \cdot B(b_i, B(b_i, b_j)b_j) + B(B(b_i, b_j)b_j, B(b_i, b_j)b_j) \\ &= 1 - 2 \cdot B(b_i, b_j)^2 + B(b_i, b_j)^2 \\ &= 1 - B(b_i, b_j)^2 \\ &= 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \end{aligned}$$

Eine nicht sehr erhellende Rechnung zeigt, dass die Darstellungsmatrix von $(\sigma_i \circ \sigma_j)|_{V_0}$ bzgl. der Basis $(c_1, c_2 := \frac{\tilde{c}_2}{\|\tilde{c}_2\|})$ die folgende Rotationsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{m_{ij}}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{m_{ij}}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{m_{ij}}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{m_{ij}}\right) \end{pmatrix}$$

um den Winkel $\frac{2\pi}{m_{ij}}$ ist. Damit erhalten wir

$$o\left((\sigma_i \circ \sigma_j)|_{V_0}\right) = o(M) = m_{ij}$$

Schritt 3: Wir zeigen: $\sigma_i \sigma_j|_{H_i \cap H_j} = id$.

Sei dazu $v \in H_i \cap H_j$ beliebig. Es gilt also $B(v, b_i) = B(v, b_j) = 0$ und somit:

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j(v) &= \sigma_i(v - 2B(v, b_j)b_j) \\ &= \sigma_i(v) \\ &= v - 2B(v, b_i)b_i = v\end{aligned}$$

Schritt 4: Wir zeigen $V = V_0 \oplus (H_i \cap H_j)$.

Sei $v \in V_0 \cap (H_i \cap H_j)$ beliebig. Dann gibt es $r_i, r_j \in \mathbb{R}$ mit

$$v = r_i b_i + r_j b_j.$$

Nun erhalten wir $B(v, b_i) = B(v, b_j) = 0$ und somit:

$$\begin{aligned}0 &= B(r_i b_i + r_j b_j, b_i) \\ &= r_i B(b_i, b_i) + r_j B(b_j, b_i) = r_i - r_j \cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)\end{aligned}$$

Analog ergibt sich:

$$0 = r_j - r_i \cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$$

Damit ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} \\ -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ r_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Matrix invertierbar ist, folgt somit bereits $r_i = r_j = 0$ und damit $v = 0$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $V_0 + (H_i \cap H_j) = V$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto (B(v, b_i), B(v, b_j))$$

mit dem Kern $\ker f = H_i \cap H_j$. Da die Vektoren

$$\begin{aligned}f(b_i) &= \left(1, -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}\right) \\ f(b_j) &= \left(-\cos \frac{\pi}{m_{ij}}, 1\right)\end{aligned}$$

linear unabhängig sind, ist f surjektiv. Damit erhalten wir

$$\dim(H_i \cap H_j) = \dim \ker f = V - \dim \mathbb{R}^2 = V - 2$$

und wegen $\dim V_0 = 2$ folgt schon die gewünschte Gleichheit.

Schritt 5: Wir wissen, dass

$$\begin{aligned} o(\sigma_i \sigma_j|_{V_0}) &= m_{ij} \\ o(\sigma_i \sigma_j|_{H_i \cap H_j}) &= 1 \end{aligned}$$

Zusammen mit Schritt 3 folgt damit schon

$$o(\sigma_i \sigma_j) = m_{ij}$$

□

Korollar 2.44. Sei (W, I) ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{i,j}$. Dann gilt

$$o(ij) = m_{ij}$$

Beweis. Den Fall $m_{ij} < \infty$ haben wir bereits im vorigen Beweis gesehen. Und für $m_{ij} = \infty$ lässt sich induktiv zeigen:

$$(\sigma_i \sigma_j)^n(b_i) = b_i + 2n(b_i + b_j)$$

Da b_i und b_j linear unabhängig sind, ist dieser Ausdruck für jedes $n \in \mathbb{N}$ von b_i verschieden. □

Proposition 2.45. Sei $W \xrightarrow{\Phi} GL(V)$ die geometrische Darstellung von W . Dann gilt für alle $w \in W$ und $v_1, v_2 \in V$:

$$B(\Phi(w)v_1, \Phi(w)v_2) = B(v_1, v_2)$$

Beweis. Da Φ ein Homomorphismus ist, reicht es die Invarianz für $I \subseteq W$ zu überprüfen. Für $i \in I$ gilt nun:

$$\begin{aligned} B(\Phi(i)(u), \Phi(i)(v)) &= B(\sigma_i(u), \sigma_i(v)) \\ &= B(u - 2B(u, b_i)b_i, v - 2B(v, b_i)b_i) \\ &= B(u, v) - B(2B(u, b_i)b_i, v) - B(u, 2B(v, b_i)b_i) \\ &\quad + B(2B(u, b_i)b_i, 2B(v, b_i)b_i) \\ &= B(u, v) - 2B(u, b_i)B(b_i, v) - 2B(v, b_i)B(u, b_i) \\ &\quad + 2B(u, b_i)2B(v, b_i)\underbrace{B(b_i, b_i)}_{=1} \\ &= B(u, v) - 4B(u, b_i)B(b_i, v) + 4B(v, b_i)B(u, b_i) \\ &= B(u, v) \end{aligned}$$

□

2.6 Wurzelsysteme

Definition 2.46. Wir betrachten für ein Coxetersystem (W, I) die geometrische Darstellung von W

$$W \xrightarrow{\Phi} GL(V)$$

mit $V = \mathbb{R}^I = \langle b_i \rangle_{i \in I}$. Wir schreiben für $w \in W$ und $i \in I$ kurz

$$w(b_i) := \Phi(w)(b_i).$$

Definition 2.47. Das *Wurzelsystem* von (W, I) ist die folgende Menge:

$$\tilde{\Phi} := \{w(b_i) \mid w \in W, i \in I\}$$

Die Elemente aus $\tilde{\Phi}$ heißen *Wurzeln*.

Bemerkung. Für $v \in \tilde{\Phi}$ gilt

1. $B(v, v) = 1$,
2. $-v \in \tilde{\Phi}$.

Beweis. Sei $w \in W$ und $i \in I$ mit $w(b_i) = v$.

1. $B(v, v) = B(w(b_i), w(b_i)) = B(b_i, b_i) = 1$.
2. $-w(b_i) = w(-b_i) = \Phi(w)(\sigma(b_i)) = \Phi(w)(\Phi(i)(b_i)) = \Phi(wi)(b_i)$

□

Beispiel 2.48. Wir betrachten die Diedergruppe

$$W = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^3 \rangle \cong D_3$$

und die zugehörige geometrische Darstellung

$$W \xrightarrow{\Phi} GL(\mathbb{R}^2)$$

mit der Basis $\mathbb{R}^2 = \langle b_i, b_j \rangle$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sigma_i(b_i) &= -b_i \\ \sigma_i(b_j) &= b_j - 2B(b_i, b_j)b_i = b_j + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)b_i = b_i + b_j \end{aligned}$$

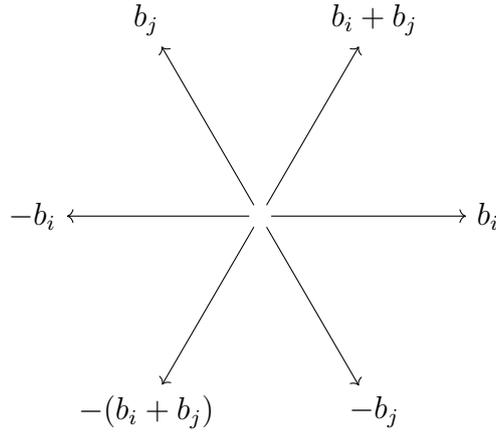
und analog gilt $\sigma_j(b_j) = -b_j$ sowie $\sigma_j(b_i) = b_j + b_i$. Man kann zeigen, dass wir als Wurzelsystem

$$\tilde{\Phi} = \{\pm b_i, \pm b_j, \pm(b_i + b_j)\}.$$

erhalten. Wir berechnen ferner den Winkel zwischen b_i und b_j . Es gilt

$$\cos \angle(b_i, b_j) = \frac{B(b_i, b_j)}{1} = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

und somit $\angle(b_i, b_j) = 120^\circ$. Wir erhalten die folgende geometrische Anschauung:



Definition 2.49. Wir definieren die Menge der positiven/negativen Wurzeln:

$$\tilde{\Phi}^+ := \{v \in \tilde{\Phi} \mid v = \sum_{i \in I} c_i b_i \text{ mit } c_i \geq 0 \forall i \in I\}$$

$$\tilde{\Phi}^- := \{v \in \tilde{\Phi} \mid v = \sum_{i \in I} c_i b_i \text{ mit } c_i \leq 0 \forall i \in I\}$$

Wir schreiben kurz

$$v > 0, \text{ falls } v \in \tilde{\Phi}^+,$$

$$v < 0, \text{ falls } v \in \tilde{\Phi}^-.$$

Beispiel 2.50.

1. Aus Beispiel 2.48 erhalten wir für D_3

$$\tilde{\Phi}^+ = \{b_i, b_j, b_i + b_j\}$$

$$\tilde{\Phi}^- = \{-b_i, -b_j, -b_i - b_j\}$$

und bemerken $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^+ \dot{\cup} \tilde{\Phi}^-$.

2. Betrachte $D_\infty = \langle i, j \mid i^2, j^2 \rangle \stackrel{\S 2.7}{=} \langle i \rangle \cdot \langle ij \rangle$. Wegen $(ij)^{-1} = ji$ hat jedes Element aus D_∞ somit die Form

$$(ij)^n, (ji)^n, i(ij)^n \text{ oder } i(ji)^n$$

für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir berechnen nun das Wurzelsystem. Es gilt

$$(ij)^n(b_i) = (\sigma_i \sigma_j)^n(b_i) \stackrel{Ind.}{=} (2n+1)b_i + 2nb_j$$

und damit erhalten wir $(ij)^n(b_i) \in \tilde{\Phi}^+$ für $n \geq 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} i(ij)^n(b_i) &= \sigma_i((2n+1)b_i + 2nb_j) \\ &= (2n+1)\sigma_i(b_i) + 2n\sigma_i(b_j) \\ &= (2n+1)(-b_i) + 2n(b_j - 2B(b_i, b_j)b_i) \\ &= (2n-1)b_i + 2nb_j \end{aligned}$$

und somit $i(ij)^n(b_i) \in \tilde{\Phi}^+$ für $n \geq 1$. Es lässt sich leicht nachrechnen, dass wir für D_∞ das folgende Wurzelsystem erhalten:

$$\tilde{\Phi} = \{kb_i + lb_j \mid k, l \in \mathbb{Z} : |k - l| = 1\}$$

Lemma 2.51. Für $w \in D_m = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle$ gilt

1. $l(w) \leq m$.
2. Wenn keine reduzierte Darstellung von w mit i endet, dann gilt $l(w) \leq m - 1$ und $w(b_i) > 0$.

Beweis. ÜA. □

Theorem 2.52. Sei $w \in W$ und $i \in I$ beliebig. Dann gilt

1. $l(wi) = l(w) + 1 \iff w(b_i) > 0$,
2. $l(wi) = l(w) - 1 \iff w(b_i) < 0$.

Beweis. Wir zeigen die Aussagen induktiv nach der Wortlänge von w .

1. Für $l(w) = 0$ gilt $w = 1$ und damit $w(b_i) = b_i > 0$.
Für den I.S. schreibe $w = i_1 \dots i_k$ mit $l(w) = k$. Damit gilt

$$l(wi_k) = l(w) - 1$$

und damit nach Voraussetzung $i \neq i_k$. Setze nun $J := \{i, i_k\}$ und betrachte

$$W_J \cong D_{m_{i_k i}}$$

Wir definieren die Menge

$$A := \{v \in W \mid v^{-1}w \in W_J, l(v) + l_J(v^{-1}w) = l(w)\}$$

und sehen, dass A wegen $w \in A$ nicht leer ist. Sei nun $v \in A$ mit minimaler Länge $l(v)$ und setze

$$v_0 := v^{-1}w \in W_J$$

Wir erhalten damit die Zerlegung $w = vv_0$ und

$$l(w) = l(v) + l_J(v_0).$$

Die Idee ist nun, die I.V. auf v und i anzuwenden. Dazu ist $l(v) < l(w)$ und $l(vi) = l(v) + 1$ zu zeigen. Zunächst gilt wegen

$$(wi_k)^{-1}w = i_k w^{-1}w = i_k \in W_J$$

und

$$l(wi_k) + l((wi_k)^{-1}w) = l(wi_k) + l(i_k) = (l(w) - 1) + 1 = l(w)$$

dass wi_k in A liegt. Wegen der Wahl von v gilt somit

$$l(v) \leq l(wi_k) = l(w) - 1$$

und somit $l(v) \leq l(w)$. Es bleibt zu zeigen, dass $l(vi) = l(v) + 1$ gilt. Angenommen das ist nicht so, dann gilt also $l(vi) = l(v) - 1$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
l(w) &= l(viiv^{-1}w) \\
&\leq l(vi) + l(iv^{-1}w) \\
&= l(v) - 1 + l(iv^{-1}w) \\
&\leq l(v) - 1 + l_J(iv^{-1}w) \\
&\leq l(v) - 1 + l_J(i) + l_J(v^{-1}w) \\
&= l(v) + l_J(v^{-1}w) \\
&= l(w)
\end{aligned}$$

und somit überall Gleichheit. Insbesondere erhalten wir

$$l(w) = l(vi) + l_J(iv + w)$$

und somit $vi \in A$. Da nun angenommen war, dass $l(vi) = l(v) - 1$ gilt, erhalten wir aber einen Widerspruch zur Minimalität von v .

Analog zeigt man $l(vi_k) = l(v) + 1$. Mit der *I.V.* erhalten wir

$$v(b_i), v(b_{i_k}) > 0.$$

Zurück zu $w(b_i)$: Es gilt nun mittels der Zerlegung für w dass

$$w(b_i) = v(v_0(b_i)).$$

Zudem wissen wir (wie im Beweis von Satz 2.43 gezeigt), dass $v_0(b_i) \in \langle b_i, b_{i_k} \rangle$. Daher gibt es $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$v_0(b_i) = xb_i + yb_{i_k}.$$

Somit erhalten wir

$$w(b_i) = v(xb_i + yb_{i_k}) = xv(b_i) + yv(b_{i_k})$$

Da nach obigen Rechnungen $v(b_i), v(b_{i_k}) > 0$ gilt, reicht es zu zeigen, dass für $v_0 = v^{-1}w \in W_J = \langle i, i_k \rangle$ gilt: $v_0(b_i) > 0$. Damit haben wir das Problem auf eine Diedergruppe runtergebrochen.

Nun gilt $l_J(v_0i) > l_J(v_0)$, denn angenommen das wäre nicht so, dann würde gelten:

$$\begin{aligned}
l(wi) &= l(vv^{-1}wi) \\
&\leq l(v) + l(v^{-1}wi) \\
&= l(v) + l(v_0i) \\
&\leq l(v) + l_J(v_0i) \\
&< l(v) + l_J(v_0) = l(w)
\end{aligned}$$

was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Die Behauptung folgt mit dem vorigen Lemma.

2. Wir setzen $w' = wi$. Aus der Voraussetzung $l(wi) = l(w) - 1$ folgt

$$l(w'i) = l(w) = l(wi) + 1 = l(w') + 1.$$

Damit erhalten wir nach (i)

$$0 < w'(b_i) = wi(b_i) = w(-b_i) = -w(b_i)$$

und damit wie gewünscht $w(b_i) < 0$.

□

Korollar 2.53. Die geometrische Darstellung $\Phi : W \rightarrow GL(V)$ ist treu.

Beweis. Sei $w \in \ker \Phi$. Angenommen w ist nicht trivial, dann gibt es $k \geq 1$ und $i_1, \dots, i_k \in I$ mit

$$w = i_1 \dots i_k$$

und $l(w) = k$. Nun gilt $l(wi_k) = l(w) - 1$ und mit dem Theorem 2.52 erhalten wir

$$w(b_{i_k}) < 0$$

aber andererseits gilt wegen $w \in \ker \Phi$

$$w(b_{i_k}) = \Phi(w)(b_{i_k}) = b_{i_k} > 0$$

was uns zu einem Widerspruch führt.

□

Korollar 2.54. Jede Wurzel aus $\tilde{\Phi}$ ist entweder positiv oder negativ, d.h. es gilt

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^+ \cup \tilde{\Phi}^-.$$

2.7 Parabolische Untergruppen

Sei (W, I) ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{i,j \in I}$

Definition 2.55. Für $J \subseteq I$ heißt die von J erzeugte Untergruppe

$$W_J := \langle J \rangle \leq W$$

eine *standard parabolische Untergruppe* von W .

Satz 2.56. (W_J, J) ist ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m|_{J \times J}$, d.h. es gilt

$$W_J = \langle J \mid (ij)^{m_{ij}} \ \forall i, j \in J \rangle.$$

Beweis. Sei (\overline{W}_J, J) das Coxetersystem mit Coxetermatrix $m|_{J \times J}$. Wir betrachten die Inklusionsabbildung $J \hookrightarrow W_J$ welche sich nach der (UE) zu einem Homomorphismus

$$\pi : \overline{W}_J \rightarrow W_J$$

fortsetzen lässt. Da W_J von J erzeugt wird, ist π surjektiv. Ohne Schwierigkeiten rechnet man nach, dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccccc}
 \overline{W}_J & \xrightarrow{\Phi} & GL(\langle b_j \rangle_{j \in J}) & \xleftarrow{\quad} & GL(V) \\
 & \searrow \pi & \uparrow \Psi|_{W_J} & & \uparrow \Psi \\
 & & W_J & \xleftarrow{\quad} & W
 \end{array}$$

Da die Darstellung $\Phi = \Psi|_{W_J} \circ \pi$ treu ist, muss nun aber schon π injektiv sein. \square

Satz 2.57. Für $w \in W_J$ gilt $l(w) := l_I(w) \stackrel{!}{=} l_J(w)$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage induktiv nach der Wortlänge $l(w)$.

I.A. $l(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1 \Leftrightarrow l_I(w) = 0$

I.S. Sei $k := l_J(w) > 0$ und $i_1, \dots, i_k \in J$ mit $w = i_1 \dots i_k$. Für $w' := w i_k$ gilt nun

$$l_J(w) = l_J(w' i_k) = l_J(w') + 1.$$

Mit Theorem 2.52 bzgl. (W_J, J) erhalten wir

$$w'(b_{i_k}) > 0$$

und wieder mit Theorem 2.52 aber bzgl. (W_I, I) weiter

$$l_I(w' i_k) = l_I(w') + 1$$

und somit

$$l_I(w) = l_I(w' i_k) = l_I(w') + 1 \stackrel{I.V.}{=} l_J(w') + 1 = l_J(w).$$

\square

2.8 Klassifikation sphärischer und affiner Coxetergruppen

Für die Klassifizierung der endlichen Coxetergruppen anhand des Coxetergraphen ist folgendes Resultat von entscheidender Bedeutung.

Theorem 2.58. Sei (W, I) ein irreduzibles Coxetersystem und $W \xrightarrow{\Phi} GL(V)$ die geometrische Darstellung bzgl. der konstruierten Bilinearform B . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. B ist positiv definit.
2. W ist eine endliche Gruppe.

Beweis. Wir beweisen zunächst die Richtung 1. \Rightarrow 2..

Schritt 1: Da B positiv definit ist, ist B ein Skalarprodukt. Wähle für V eine ONB und erhalte für $n := \#I$

$$W \rightarrow GL(V) \cong GL_n(\mathbb{R})$$

und damit auch

$$\Phi(W) \subseteq O(V) \cong O_n(\mathbb{R})$$

Wir betrachten $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ mit der induzierten Topologie. Damit ist $O_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe.

Schritt 2: Wir zeigen: $O_n(\mathbb{R})$ ist kompakt.

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in O_n(\mathbb{R})$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} AA^T &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \lim_{n \rightarrow \infty} A_n^T \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n A_n^T) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1} = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

und damit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Also ist $O_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen.

Für beliebiges $A \in O_n(\mathbb{R})$ betrachte die Zeilensummennorm. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \|A\| &:= \max\{\|A_j\|_1 \mid j = 1, \dots, n\} \\ &\leq \max\{K \cdot \|A_j\|_2 \mid j = 1, \dots, n\} \\ &\leq K \cdot \max\{\|A_j\|_2 \mid j = 1, \dots, n\} \\ &= K \cdot 1. \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile haben wir ausgenutzt, dass alle Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind. Aus demselben Grund erhalten wir damit, dass $O_n(\mathbb{R})$ nun auch bezüglich der euklidischen Norm beschränkt ist und nach Heine-Borel somit kompakt ist.

Schritt 3: Wir zeigen: $\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R})$ ist diskret.

Wir betrachten dazu den Dualraum V^* zu V , also

$$V^* = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ linear}\}.$$

Definiere für $w \in W$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi^*(w) : V^* &\rightarrow V^* \\ f &\mapsto f \circ \Phi(w^{-1}) \end{aligned}$$

Betrachte nun die zu Φ duale Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi^* : W &\rightarrow GL(V^*) \\ w &\mapsto \Phi^*(w) \end{aligned}$$

Ohne Mühe rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} \Theta : GL(V) &\rightarrow GL(V^*) \\ t &\mapsto [f \mapsto f \circ t^{-1}] \end{aligned}$$

ein Homöomorphismus ist und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 & W & \\
 \Phi \swarrow & & \searrow \Phi^* \\
 GL(V) & \xrightarrow{\cong \Theta} & GL(V^*)
 \end{array}$$

Damit ist auch Φ^* treu und es reicht nun zu zeigen, dass $\Phi^*(W) \subseteq GL(V^*)$ diskret ist. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned}
 H_i^+ &:= \{f \in V^* \mid f(b_i) > 0\} \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} V^* \\
 H_i^- &:= \{f \in V^* \mid f(b_i) < 0\} \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} V^* \\
 C &:= \bigcap_{i \in I} H_i^+ \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} V^*.
 \end{aligned}$$

Da $\Phi^*(W)$ eine topologische Gruppe ist, reicht es eine Umgebung $U_{\text{id}_{V^*}} \subseteq GL(V^*)$ zu finden mit

$$U_{\text{id}_{V^*}} \cap \Phi^*(W) = \{\text{id}_{V^*}\}.$$

Sei dazu $\xi \in C \neq \emptyset$ beliebig. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}
 \Psi : GL(V^*) &\rightarrow V^* \\
 g &\mapsto g(\xi).
 \end{aligned}$$

Man rechnet nach, dass Ψ stetig ist. Damit erhalten wir unseren Kandidaten

$$U_{\text{id}_{V^*}} := \Psi^{-1}(C) \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} GL(V^*).$$

Angenommen $U_{\text{id}_{V^*}} \cap \Phi^*(W) \neq \{\text{id}_{V^*}\}$. Dann gibt es $1 \neq w \in W$ mit $\Phi^*(w) \in U_{\text{id}_{V^*}}$. Sei $k = l(w)$ und $i_1, \dots, i_k \in I$ mit $w = i_1 \dots i_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 l(w^{-1}i_1) &= l((i_1w)^{-1}) \\
 &= l(i_1w) \\
 &< l(w) = l(w^{-1})
 \end{aligned}$$

und mit Theorem 2.52 erhalten wir $w^{-1}(b_{i_1}) < 0$. Also existieren $\lambda_i \leq 0$ mit

$$w^{-1}(b_{i_1}) = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \Phi^*(w)(\xi)(b_{i_1}) &= (\xi \circ \Phi(w^{-1}))(b_{i_1}) \\
 &= \xi(\Phi(w^{-1})(b_{i_1})) \\
 &= \xi\left(\sum_{i \in I} \lambda_i b_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i \xi(b_i)
 \end{aligned}$$

Nun gilt $\lambda_i \leq 0$ und $\xi(b_i) > 0$ also erhalten wir

$$\Phi^*(w)(\xi)(b_{i_1}) < 0,$$

damit $\Phi^*(w)(\xi) \notin C$ und somit einen Widerspruch.

Schritt 4: Wir zeigen: $H := \Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R}) =: G$ ist abgeschlossen.

Sei $(h_k)_k \in H$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $g \in G$. Betrachte die konvergente Folge

$$(h_k g^{-1})_k \rightarrow 1 \in H$$

Da H nach Schritt 3 diskret ist, existiert eine offene Umgebung $U \subseteq G$ von 1 mit $U \cap H = \{1\}$. Da

$$\phi : G \times G \rightarrow G, (g, h) \mapsto gh^{-1}$$

stetig ist, ist $\phi^{-1}(U) \subseteq G \times G$ offen. Es gibt also $(U_i)_i, (U_j)_j \subseteq G$ offen mit

$$\phi^{-1}(U) = \bigcup_{i,j} U_i \times U_j.$$

Da $(1, 1) \xrightarrow{\phi} 1$ existieren i_0 und j_0 mit $(1, 1) \in U_{i_0} \times U_{j_0}$. Wegen der Konvergenz von $(h_k g^{-1})_k$ gegen 1 gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq n_0$ gilt

$$h_k g^{-1} \in U_{i_0} \cap U_{j_0}.$$

Damit gilt nun aber für alle $k, l \geq n_0$

$$h_k g^{-1} (h_l g^{-1})^{-1} = h_k h_l^{-1} \in \phi(U_{i_0} \times U_{j_0}) \subseteq U.$$

Da nun $U \cap H = \{1\}$ gilt, folgt schon $h := h_k = h_l$ für alle $k, l \geq n_0$. Folglich konvergiert $(h_k)_k$ gegen $g = h \in H$.

Schritt 5: Wir zeigen: Y diskret + abgeschlossen, X kompakt und $Y \subseteq X \Rightarrow Y$ endlich. Für jedes $y \in Y$ wähle eine Umgebung U_y mit $U_y \cap Y = \{y\}$. Dann gilt

$$X = (X - Y) \cup \bigcup_{y \in Y} U_y = (X - Y) \cup \bigcup_{y \in Y_0} U_y$$

für eine endliche Teilmenge $Y_0 \subset Y$, da X kompakt ist. Wir erhalten

$$Y = \left(\bigcup_{y \in Y_0} U_y \right) \cap Y = \bigcup_{y \in Y_0} (U_y \cap Y) = \bigcup_{y \in Y_0} \{y\} = Y_0.$$

Schritt 6: Nun ist $\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R})$ nach Schritt 3 diskret und nach Schritt 4 abgeschlossen. Weiter ist $O_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ nach Schritt 2 kompakt. Mit Schritt 5 erhalten wir die Endlichkeit von $\Phi(W) \cong W$.

Wir beweisen nun die andere Richtung 2. \Rightarrow 1.

Wir betrachten dazu das *Radikal* der Bilinearform B :

$$\begin{aligned} V^\perp &:= \{v \in V \mid B(v, V) = 0\} \\ &= \{v \in V \mid \forall i \in I : B(v, b_i) = 0\} \end{aligned}$$

Für beliebige $w \in W, v \in V^\perp$ und $i \in I$ gilt

$$B(\Phi(w)(v), b_i) \stackrel{\Phi\text{-inv.}}{=} B(v, \Phi(w^{-1})(b_i)) = 0$$

und daher ist auch V^\perp Φ -invariant.

Schritt 1: Wir zeigen: $U \subsetneq V$ Φ -invariant $\Rightarrow U \subseteq V^\perp$.
 Betrachte die beiden Teilmengen

$$I_1 := \{i \in I \mid b_i \in U\}$$

$$I_2 := \{i \in I \mid b_i \notin U\} = I_1^c$$

Es gilt also $I = I_1 \cup I_2$ und $I_2 \neq \emptyset$ da $U \neq V$. Angenommen $I_1 \neq \emptyset$. Da (W, Φ) irreduzibel ist, gibt es dann $i_1 \in I_1$ und $i_2 \in I_2$, so dass die entsprechenden Ecken im Coxetergraphen verbunden sind, d.h. es gilt

$$B(b_{i_1}, b_{i_2}) \neq 0.$$

Da U Φ -invariant ist, gilt

$$U \ni \Phi(i_2)(b_{i_1}) = \sigma_{i_2}(b_{i_1}) = b_{i_1} - 2B(b_{i_1}, b_{i_2})b_{i_2}$$

und damit auch

$$2B(b_{i_1}, b_{i_2})b_{i_2} \in U.$$

Wegen $B(b_{i_1}, b_{i_2}) \neq 0$ erhalten wir damit den Widerspruch $b_{i_2} \in U$. Also wissen wir $I = I_2$ und damit enthält U keinen Basisvektor. Sei nun $u \in U$ beliebig. Dann gilt für beliebiges $i \in I$

$$U \ni \sigma_i(u) = u - 2B(u, b_i)b_i$$

und damit

$$2B(u, b_i)b_i = u - \sigma_i(u) \in U$$

Da b_i nicht in U liegt erhalten wir $B(u, b_i) = 0$ und da $i \in I$ beliebig war $u \in V^\perp$.

Schritt 2: Wir zeigen $V^\perp = \{0\}$.

Angenommen das ist nicht so. Wegen $B(b_i, b_i) = 1$ gilt $b_i \notin V^\perp$ und damit

$$\{0\} \subsetneq V^\perp \subsetneq V$$

Da V^\perp Φ -invariant ist, erhalten wir mit dem Satz von Maschke (Satz 2.39) einen weiteren Φ -invarianten Unterraum $U \subseteq V$ mit $V = V^\perp \oplus U$. Nach Schritt 1 wissen wir dann aber $U \subseteq V^\perp$ und erhalten somit einen Widerspruch.

Schritt 3: Wir halten hier nur fest, dass aus Schritt 1 und Schritt 2 direkt folgt, dass Φ irreduzibel ist.

Schritt 4: Konstruktion von \tilde{B} .

Mittels dem Standardskalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf $V \cong \mathbb{R}^{\#I}$ definieren wir:

$$\tilde{B} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, (v_1, v_2) \mapsto \frac{1}{\#W} \sum_{w \in W} \langle w(v_1), w(v_2) \rangle$$

Man rechnet nach, dass \tilde{B} W -invariant und positiv definit ist.

Schritt 5: Wir zeigen: B ist positiv definit.

Wir definieren die beiden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: V \rightarrow V^*, \quad x \mapsto B(x, _) \\ \tilde{f} &: V \rightarrow V^*, \quad x \mapsto \tilde{B}(x, _) \end{aligned}$$

Da $V^\perp, \tilde{V}^\perp = \{0\}$ sind f und \tilde{f} injektiv und aus Dimensionsgründen schon Isomorphismen. Wir definieren weiter den Isomorphismus $g := \tilde{f}^{-1} \circ f : V \rightarrow V$. Für $x, y \in V$ beliebig gilt nun

$$\begin{aligned} B(x, y) &= f(x)(y) \\ &= (\tilde{f} \circ g)(x)(y) \\ &= \tilde{f}(g(x))(y) = \tilde{B}(g(x), y). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} \tilde{B}(g(w(x)), y) &= B(w(x), y) \\ &= B(x, w^{-1}(y)) \\ &= \tilde{B}(g(x), w^{-1}(y)) \\ &= \tilde{B}(w(g(x)), y) \end{aligned}$$

Also gilt für jedes $y \in V$:

$$\tilde{B}(g(w(x)) - w(g(x)), y) = 0$$

und damit

$$g(w(x)) - w(g(x)) \in V^\perp = \{0\}$$

da \tilde{B} ein Skalarprodukt ist. Damit erhalten wir für jedes $x \in V$

$$g(w(x)) = w(g(x)).$$

und daher insbesondere für $x = b_i$ und beliebiges $i \in I$:

$$\begin{aligned} \sigma_i(g(b_i)) &= g(\sigma_i(b_i)) \\ &= g(-b_i) = -g(b_i) \end{aligned}$$

Also bildet die abstrakte Spiegelung σ_i den Vektor $g(b_i)$ auf $-g(b_i)$ ab. Daher gibt es ein $c \neq 0$ mit

$$g(b_i) = c \cdot b_i$$

und wir erhalten

$$b_i \in \ker(g - c \cdot \text{id}_V).$$

Nun rechnet man nach, dass dieser nichtleere Kern Φ -invariant ist. Da Φ irreduzibel ist erhalten wir

$$\ker(g - c \cdot \text{id}_V) = V \implies g = c \cdot \text{id}_V$$

und somit

$$B = c \cdot \tilde{B}.$$

Da nun \tilde{B} positiv definit ist und $1 = B(b_i, b_i)$ gilt, folgt bereits $c > 0$ und damit die positive Definitheit von B .

□

Nach diesem langen technischen Beweis können wir nun den ersten Teil unserer gewünschten Klassifizierung der endlichen Coxetergruppen durchführen.

Satz. Die in Theorem 2.23 aufgezählten Coxetergruppen sind endlich.

Beweis. Wir zeigen das hier für den Graphen $F_4 = \bullet \text{---} \bullet \overset{4}{\text{---}} \bullet \text{---} \bullet$.

Wir erhalten $I = \{i_1, i_2, i_3, i_4\}$ und die Coxetermatrix hat die Gestalt:

$$(m_{ij})_{i,j \in I} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Gram-Matrix der Bilinearform $B(b_i, b_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$ hat die Form

$$(B_{ij})_{i,j \in I} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} W(F_4) \text{ ist endlich} &\stackrel{2.58}{\iff} B \text{ ist positiv definit} \\ &\iff \text{Gram Matrix } (B_{ij}) \text{ ist positiv definit} \\ &\iff \text{Alle Hauptminoren sind positiv} \end{aligned}$$

und letzteres ist jetzt eine einfache Rechnung. □

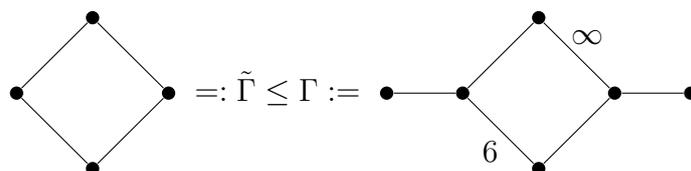
Für die andere Richtung von Theorem 2.23 benötigen wir die folgende Definition.

Definition 2.59. Seien $\Gamma, \tilde{\Gamma}$ Coxetergraphen mit Ecken I, \tilde{I} und Kantenbeschriftungen m_{ij} und \tilde{m}_{ij} . Wir nennen $\tilde{\Gamma}$ einen *Untergraphen* von Γ wenn gilt

1. $\tilde{I} \subseteq I$ und
2. $\tilde{m}_{ij} \leq m_{ij}$ für alle $i, j \in \tilde{I}$.

Wir schreiben dann kurz $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma$.

Beispiel 2.60.



Lemma 2.61. Seien $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma$ Coxetergraphen und \tilde{B}, B die zugehörigen Bilinearformen auf $\tilde{V} \leq V$. Sei nun $\lambda = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \in \tilde{V}$ mit $\lambda_i \geq 0$ für $i \in I$. Dann gilt

$$B(\lambda, \lambda) \leq \tilde{B}(\lambda, \lambda).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} B(\lambda, \lambda) - \tilde{B}(\lambda, \lambda) &= \sum_{i,j \in I} \lambda_i \lambda_j (B(b_i, b_j) - \tilde{B}(b_i, b_j)) \\ &= \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (B(b_i, b_j) - \tilde{B}(b_i, b_j)) + \sum_{i=j} \lambda_i \lambda_j \underbrace{(B(b_i, b_i) - \tilde{B}(b_i, b_i))}_{=1-1=0} \\ &= \sum_{i \neq j, m_{ij} \neq \infty} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\left(-\cos \frac{\pi}{m_{ij}} + \cos \frac{\pi}{\tilde{m}_{ij}} \right)}_{\leq 0 \text{ da } \tilde{m}_{ij} \leq m_{ij}} + \sum_{i \neq j, m_{ij} = \infty} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\left(-1 - \tilde{B}(b_i, b_j) \right)}_{\leq 0} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

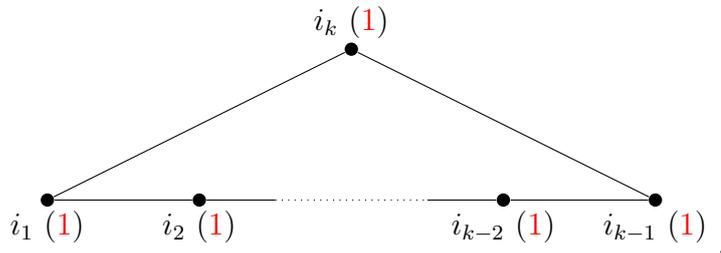
□

Nun sind wir bereit den fehlenden Teil von der Klassifizierung der endlichen Coxetergruppen zu beweisen.

Satz. Sei (W, I) ein irreduzibles Coxetersystem mit Coxetermatrix Γ . Wenn W endlich ist, ist Γ schon einer der Graphen wie in Theorem 2.23 angegeben.

Beweis.

1. Zunächst kann Γ keine Kante besitzen, welche mit ∞ beschriftet ist. Denn sonst würde W eine unendliche Diedergruppe $\langle i, j \rangle \cong D_\infty$ enthalten.
2. Γ ist ein **Baum**. Denn angenommen nicht, so betrachten wir den folgenden Untergraphen von Γ :



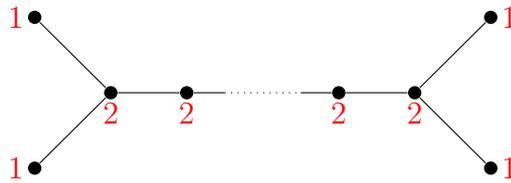
und setze $\lambda = \sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} b_{i_j} = \sum_{i=j}^k \mathbf{1} \cdot b_{i_j}$. Nun gilt

$$\tilde{B}(\lambda, \lambda) = \sum_{j=1}^k \underbrace{\tilde{B}(b_{i_j}, b_{i_j})}_{=1} + \sum_{j \neq l} \underbrace{\tilde{B}(b_{i_j}, b_{i_l})}_{\in \{0, \frac{1}{2}\}} = k - 2k \cdot \frac{1}{2} = 0$$

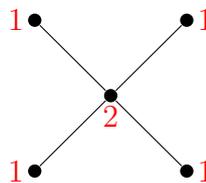
und nach dem vorigen Lemma ist B damit nicht positiv definit. Nach Theorem 2.58 wäre W somit unendlich.

3. Nun müssen wir uns Gedanken über die Gestalt dieses Baumes machen. Wir unterscheiden ihn anhand der Verzweigungspunkte.

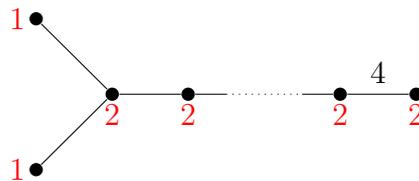
- Mehr als ein Verzweigungspunkt ist nicht möglich. Sonst betrachte folgenden Untergraphen:



- Nun der Fall, dass Γ genau einen Verzweigungspunkt hat. Dieser muss **Valenz 3** haben, denn sonst betrachte folgenden Untergraphen:

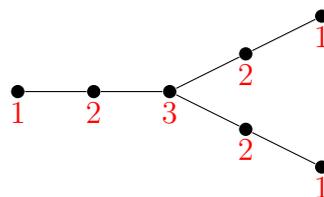


Alle Kanten sind **unbeschriftet**, denn sonst betrachte folgenden Untergraphen:



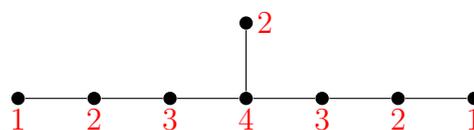
Nun müssen wir uns nur noch überlegen, wie lang die drei Arme von Γ jeweils sein können.

Zunächst muss **mindestens ein Arm Länge 1** hat. Denn sonst betrachte folgenden Untergraphen:

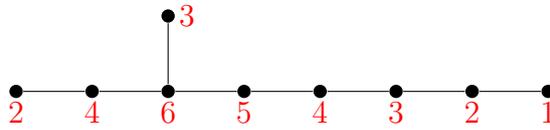


Nun kümmern wir uns um die anderen beiden Arme.

- Zunächst der Fall, dass ein zweiter Arm ebenfalls Länge 1 hat. Dann kann der übrige Arm beliebig lang sein und Γ ist D_n für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Nun der Fall, dass die beiden anderen Arme mindestens Länge 2 haben. Dann hat höchstens ein Arm Länge 3, denn sonst betrachte den folgenden Untergraphen:



Also hat der erste Arm Länge 1 und der zweite hat Länge 2. Nun kann der dritte Arm maximal Länge 4 haben, denn sonst betrachte den folgenden Untergraphen:

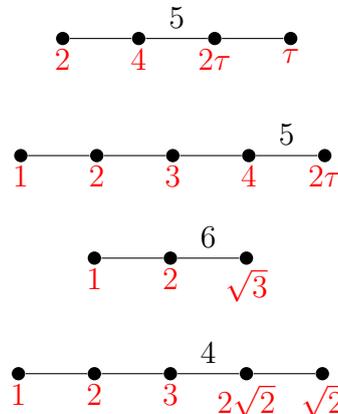


Damit hat der übrige Arm Länge 2,3 oder 4 und Γ ist damit E_6, E_7 oder E_8 .

- Nun der Fall, dass es keinen Verzweigungspunkt gibt. Wir unterscheiden, wie viele Kanten beschriftet sind.
 - Es ist **höchstens eine Kante beschriftet**, denn sonst betrachte den folgenden Untergraphen:



- Wenn keine Kante beschriftet ist, erhalten wir $\Gamma = A_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
- Wenn genau eine Kante beschriftet ist, sind folgende Untergraphen ebenfalls verboten, wobei $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:



Damit bleiben für Γ nur B_n, F_n, G_2, H_3, H_4 und $I_2(m)$ übrig.

□

Damit haben wir Theorem 2.23 nun bewiesen und damit die Klassifizierung der endlichen Coxetergruppen abgeschlossen. Man kann mithilfe der Bilinearform nun noch viele andere schöne Coxetergruppen klassifizieren.

Definition 2.62. Sei (W, I) ein irreduzibles Coxetersystem und $\Phi : W \rightarrow GL(V)$ die geometrische Darstellung bzgl. der Bilinearform B . Wir nennen W eine *affine* (oder auch *euklidische*) Coxetergruppe, falls B positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist.

Lemma 2.63. Sei (W, I) irreduzibel und B positiv semidefinit. Dann gilt:

1. $V^\perp = \{v \in V \mid B(v, v) = 0\}$,
2. $x = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \in V^\perp - \{0\} \implies \forall i \in I : \lambda_i \neq 0$.

Beweis.

1. Sei A die Gram-Matrix von B bzgl. $(b_i)_{i \in I}$. Dann gilt

$$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Wir definieren nun

$$N := \{v \in V \mid B(v, v) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Ax = 0\}.$$

Offensichtlich gilt $V^\perp \subseteq N$. Zu zeigen bleibt $N \subseteq V^\perp$. A ist symmetrisch und positiv semidefinit, also existiert eine Diagonalmatrix $D = (d_1, \dots, d_n)$ mit $d_i \geq 0$ und eine orthogonale Matrix P mit

$$D = P^T A P.$$

Beh: $y^T D y = 0 \implies D y = 0$.

Bew: Es gilt

$$0 = y^T D y = \sum_{i=1}^n \underbrace{d_i}_{\geq 0} \underbrace{y_i^2}_{\geq 0}.$$

Damit folgt für alle $i = 1, \dots, n$. aber schon $d_i y_i^2 = 0$ und somit $d_i = 0$ oder $y_i = 0$ und somit erhalten wir

$$D y = \sum_{i=1}^n d_i y_i = 0.$$

Sei nun $x \in N$ beliebig. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (P^T x)^T D (P^T x) &= x^T P D P^T x \\ &= x^T P (P^T A P) P^T x \\ &= x^T A x = 0 \end{aligned}$$

Mit der Hilfsbehauptung folgt somit schon

$$0 = D (P^T x) = (D P^T) x = (P^T A) x = P^T (A x)$$

und da P^T bijektiv ist, erhalten wir wie gewünscht $Ax = 0$.

2. Sei $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i \in V^\perp - \{0\}$ beliebig.

Schritt 1: Wir zeigen: $w := \sum_{i=1}^n |\lambda_i| b_i \in V^\perp$.

Es gilt $B(b_i, b_j) \leq 0$ für $i \neq j$. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 \leq B(w, w) &= \sum_{i,j} |\lambda_i| |\lambda_j| B(b_i, b_j) \\ &\leq \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j B(b_i, b_j) \\ &= B(v, v) \stackrel{(i)}{=} 0. \end{aligned}$$

und mit (i) erhalten wir $w \in V^\perp$.

Schritt 2: Wir zeigen für alle $i = 1, \dots, n$: $\lambda_i \neq 0$.

Wir betrachten

$$J := \{j \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_j \neq 0\}$$

und $\tilde{J} = \{1, \dots, n\} - J$. Wegen $v \neq 0$ gilt $J \neq \emptyset$. Angenommen $\tilde{J} \neq \emptyset$, dann sei $i \in \tilde{J}$. Wegen $w \in V^\perp$ gilt

$$0 = B(w, b_i) = \sum_{j \in J} \underbrace{|\lambda_j|}_{>0} \underbrace{B(b_i, b_j)}_{\leq 0}$$

und somit erhalten wir $B(b_i, b_j) = 0$ für alle $j \in J$. Damit gilt $m_{ij} = 2$ für alle $i \in \tilde{J}$ und $j \in J$. Das ist aber ein Widerspruch zur Irreduzibilität von Γ .

□

Lemma 2.64. Sei (W, I) irreduzibel und B positiv semidefinit. Dann ist jeder echte Untergraph $\tilde{\Gamma} \subsetneq \Gamma$ positiv definit. (D.h. die entsprechende Bilinearform.)

Beweis. Sei $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma$ ein Untergraph mit nicht positiv definiten Bilinearform \tilde{B} . Wir müssen zeigen, dass schon $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ gilt. Es existiert also ein von 0 verschiedener Vektor

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i b_i \in \tilde{V} \subseteq V$$

mit $\tilde{B}(v, v) \leq 0$. Für $w = \sum_{i \in I} |\lambda_i| b_i \in V$ gilt nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq B(w, w), \quad (B \text{ positiv semidefinit}) \\ &\leq \tilde{B}(w, w), \quad (\text{Lemma 2.61}) \\ &\leq \tilde{B}(v, v), \quad (\text{wie in Beweis von Lemma 2.61}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Also gilt überall die Gleichheit.

- Wegen $B(w, w) = 0$ erhalten wir $w \in V^\perp$ und somit $|\lambda_i| \neq 0$ für alle $i \in I$ nach Lemma 2.63. Damit stimmen die Eckenmengen also überein.
- Wegen $B(w, w) = \tilde{B}(w, w)$ gilt also auch $m_{ij} = \tilde{m}_{ij}$.

Insgesamt erhalten wir also $\tilde{\Gamma} = \Gamma$.

□

Theorem 2.65 (Klassifikation der irreduziblen affinen Coxetersysteme).
 Sei (W, I) ein irreduzibles Coxetersystem und Γ der zugehörige Coxetergraph. Dann ist äquivalent:

1. W ist affin.
2. Γ ist einer der folgenden affinen Coxetergraphen:

Bezeichnung	Graph
\tilde{A}_1	
\tilde{A}_n ($n \geq 2$)	
$\tilde{B}_2 = \tilde{C}_2$	
\tilde{B}_n ($n \geq 3$)	
\tilde{C}_n ($n \geq 3$)	
\tilde{D}_n ($n \geq 4$)	
\tilde{E}_6	
\tilde{E}_7	
\tilde{E}_8	
\tilde{F}_4	
\tilde{G}_2	

Bemerkung. Sei (W, I) ein irreduzibles endliches Coxetersystem. Dann nennt man W auch *sphärisch*. Die Motivation hinter den Namensgebungen sphärisch und affin werden wir in Kapitel 3 erkunden.

2.9 Deletion und Exchange Condition

Definition 2.66. Sei G eine Gruppe und $I \subseteq G$ ein Erzeugendensystem aus Involutionen. Wir definieren die beiden folgenden Bedingungen:

(D) **Deletion Condition:** Seien $i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ mit $l_I(w) < q$. Dann existieren $1 \leq r < s \leq q$ mit

$$w = i_1 \dots \hat{i}_r \dots \hat{i}_s \dots i_q$$

(E) **Exchange Condition:** Seien $i, i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ mit $l_I(w) = q$. Dann gilt entweder $l(wi) = l(w) + 1$ oder es existiert $1 \leq r \leq q$ mit

$$w = i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_q i$$

Dabei bedeutet $\hat{}$ das Weglassen des jeweiligen Symbols.

Satz 2.67. Sei $G = \langle I \rangle$ von Involutionen erzeugt. Dann sind die Bedingungen (D) und (E) äquivalent.

Beweis.

(D) \Rightarrow (E): Sei $l(wi) \neq l(w) + 1$. Für $i_{q+1} := i$ gilt dann

$$wi = i_1 \dots i_q i_{q+1} \stackrel{(D)}{=} i_1 \dots \hat{i}_r \dots \hat{i}_s \dots i_q i_{q+1}.$$

Wegen $l(w) = q$ folgt $s = q + 1$ also gilt

$$wi = i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_q \hat{i}_{q+1} = i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_q$$

und damit:

$$w = i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_q i$$

(E) \Rightarrow (D): Wegen $l(w) < q$ existiert $j \in \{1, \dots, q\}$ mit $l(i_1 \dots i_j) = j$ und $l(i_1 \dots i_j i_{j+1}) < j + 1$. Wende nun (E) auf $i_1 \dots i_j$ und $i := i_{j+1}$ an. Es existiert also ein $1 \leq r \leq j$ mit

$$i_1 \dots i_j = i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_j i_{j+1}$$

und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w &= (i_1 \dots i_j)(i_{j+1} \dots i_q) \\ &= (i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_j i_{j+1})(i_{j+1} \dots i_q) \\ &= i_1 \dots \hat{i}_r \dots i_j \hat{i}_{j+1} i_{j+2} \dots i_q \end{aligned}$$

□

Lemma 2.68. Sei (W, I) ein Coxetersystem. Für $i \in I$ gilt dann

$$\sigma_i(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}) = \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}.$$

Beweis. Sei $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \in \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}$. Also gilt $\lambda_j \geq 0$ für alle $j = 1, \dots, n$. Zunächst ist v kein Vielfaches von b_i , denn es gilt $B(v, v) = 1$ und somit

$$\tilde{\Phi}^+ \cap \langle b_i \rangle = \{b_i\}.$$

Wegen $v \neq b_i$ gibt es mindestens ein $j \neq i$ mit $\lambda_j > 0$. Nun gilt

$$\sigma_i(v) = v - 2B(v, b_i)b_i$$

und daher unterscheiden sich v und $\sigma_i(v)$ nur in den Koeffizienten von b_i . Insbesondere stimmen die Koeffizienten bei b_j überein. Da jede Wurzel entweder positiv oder negativ ist und $\lambda_j > 0$ folgt schon $\sigma_i(v) \in \tilde{\Phi}^+$. Nun gilt $\sigma_i(v) \neq b_i$, denn

$$\sigma(b_i) = -b_i \neq v$$

und σ_i ist eine abstrakte Spiegelung; hat also Ordnung 2. Insgesamt erhalten wir

$$\sigma_i(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}) \subseteq \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}$$

und durch Anwenden von $\sigma_i^{-1} = \sigma_i$ folgt schon die Gleichheit. \square

Wir betrachten nun die Menge:

$$T := \{w i w^{-1} \mid w \in W, i \in I\}$$

Jedes Element aus T ist eine abstrakte Spiegelung unter der geometrischen Darstellung Φ . Wir setzen

$$\sigma_{w(b_i)}(v) := w i w^{-1}(v) = v - 2B(v, w(b_i))w(b_i).$$

Lemma 2.69. Seien $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}^+$ und $w \in W$ mit $w(\alpha) = \beta$. Dann gilt

$$w\sigma_\alpha w^{-1} = \sigma_\beta$$

Beweis. Wir schreiben $\alpha = x(b_i)$ und $\beta = y(b_j)$ und erhalten nach Voraussetzung

$$(wx)(b_i) = w(\alpha) = \beta = y(b_j)$$

und somit gilt $w^{-1}y(b_j) = x(b_i)$. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} w\sigma_\alpha w^{-1}(\beta) &= w\sigma_\alpha(w^{-1}y(b_j)) \\ &= wxix^{-1}x(b_i) \\ &= wx(i(b_i)) \\ &= -wx(b_i) = -y(b_j) \end{aligned}$$

Also gilt

$$w\sigma_\alpha w^{-1}(\beta) = -\beta$$

und somit

$$w\sigma_\alpha w^{-1} = \sigma_\beta.$$

\square

Satz 2.70. In jeder Coxetergruppe (W, I) gelten die Bedingungen (D) und (E).

Beweis. Nach Satz 2.67 reicht es zu zeigen, dass (E) in W gilt. Seien also $i, i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ mit $l(w) = q$ und $l(wi) \neq l(w) + 1$. Damit gilt also $l(wi) = l(w) - 1$ und mit Theorem 2.52 erhalten wir $w(b_i) < 0$. Sei nun $1 \leq r \leq q - 1$ mit

$$\begin{aligned} i_{r+1} \dots i_q(b_i) &> 0 \text{ und} \\ i_r i_{r+1} \dots i_q(b_i) &< 0. \end{aligned}$$

Mit Lemma 2.68 erhalten wir

$$i_{r+1} \dots i_q(b_i) = b_{i_r}$$

und mit Lemma 2.69

$$i_{r+1} \dots i_q i i_q \dots i_{r+1} = i_r.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w &= i_1 \dots (i_r) \dots i_q \\ &= i_1 \dots i_{r-1} (i i_{r+1} \dots i_q i i_q \dots i_{r+1}) i_{r+1} \dots i_q \\ &= i_1 \dots i_{r-1} \overset{\wedge}{i_r} i_{r+1} \dots i_q i. \end{aligned}$$

□

Man kann nun zeigen, dass diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für die Klasse der Coxetergruppen sind. Dieses folgende Resultat werden wir in der Vorlesung aber nicht beweisen, da der Beweis sehr kombinatorisch und technisch ist.

Theorem 2.71 (Charakterisierung von Coxetergruppen). Sei $G = \langle I \rangle$ eine von Involutionen erzeugte Gruppe. Dann ist äquivalent:

1. (G, I) ist ein Coxetersystem,
2. (E) gilt in G ,
3. (D) gilt in G .

Ohne Beweis.

Satz 2.72. Sei (W, I) ein Coxetersystem und $J, K \subseteq I$. Dann gilt:

1. $W_J = W_K \Leftrightarrow J = K$,
2. $W_{J \cap K} = W_J \cap W_K$,
3. $W_J \subseteq W_K \Leftrightarrow J \subseteq K$.

Beweis. ÜA.

□

3 Gebäude

3.1 Gebäude als Kammersysteme

Wir erinnern zunächst an die folgende Definition:

Definition.

1. Ein *Kammersystem* über eine Indexmenge I ist eine Menge K mit einer Äquivalenzrelation \sim_i für alle $i \in I$. Die Elemente in K heißen *Kammern*.
2. Eine *Galerie* in K ist eine endliche Folge von Kammern (c_0, \dots, c_m) mit $c_k \neq c_{k+1}$ und $c_k \sim_{i_k} c_{k+1}$ für alle $k \leq m-1$.

Definition 3.1. Seien Δ_1, Δ_2 zwei Kammersysteme über I . Eine Abbildung

$$f : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$$

heißt *Kammern-Homomorphismus*, falls für alle $i \in I$ und $c, c' \in \Delta_1$ gilt:

$$c \sim_i c' \Rightarrow f(c) \sim_i f(c')$$

Definition 3.2.

1. Sei $M = (m_{ij})$ eine Coxetermatrix (bzw. Γ ein Coxetergraph) und (W, I) das zugehörige Coxetersystem. Ein *Gebäude vom Typ M* (bzw. Γ) ist ein Kammersystem Δ über i mit einer *Abstandsfunktion*

$$\delta : \Delta \times \Delta \rightarrow W$$

mit den Eigenschaften:

- (G1) Jede Äquivalenzklasse jeder Äquivalenzrelation \sim_i von Δ enthält mindestens zwei Elemente.
- (G2) Seien $x, y \in \Delta$ und $w = i_1 \dots i_k$ mit $l(w) = k$. Dann gilt:

$$\delta(x, y) = w \Leftrightarrow \exists \text{ Galerie } : x \rightsquigarrow y \text{ vom Typ } (i_1, \dots, i_k)$$

Reduzierte Worte beschreiben also genau die Gallerien in Δ . Wir nennen $\#I$ den *Rang* des Gebäudes (Δ, δ) .

2. Ein Gebäude heißt *dick* (bzw. *dünn*), wenn jede Äquivalenzrelation \sim_i von Δ mindestens drei (bzw. genau zwei) Elemente enthält.

Bemerkung. Setzte man in (G2) $w = 1$ oder $w = i \in I$ erhält man:

- $\delta(x, y) = 1 \Leftrightarrow x = y$
- $\delta(x, y) = i \Leftrightarrow x \sim_i y \wedge x \neq y$

Also bestimmt das Paar (Δ, δ) die Äquivalenzrelationen \sim_i und damit das Kammersystem.

Damit erhalten wir eine alternative Definition für Gebäude:

Definition 3.3. Ein Gebäude vom Typ M (bzw. Γ) ist eine Menge Δ mit einer Abbildung $\delta : \Delta \times \Delta \rightarrow W$ mit den Eigenschaften:

(G1') Für alle $i \in I$ ist durch

$$x \sim_i y :\Leftrightarrow \delta(x, y) \in \{1, i\}$$

eine Äquivalenzrelation auf Δ definiert und jede Äquivalenzklasse enthält mindestens zwei Elemente.

(G2) wie vorher.

Wir wollen nun verstehen, zu welchen Coxetermatrizen/-graphen es dicke bzw. dünne Gebäude gibt. Zunächst kümmern wir uns um die dünnen Gebäude:

Beispiel 3.4. Sei M eine Coxetermatrix und (W, I) das zugehörige Coxetersystem. Wir definieren

$$\begin{aligned} \delta_W : W \times W &\rightarrow W \\ (x, y) &\mapsto x^{-1}y \end{aligned}$$

Dann ist (W, δ_W) ein dünnes Gebäude vom Typ M .

Beweis. (G1) Seien $x, y \in W$ und $i \in I$ beliebig. Dann ist

$$x \sim_i y :\Leftrightarrow x^{-1}y \in \{1, i\}$$

eine Äquivalenzrelation und jede Äquivalenzklasse enthält genau die beiden Elemente $\{x, xi\}$.

(G2) Seien $x, y \in W$ und $w = i_1 \dots i_k \in W$ beliebig mit $l(w) = k$. Dann gilt

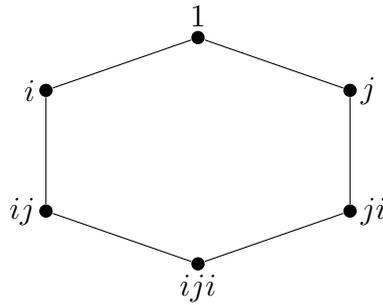
$$\begin{aligned} \delta(x, y) = x^{-1}y = w = i_1 \dots i_k \\ \Leftrightarrow y = xi_1 \dots i_k \\ \Leftrightarrow (x, xi_1, \dots, xi_1 \dots i_k) \text{ ist eine Galliere von } x \text{ nach } y \text{ vom Typ } (i_1, \dots, i_k) \end{aligned}$$

□

Definition 3.5. Sei Δ ein Kammernsystem über I . Der *Kammerngraph* Γ_Δ ist der folgende Graph:

- Ecken: $V(\Gamma_\Delta) := \Delta$
- Kanten: $E(\Gamma_\Delta) := \{\{x, y\} \mid x \neq y, \exists i \in I : x \sim_i y\}$

Beispiel. Wir betrachten den Kammerngraph zu (D_3, δ_{D_3}) :



Bemerkung.

1. Galerien in $(\Delta, \sim_{i \in I})$ entsprechen genau den Wegen in Γ_Δ .
2. $(\Delta, \sim_{i \in I})$ ist genau dann zusammenhängend, wenn Γ_Δ es ist.

Definition 3.6. Sei $(\Delta, \sim_{i \in I})$ ein Kammernsystem über I und Γ_Δ der Kammerngraph. Wenn

$$\begin{aligned} \Psi : E(\Gamma_\Delta) &\rightarrow I \\ \{x, y\} &\mapsto i \text{ mit } x \sim_i y \end{aligned}$$

wohldefiniert ist, dann heißt Ψ die *Kantenfärbung* von Γ_Δ .

Bemerkung. Für Gebäude ist die Färbung Ψ wohldefiniert.

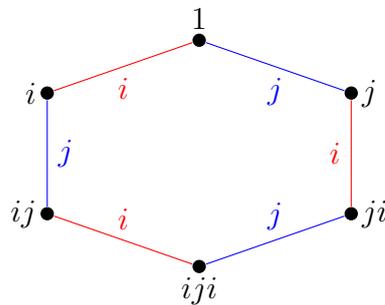
Beweis. Sei (Δ, δ) ein Gebäude von Typ M . Seien $x, y \in \Delta$ mit $x \neq y$, $x \sim_i y$ und $x \sim_j y$. Dann gilt schon

$$j = \delta(x, y) = i.$$

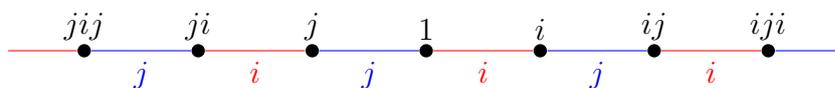
□

Beispiel.

1. Wir betrachten die Kantenfärbung zu (D_3, δ_{D_3}) :



2. Nun betrachten wir die Kantenfärbung zu $(D_\infty, \delta_{D_\infty})$:



Definition 3.7. Ein *Homomorphismus* zwischen zwei Gebäuden $(\Delta, \delta), (\Delta', \delta')$ vom gleichen Typ, ist eine Abbildung $f : \Delta \rightarrow \Delta'$, so dass für alle $x, y \in \Delta$ gilt:

$$\delta(x, y) = \delta'(f(x), f(y))$$

Falls f zudem bijektiv ist, nennen wir f einen *Isomorphismus*. (Die Umkehrabbildung ist auch ein Homomorphismus(!))

Satz 3.8. Seien $(\Delta, \delta), (\Delta', \delta')$ Gebäude vom gleichen Typ und $\Delta \xrightarrow{f} \Delta'$ eine injektive Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist ein Gebäude-Homomorphismus.
2. f ist ein Kammern-Homomorphismus.

Beweis.

1. \Rightarrow 2. Seien $x, y \in \Delta$ und $i \in I$ mit $x \sim_i y$. Dann gilt nach (G1') $\delta(x, y) \in \{1, i\}$ und wegen 1. erhalten wir $\delta'(f(x), f(y)) \in \{1, i\}$. Wieder nach (G1') erhalten wir somit $f(x) \sim_i f(y)$.
2. \Rightarrow 1. Seien $x, y \in \Delta$ mit $x \neq y$. Schreibe $\delta(x, y) = w = i_1 \dots i_m$ mit $l(w) = m > 0$. Nach (G2) existiert eine Gallerie $(x = c_0, \dots, c_k = y)$ vom Typ (i_1, \dots, i_k) . Wir erhalten:

$$\begin{aligned} x &\sim_{i_1} c_1 \sim_{i_2} \dots \sim_{i_{k-1}} c_{k-1} \sim_{i_k} y \\ \Rightarrow f(x) &\sim_{i_1} f(c_1) \sim_{i_2} \dots \sim_{i_{k-1}} f(c_{k-1}) \sim_{i_k} f(y) \end{aligned}$$

Wegen der Injektivität von f ist $(f(x) = f(c_0), \dots, f(c_k) = f(y))$ damit eine Gallerie vom Typ (i_1, \dots, i_k) und damit erhalten wir

$$\delta'(f(x), f(y)) = i_1 \dots i_k = \delta(x, y).$$

□

Lemma 3.9 (Einfache Eigenschaften von Gebäuden). Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ M und (W, I) das zugehörige Coxetersystem. Dann gilt:

1. Δ ist zusammenhängend.
2. Für $x \in \Delta$ ist $\delta(x, -) : \Delta \rightarrow W$ surjektiv.
3. Für $x, y \in \Delta$ gilt: $\delta(x, y) = \delta(x, y)^{-1}$.

Beweis.

1. Seien $x, y \in \Delta$ und schreibe $\delta(x, y) = w = i_1 \dots i_m$ mit $l(w) = m$. Nach (G2) gibt es eine Gallerie $x \rightsquigarrow y$ vom Typ (i_1, \dots, i_m) .
2. Sei $w \in W$ beliebig und schreibe $w = i_1 \dots i_m$ mit $l(w) = m$. Wir setzten $c_0 := x$ und induktiv wähle $c_k \in [c_{k-1}]_{i_k} - \{c_{k-1}\}$ (Das ist möglich wegen G2). Dann ist (c_0, \dots, c_m) eine Gallerie vom Typ (i_1, \dots, i_m) und nach (G2) gilt somit $\delta(x, c_m) = w$.

3. Seien $x, y \in \Delta$ beliebig und schreibe $\delta(x, y) = w = i_1 \dots i_m$ mit $l(w) = m$. Nach (G2) existiert eine Gallerie $(x = c_0, \dots, c_m = y)$ vom Typ (i_1, \dots, i_m) . Dann ist natürlich $(y = c_m, \dots, c_0 = x)$ eine Gallerie vom Typ (i_m, \dots, i_1) . Damit erhalten wir

$$\delta(y, x) = i_k \dots i_1 = (i_1 \dots i_k)^{-1} = \delta(x, y)^{-1}.$$

□

3.2 Klassifikation dünner Gebäude

Satz 3.10. *Sei (Δ, δ) ein dünnes Gebäude vom Typ M und (W, I) das zugehörige Coxetersystem. Dann gilt:*

$$(\Delta, \delta) \cong (W, \delta_W).$$

Genauer gibt es für jedes $a \in \Delta$ genau einen Isomorphismus

$$\phi : (\Delta, \delta) \rightarrow (W, \delta_W) \text{ mit } a \mapsto 1,$$

nämlich $\phi = \delta(a, -)$.

Beweis.

Schritt 1: Wir zeigen: $\phi = \delta(a, -)$ ist eine Bijektion.

Nach Lemma 3.9 ist ϕ surjektiv. Seien $x, y \in \Delta$ mit $\phi(x) = \phi(y) =: w$. Schreibe

$$\delta(a, x) = \delta(a, y) = w = i_1 \dots i_m$$

mit $l(w) = m$. Nach (G2) existieren Gallerien

$$(a, c_1, \dots, c_m = x), (a, c'_1, \dots, c'_m = y)$$

vom Typ (i_1, \dots, i_m) . Damit gilt $c_1 \sim_{i_1} a \sim_{i_1} c'_1$ und $c'_1 \neq a \neq c_1$. Da Δ dünn ist, folgt somit bereits $c_1 = c'_1$ und induktiv $x = c_m = c'_m = y$.

Schritt 2: Wir zeigen: ϕ ist ein Kammern-Homomorphismus.

Seien $x, y \in \Delta$ mit $x \neq y$ und $x \sim_i y$ beliebig. Sei $\delta(a, x) = w = i_1 \dots i_m$ mit $l(w) = m$. Nach (G2) existiert eine Gallerie $(a, c_1, \dots, c_m = x)$ vom Typ (i_1, \dots, i_m) .

Falls $l(i_1 \dots i_m i) = m + 1$ gilt, ist $(a, c_1, \dots, c_m = x, y)$ eine Gallerie von a nach y vom Typ (i_1, \dots, i_m, i) . Nach (G2) folgt:

$$\begin{aligned} \delta(a, y) &= i_1 \dots i_m i = \delta(a, x) i \\ \implies \delta(a, x)^{-1} \delta(a, y) &= i \\ \xrightarrow{\text{Def.}} \delta(a, x) &\sim_i \delta(a, y) \end{aligned}$$

Falls $l(i_1 \dots i_m i) = m - 1$ gilt, existiert nach (E) ein $1 \leq k \leq m$ mit

$$i_1 \dots i_m = i_1 \dots \overset{\wedge}{i_k} \dots i_m i.$$

Da $l(i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_m i) = m$ existiert nach (G2) eine Gallerie (a, c_1, \dots, c_m) vom Typ $(i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_m, i)$. Es gilt nun

$$c_{m-1} \sim_i x \sim_i y \text{ und } c_{m-1} \neq x \neq y$$

und da Δ dünn ist, folgt bereits $c_{m-1} = y$. Damit erhalten wir

$$\delta(a, y) = i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_m = i_1 \dots i_m i = \delta(a, x) i$$

und somit wie im ersten Fall $\delta(a, y) \sim_i \delta(a, x)$.

Schritt 3: Wir zeigen: ϕ ist eindeutig mit $a \mapsto 1$.

Sei $(\Delta, \delta) \xrightarrow{f} (W, \delta_W)$ ein weiterer Isomorphismus mit $a \mapsto 1$. Dann ist

$$f \circ \phi^{-1} : W \rightarrow W$$

ein (Gebäude-)Isomorphismus mit $1 \mapsto a \mapsto 1$. Sei nun $w \in W$ beliebig. Dann gilt einerseits

$$\delta_W\left(f \circ \phi^{-1}(1), f \circ \phi^{-1}(w)\right) = \delta_W(1, f \circ \phi^{-1}(w)) = f \circ \phi^{-1}(w)$$

nach Definition von δ_W . Andererseits ist $f \circ \phi^{-1}$ ein Homomorphismus und somit gilt:

$$\delta_W\left(f \circ \phi^{-1}(1), f \circ \phi^{-1}(w)\right) = \delta_W(1, w) = w$$

Also erhalten wir $f \circ \phi^{-1} = id_W$ und damit die Eindeutigkeit. □

Bemerkung 3.11. Wir haben in Schritt 1 gesehen, dass die Gallerien in dünnen Gebäuden eindeutig durch Startpunkt und Typ festgelegt sind.

Definition 3.12. Wir nennen ein Gebäude (Δ, δ) vom Typ Γ

- *sphärisch* : $\Leftrightarrow W(\Gamma)$ ist endlich,
- *irreduzibel* : $\Leftrightarrow \Gamma$ ist zusammenhängend.

Bemerkung. Seien $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ die Zusammenhangskomponenten von Γ . Wir werden später sehen, dass Δ dann isomorph zu einem direkten Produkt

$$\Delta_1 \times \dots \times \Delta_k$$

von Gebäuden Δ_i vom Typ Γ_i ist.

Satz 3.13. *Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 2 Elementen. Dicke Gebäude vom A_1 sind Mengen mit mindestens 3 Elementen.*

Beweis. Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ A_1 . Dann hat die Äquivalenzklasse von \sim_i mindestens 2 Elemente. Andererseits ist durch

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ i, & x \neq y \end{cases}$$

auf jeder Menge Δ mit mindestens zwei Elementen eine A_1 -Gebäudestruktur gegeben. □

3.3 Gebäude vom Rang 2

Nun wollen wir die Gebäude vom Typ $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ (also A_2, B_2, G_2 und $I_2(m)$) verstehen. Wir werden sehen, dass diese Gebäude zu verallgemeinerten m -Ecken gehören. Dazu benötigen wir zunächst ein wenig Graphentheorie.

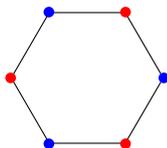
Definition 3.14. Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ besteht aus einer Eckenmenge V und einer Kantenmenge $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ mit $\#e = 2$ für alle $e \in E$. Insbesondere sind Graphen bei uns ungerichtet, schleifenfrei und ohne Doppelkanten.

Definition 3.15. Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt *bipartit*, falls es eine Partition $V = V_1 \sqcup V_2$ der Eckenmenge gibt, so dass für alle Kanten $e = \{v, w\}$ gilt:

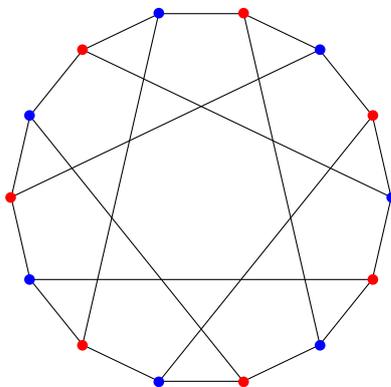
$$v \in V_1 \Leftrightarrow w \in V_2$$

Beispiel 3.16.

1. Ein regelmäßiges n -Eck ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.



2. Der Fahnenkomplex $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ mit 14 Ecken und 21 Kanten ist bipartit:



Definition 3.17. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph.

- Ein *Weg* der *Länge* k in Γ ist eine endliche Folge von Ecken

$$\gamma = (x_0, x_1, \dots, x_k) \in V^{k+1}$$

mit $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ und $x_{i-2} \neq x_i$. Schreibe $\gamma : x_0 \rightsquigarrow x_k$ und $l(\gamma) = k$.

- Ein *Kreis* in Γ ist ein Weg (x_0, \dots, x_k) mit $x_0 = x_k$. Insbesondere sind Kreise also minimal von der Länge 3.
- Die *Valenz* einer Ecke $v \in V$ ist definiert durch:

$$\text{val}(v) := \#\Gamma_v := \#\{w \in V \mid \{w, v\} \in E\}$$

Ab jetzt betrachten wir nur noch zusammenhängende Graphen.

Definition 3.18. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Wir definieren auf V eine Abstandsfunktion:

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto \min\{l(\gamma) \mid \gamma : x \rightsquigarrow y\}$$

Weiter definieren wir den *Durchmesser*

$$\text{diam}(\Gamma) := \sup\{d(v, w) \mid v, w \in V\}$$

und den *Umfang*

$$g(\Gamma) := \begin{cases} \infty, & \Gamma \text{ Baum} \\ \min\{l(c) \mid c \text{ Kreis}\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel 3.19. Der Graph $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ hat den Durchmesser 3 und den Umfang 6.

Definition 3.20. Ein *verallgemeinertes m -Eck* ist ein zusammenhängender bipartiter Graph $\Gamma = (V, E)$ mit

1. $\text{diam}(\Gamma) = m$,
2. $g(\Gamma) = 2m$.

und heißt *dick*, falls jede Ecke mindestens 3 Nachbarn hat, d.h. $\text{val}(v) \geq 3$ für alle $v \in V$.

Beispiel 3.21. • $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ ist ein verallgemeinertes 3-Eck.

- **Achtung:** Regelmäßige $2k$ -Ecke sind verallgemeinerte k -Ecke.

Unser Ziel ist es nun zu zeigen, dass Gebäude vom Typ $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ genau die verallgemeinerten m -Ecke sind.

Lemma 3.22. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein verallgemeinertes m -Eck. Seien $v, w \in V$ beliebige Ecken. Es gilt:

1. $k := d(v, w) < m \Rightarrow \exists! \gamma : v \rightsquigarrow w$ mit $l(\gamma) = k$.
2. $d(v, w) = m \Rightarrow \Gamma_v \xleftrightarrow{\text{bij.}} \Gamma_w$.
3. $\forall v \in V : \text{val}(v) \geq 2$.
4. Es gibt einen Kreis γ der Länge $l(\gamma) = 2m$, welcher v und w enthält.

Beweis.

1. Angenommen es gibt zwei verschiedene Wege $(x_0, \dots, x_k), (y_0, \dots, y_k)$ von v nach w . Dann müssen die Wege sich irgendwo trennen und auch wieder zusammenführen. Damit erhalten wir einen Kreis der Länge $l \leq 2k < 2m$. Dies ist ein Widerspruch zum Umfang $g(\Gamma) = 2m$.

2. Sei v' ein Nachbar von v . Da Γ bipartit ist, kann es keine Kreise ungerader Länge geben. Daher gilt schon $d(v', w) \leq m - 1$. Nach 1.) gibt es nun genau einen Weg $\gamma : v' \rightsquigarrow w$ mit $l(\gamma) = m - 1$. Dieser Weg enthält genau einen Nachbar w' von w . Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi_{v,w} : \Gamma_v &\rightarrow \Gamma_w \\ v' &\mapsto w' \end{aligned}$$

mit der Umkehrabbildung $\psi_{w,v}$.

3. Sei $v \in V$ beliebig und $(x_0, \dots, x_{2m} = x_0)$ ein Kreis der Länge $2m$ in Γ .

$v = x_i$: Dann hat v die Nachbarn x_{i-1}, x_{i+1} .

$v \neq x_i$: Sei $(y_0 = v, \dots, y_k = x_l)$ ein kürzester Weg von v zu dem Kreis. Sei $x' \in \{x_0, \dots, x_{2m}\}$ mit $d(x_l, x') = m - k$. Dann gilt nach Konstruktion $d(v, x') = m$ und mit 2.) und dem ersten Fall erhalten wir schon

$$\text{val}(v) = \text{val}(x') \geq 2.$$

4. Sei $k = d(v, w) \leq n$ mit und $(x_0 = v, \dots, x_k = w)$ ein kürzester Weg zwischen v und w . Nach 3.) gilt $\text{val}(v) \geq 2$, d.h. es gibt ein $z_1 \in \Gamma_w - \{x_{k-1}\}$. Wegen $g(\Gamma) = 2m$ gilt $d(z_1, v) = k + 1$ und insbesondere gilt $z_1 \neq x_j$ für alle $j = 0, \dots, k$. Diesen Schritt können wir nun $m - k$ mal durchführen. D.h. wir wählen $z_{i+1} \in \Gamma_{z_i} - \{z_{i-1}\}$ für $i = 2, \dots, m - (k + 1)$ und es gilt $d(v, z_i) = k + i$. Damit gilt $d(v, z_{m-k}) = k + (m - k) = m$. Sei nun $y \in \Gamma_{z_{m-k}} - \{z_{m-k-1}\}$. Da Γ bipartit ist, gibt es keine Kreise ungerader Länge. Daher gilt $d(y, v) \neq m$ und somit schon

$$d(y, v) = m - 1$$

Sei nun $(y_0 = y, y_1, \dots, y_{m-1} = v)$ ein Weg zwischen y und v . Wegen $g(\Gamma) = 2m$ folgt, dass für alle $0 \leq i \leq m - 1$ gilt:

$$y_i \notin \{x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_{m-k}\}$$

Damit erhalten wir mit

$$\{v = x_0, x_1, \dots, x_k = y, z_1, \dots, z_{m-k}, y_0, \dots, y_{m-1} = v\}$$

ein Kreis der Länge $2m$, welcher v und w enthält. □

Satz 3.23. Sei $m \geq 3$. Die (dicken) Gebäude vom Typ $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ entsprechen genau den (dicken) verallgemeinerten m -Ecken.

Beweis. Sei zunächst $\Gamma = (V, E)$ ein verallgemeinertes m -Eck. Da Γ bipartit ist, gibt es eine Partition $V = V_i \sqcup V_j$ der Eckenmenge mit

$$v \in V_i \Leftrightarrow w \in V_j$$

für alle $\{v, w\} \in E$. Sei nun $f : V \rightarrow \{i, j\}$ die zugehörige Eckenfärbung. Nun setzen wir $\Delta_\Gamma := E$ und $I = \{i, j\}$ und definieren für $k \in I$:

$$x \sim_k y :\Leftrightarrow x, y \text{ teilen sich eine Ecke der Farbe } k$$

Behauptung: $(\Delta_\Gamma, \sim_{k \in I})$ ist ein Kammernsystem

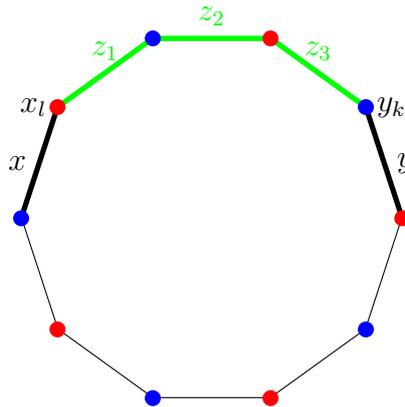
Beweis: Für festes $k \in I$ ist die Reflexivität und Symmetrie von \sim_k klar und die Transitivität folgt aus der Bipartition. Da nach Lemma 3.22 jede Ecke mindestens zwei Nachbarn hat, besitzt jede Äquivalenzklasse mindestens zwei Elemente. Nun konstruieren wir die Abstandsfunktion:

$$\delta : \Delta_\Gamma \times \Delta_\Gamma \rightarrow W = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle$$

Für $x = \{x_1, x_2\}, y = \{y_1, y_2\} \in \Delta_\Gamma = E$ definieren wir zunächst:

$$\tilde{d}(x, y) := \min\{d(x_l, y_k) \mid l, k = 1, 2\}$$

Mit Lemma 3.22(ii) erhalten wir $\tilde{d}(x, y) \leq m - 1$. Falls $\tilde{d}(x, y) < m - 1$ erhalten wir mit Lemma 3.22(i) sowohl für minimierende Ecken x_l, y_k als auch einen verbindenden Weg $(x_l, z_1, \dots, z_n, y_k)$ die Eindeutigkeit.



In diesem Fall definieren wir also ohne Probleme

$$\delta(x, y) := f(x_l)f(z_1)\dots f(z_n)f(y_k) \in D_m.$$

Im Fall $\tilde{d}(x, y) = m - 1$ kann es einen weiteren Weg $(x_k, z'_1, \dots, z'_n, y_l)$ geben. Da nun aber die Worte

$$f(x_l)f(z_1)\dots f(z_n)f(y_k)$$

und

$$f(x_k)f(z'_1)\dots f(z'_n)f(y_l)$$

beide die Länge m haben, folgt wegen der Eindeutigkeit des längsten Wortes in D_m bereits die Gleichheit der Worte (in D_m). Damit ist auch in diesem Fall δ wohldefiniert. Die Eigenschaft (G2) gilt nach Konstruktion.

Ist andererseits (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ so definieren wir Γ_Δ wie folgt:

- Ecken: Äquivalenzklassen bzgl. \sim_i und \sim_j .
- Kanten: $\{v, w\} \in E :\Leftrightarrow v \cap w \neq \emptyset$

Man verifiziert nun leicht, dass Γ_Δ ein verallgemeinertes m -Eck ist. □

Nun wissen wir also, dass m -Ecke uns zu schönen Gebäuden führen. Allerdings haben wir noch nicht viele m -Ecke gesehen. Das soll sich nun ändern, indem wir ein Konstruktionsverfahren erarbeiten.

3.4 Verallgemeinerte m -Ecke

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass Gebäude vom Typ $\bullet \xrightarrow{m} \bullet$ genau den verallgemeinerten m -Ecken entsprechen. Allerdings kennen wir noch nicht viele dieser speziellen Graphen. Daher werden wir in diesem Abschnitt eine Konstruktionsvorschrift solcher Graphen angeben. Anschließend besprechen wir noch einige Resultate zur Klassifizierung, allerdings ohne Beweis.

Bemerkung 3.24. Unsere Idee ist die folgende: Wir starten mit einem (einfachen) Graphen Γ_0 und konstruieren neue Graphen

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots$$

sodass der direkte Limes $\bigcup \Gamma_n$ ein verallgemeinertes m -Eck ist.

Definition 3.25. Ein *partielles m -Eck* ist ein zusammenhängender Graph Γ mit folgender Eigenschaft: Jeder Kreis in Γ hat gerade Länge und ist mindestens von der Länge $2m$.

Beispiel 3.26. Da Bäume keine Kreise haben, sind dies also insbesondere partielle m -Ecke.

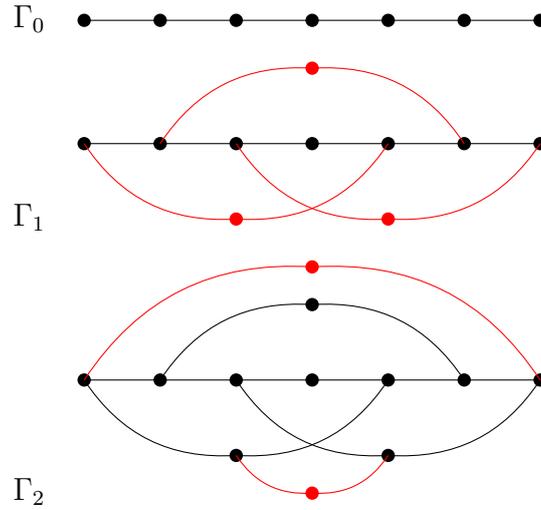
Definition 3.27. Sei $m \geq 3$.

$n = 0$: Γ_0 sei ein partielles m -Eck mit $\text{diam}(\Gamma_0) \geq m + 1$. (Also z.B. ein Weg der Länge $\geq m + 1$).

$n \mapsto n + 1$: Für jedes Paar $v, w \in V(\Gamma_n)$ mit $d(v, w) = m + 1$ füge einen neuen Weg der Länge $(m - 1)$ mit den Eckpunkten v, w hinzu. Der resultierende Graph ist Γ_{n+1} .

Der Graph $\mathfrak{F}(\Gamma_0) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n$ heißt *freier Abschluss* von Γ_0 .

Beispiel 3.28. Hier für $m = 3$.



Satz 3.29. $\mathfrak{F}(\Gamma_0)$ ist ein verallgemeinertes m -Eck.

Beweis. Wir schreiben $V_n := V(\Gamma_n)$. Da Γ_0 zusammenhängend ist, ist es auch $\mathfrak{F}(\Gamma_0)$. Ferner ist jeder Graph Γ_n bipartit, also auch $\mathfrak{F}(\Gamma_0)$. Da in Γ_1 ein Kreis der Länge $2m$ konstruiert wird, gilt schon

$$g(\mathfrak{F}(\Gamma_0)) = 2m.$$

Auf diesem Kreis befinden sich zwei Ecken $v, w \in V(\Gamma_1)$ mit $d(v, w) = m$ und dieser Abstand ändert sich nicht mehr. Damit erhalten wir zunächst

$$\text{diam}(\mathfrak{F}(\Gamma_0)) \geq m.$$

Angenommen, es gibt Ecken $v, w \in V(\mathfrak{F}(\Gamma_0))$ mit Abstand $d(v, w) = k > m$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $v, w \in V_n$. Sei nun $w' \in V_n$ mit $d(v, w') = m + 1$. Dann gilt nach Konstruktion in Γ_{n+1} :

$$d(v, w') = k - 2$$

und damit auch

$$d(v, w) \leq k - 2.$$

Da der Abstand zwischen v und w anschließend, wenn überhaupt, nur kleiner gemacht wird, erhalten wir

$$d(v, w) \leq k - 2$$

in $\mathfrak{F}(\Gamma_0)$ und damit einen Widerspruch. Also erhalten wir auch die andere Ungleichung und damit den Durchmesser von $2m$. \square

Bemerkung 3.30.

- Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{F}(\Gamma_n) = \mathfrak{F}(\Gamma_0)$.
- Wir suchen nun ein Kriterium für Γ_0, Γ'_0 , um zu entscheiden, dass die jeweiligen freien Abschlüsse nicht gleich sind. Das führt uns zu der folgenden Definition.

Definition 3.31. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph. Für $m \geq 3$ definieren wir die *gewichtete Eulercharakteristik*:

$$\delta_m(\Gamma) := (m - 1)\#V - (m - 2)\#E$$

Um zu zeigen, dass diese Zahl in der Tat solch eine gewünschte Invariante liefert, benötigen wir zunächst folgendes Resultat:

Lemma 3.32. Sei Γ_0 wie oben. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

1. $\delta_m(\Gamma_0) = \delta_m(\Gamma_n)$.
2. Für $\Gamma_0 \leq A \leq \Gamma_i$ gilt $\delta_m(\Gamma_0) \leq \delta_m(A)$.

Beweis. ÜA. □

Satz 3.33. Seien A_0, B_0 partielle m -Ecke mit $\text{diam}(A_0), \text{diam}(B_0) \geq m + 1$. Dann gilt:

$$\mathfrak{F}(A_0) \cong \mathfrak{F}(B_0) \Rightarrow \delta_m(A_0) = \delta_m(B_0).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{F}(A_0) \xrightarrow{\phi} \mathfrak{F}(B_0)$ ein Isomorphismus. Da $\phi(A_0)$ endlich ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\phi(A_0) \leq B_n$ und da $\phi(B_n)$ endlich ist ferner ein $m \in \mathbb{N}$ mit

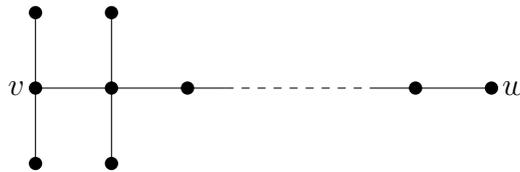
$$A_0 \leq \phi^{-1}(B_n) \leq A_m.$$

Nach dem vorigen Lemma erhalten wir somit

$$\delta_m(A_0) \leq \delta_m(\phi^{-1}(B_n)) = \delta_m(B_n) = \delta_m(B_0)$$

wobei in der ersten Gleichung eingegangen ist, dass ϕ ein Isomorphismus ist. Analog erhalten wir natürlich $\delta_m(B_0) \leq \delta_m(A_0)$. □

Beispiel 3.34. Für $k \geq 1$ sei Γ_0^k der folgende Baum



mit $d(v, w) = k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \delta_m(\Gamma_0^k) &= (m - 1)(k + 5) - (m - 2)(k + 4) \\ &= (m - 1) + (k + 4) \\ &= m + k + 3 \end{aligned}$$

und für $k \neq l$ erhalten wir nach dem vorigen Satz also insbesondere

$$\mathfrak{F}(\Gamma_0^k) \not\cong \mathfrak{F}(\Gamma_0^l).$$

Bemerkung 3.35. Die Klasse der verallgemeinerten m -Ecke ist also mindestens abzählbar unendlich.

Eine Frage bleibt noch offen: Wann ist $\mathfrak{F}(\Gamma_0)$ ein *dicker* Graph?

Lemma 3.36. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein verallgemeinertes m -Eck. Dann gilt:*

$$\Gamma \text{ ist dick} \iff \exists \{v, w\} \in E : \text{val}(v), \text{val}(w) \geq 3.$$

Beweis. \Rightarrow : Klar.

\Leftarrow : Wir erinnern zunächst daran, dass es für alle $a, b \in V$ mit $d(a, b) = m$ nach Lemma 3.22 eine Bijektion $\phi_{a,b} : \Gamma_a \rightarrow \Gamma_b$ folgendermaßen gibt: Zu einem Nachbarn c von a betrachten wir den eindeutigen Weg $\gamma : c \rightsquigarrow b$ mit $l(\gamma) = m - 1$. Auf diesem Weg gibt es genau einen Nachbarn c' von b . Nun setze:

$$\phi_{a,b}(c) := c'$$

Beh: $\text{val}(y) \geq 3 \wedge x, z \in \Gamma_y \Rightarrow \Gamma_x \xrightarrow{\text{bij.}} \Gamma_z$.

Bew: Sei $u \in \Gamma_y - \{x, y\}$ und setze $u' = \phi_{y,y'}(u)$. Sei ferner $y' \in V$ mit $d(y, y') = m$. Nach Definition der Bijektion $\phi_{y,y'}$ gilt

$$d(z, u') = d(x, u') = m$$

und damit

$$\phi_{u',z} \circ \phi_{x,u'} : \Gamma_x \cong \Gamma_{u'} \cong \Gamma_z.$$

Nach Voraussetzung wissen wir nun, dass es eine Kante $v, w \in E$ gibt mit $\text{val}(v), \text{val}(w) \geq 3$. Sei nun $s \in V$ beliebig. Wir zeigen nun induktiv über $n = d(v, s)$, dass $\text{val}(s) \geq 3$.

I.A. Für $n = 1$ gilt $s, w \in \Gamma_v$ und mit der Hilfsbehauptung erhalten wir

$$\text{val}(s) = \#\Gamma_s = \#\Gamma_w \geq 3.$$

I.S. Sei $v' \in \Gamma_s$ und $v'' \in \Gamma_{v'}$ mit $d(v', v) = n$ sowie $d(v'', v) = n - 1$. Nach I.V. gilt $\text{val}(v'), \text{val}(v'') \geq 3$. Nun gilt $s, v'' \in \Gamma_{v'}$ und mit der Hilfsbehauptung erhalten wir

$$\text{val}(s) = \#\Gamma_s = \#\Gamma_{v''} \geq 3.$$

□

Bemerkung 3.37. Die freien Abschlüsse der Graphen Γ_0^k sind also dick und damit wissen wir, dass sogar die Klasse der *dicken* verallgemeinerten m -Ecke mindestens abzählbar unendlich ist.

Es ist eine offene Frage, ob man dicke verallgemeinerte m -Ecke *schön* klassifizieren kann. Fordert man allerdings zusätzliche Struktur wie Endlichkeit oder die Existenz gewisser Automorphismen (\rightsquigarrow *Moufang-Bedingung*) gibt es dafür Resultate.

Satz 3.38. *Sei $\Gamma = (V, E)$ ein dickes verallgemeinertes m -Eck und seien $v, w \in V$ beliebig. Dann gilt:*

1. $d(v, w)$ gerade $\Rightarrow \Gamma_v \cong \Gamma_w$.

2. m ungerade $\Rightarrow \Gamma_v \cong \Gamma_w$.

Beweis. ÜA. □

Mit dem vorigen Satz ist nun folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.39. Sei $\Gamma = (V, E)$ ein verallgemeinertes dickes m -Eck und $V = V_i \sqcup V_j$ eine bipartite Zerlegung. Für $s, t \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\}$ sagen wir:

$$\Gamma \text{ hat Parameter } (s, t) :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{val}(v) = s + 1 & \forall v \in V_i \\ \text{val}(w) = t + 1 & \forall w \in V_j \end{cases}$$

Folgendes Resultat nehmen wir ohne Beweis zur Kenntnis:

Theorem 3.40 (Feit+Higman 64'). Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endliches dickes verallgemeinertes m -Eck mit Parameter (s, t) . Dann gilt

$$m \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

und ferner für

$$m = 4 : \frac{st(st+1)}{s+t} \in \mathbb{Z}$$

$$m = 6 : st = k^2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

$$m = 8 : 2st = k^2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}.$$

$$m = 4, 8 : s \leq t^2 \text{ und } t \leq s^2. \text{ (75')}$$

$$m = 6 : s \leq t^3 \text{ und } t \leq s^3. \text{ (79')}$$

Definition 3.41. Ein *Moufang- m -Eck* ist ein dickes verallgemeinertes m -Eck Γ mit der folgenden Eigenschaft:

(M) Für jeden Weg $\alpha = (v_0, \dots, v_m)$ in Γ mit $d(v_0, v_m) = m$ wirkt die Gruppe

$$U_\alpha := \{f \in \text{Aut}(\Gamma) \mid \forall v \in \bigcup_{i=1}^{m-1} \Gamma_{v_i} : f(v) = v\}$$

transitiv auf der Menge

$$C_\alpha := \{\gamma \mid \gamma \text{ Kreis, } l(\gamma) = 2m, \gamma \text{ enthält } \alpha\}.$$

Auch folgendes Resultat nehmen wir ohne Beweis zur Kenntnis.

Satz 3.42 (Tits + Weiss 76'/79). *Moufang- m -Ecke existieren nur für $m = 3, 4, 6, 8$.*

Bemerkung 3.43. Moufang- m -Ecke sind komplett klassifiziert. Weiteres dazu findet man im Werk *Moufang Polygons* von TITS und WEISS.

3.5 Gebäude vom Rang ≥ 3

Auch bei dem folgenden Resultat werden wir auf den Beweis verzichten müssen, werden aber für den ersten Teil die Beweisidee angeben.

Theorem 3.44 (Tits '77).

1. Es gibt keine dicken Gebäude vom Typ H_3 und H_4 .
2. Gebäude vom Typ $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$ sind durch algebraische Daten vollständig klassifiziert.

Beweisidee zu 1. Angenommen es gäbe ein Gebäude $\{\Delta, \delta\}$ vom Typ:

$$H_3 = \bullet \text{---} \overset{i}{\bullet} \text{---} 5 \text{---} \overset{j}{\bullet} \quad \text{oder} \quad H_4 = \bullet \text{---} \bullet \text{---} \overset{i}{\bullet} \text{---} 5 \text{---} \overset{j}{\bullet}$$

Dann betrachtet man das Untergebäude (Δ', δ') mit

$$x, y \in \Delta' \Leftrightarrow \delta(x, y) \in W_{i,j}$$

und

$$\delta' := \delta|_{\Delta' \times \Delta'} : \Delta' \times \Delta' \rightarrow W_{i,j} \cong D_5.$$

Man kann nun zeigen, dass Δ' Moufang ist. Dies ist allerdings ein Widerspruch zum Satz 3.42. □

Bemerkung. Zur Beschreibung von Gebäuden gibt es mehrere Möglichkeiten.

- **Kombinatorisch** (80'er): Ein Gebäude ist ein Kammernsystem über I mit einer W -wertigen Abstandsfunktion mit schönen Eigenschaften...
- **Geometrisch** (50'er/60'er): Ein Gebäude ist ein Simplicialkomplex bestehend aus Appartements $\bigcup_{j \in J} \Sigma_j$ mit schönen Eigenschaften...

Bisher haben wir uns mit der kombinatorischen Sicht beschäftigt. Nun wollen wir die geometrische Seite erkunden.

3.6 Coxeterkomplexe

Definition 3.45. Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Der Nerv von \mathcal{U} ist der folgende Simplicialkomplex:

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}) := \left\{ \{U_1, \dots, U_n\} \mid U_i \in \mathcal{U}, \bigcap_{i=1}^n U_i \neq \emptyset, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Definition 3.46. Sei (W, I) ein Coxetersystem. Wir betrachten auf W die diskrete Topologie und die folgende offene Überdeckung:

$$\mathcal{U} := \{wW_{I-\{i\}} \mid w \in W, i \in I\}$$

Der *Coxeterkomplex* zu (W, I) ist nun definiert als der Nerv

$$\Sigma := \Sigma(W, I) := \mathcal{N}(\mathcal{U}).$$

Bemerkung. Wir benötigen eine bessere Beschreibung für Σ . Dazu betrachten wir eine Folge von offenen Mengen aus \mathcal{U} :

$$a = \{w_1 W_{I-\{i_1\}}, \dots, w_r W_{I-\{i_r\}}\}$$

Wir erhalten folgende Übersetzung:

$$\begin{aligned} & a \text{ ist ein Simplex} \\ \Leftrightarrow & \bigcap_{k=1}^r w_k W_{I-\{i_k\}} \neq \emptyset \\ \Leftrightarrow & \exists w \in W \forall k = 1, \dots, r : w \in w_k W_{I-\{i_k\}} \\ \Leftrightarrow & \exists w \in W \forall k = 1, \dots, r : w W_{I-\{i_k\}} = w_k W_{I-\{i_k\}} \end{aligned}$$

Damit haben Simplizes in Σ genau die Form

$$a = \{w W_{I-\{j\}} \mid j \in J := \{i_1, \dots, i_k\}\}$$

Wir definieren nun auf der Menge

$$\bigcup_{J \subseteq I} W/W_J$$

wie folgt eine partielle Ordnung:

$$w W_J \leq w' W_{J'} : \Leftrightarrow w W_J \supseteq w' W_{J'}$$

Satz. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} f : (\Sigma(W, I), \subseteq) & \longrightarrow \left(\bigcup_{J \subseteq I} W/W_J, \leq \right) \\ \{w W_{I-\{j\}} \mid j \in J\} & \longmapsto w W_{I-J} \end{aligned}$$

ist ein Ordnungsisomorphismus.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f bijektiv ist und f, f^{-1} ordnungserhaltend sind.

injektiv: Seien $a, b \in \Sigma(W, I)$, d.h. es gibt $w, v \in W$ und $J, K \subseteq I$ mit:

$$\begin{aligned} a &= \{w W_{I-\{j\}} \mid j \in J\} \\ b &= \{v W_{I-\{k\}} \mid k \in K\} \end{aligned}$$

Es gelte nun

$$w W_{I-J} = f(a) = f(b) = v W_{I-K}$$

Damit erhalten wir $w^{-1}v \in W_{I-J}$ und $I - J = I - K$ also $J = K$. Somit erhalten wir

$$w^{-1}v \in W_{I-\{j\}}$$

und damit

$$w W_{I-\{j\}} = v W_{I-\{j\}}$$

für alle $j \in J$. Wegen $J = K$ folgt somit

$$\begin{aligned} a &= \{wW_{I-\{j\}} \mid j \in J\} \\ &= \{vW_{I-\{j\}} \mid j \in J\} \\ &= \{vW_{I-\{j\}} \mid j \in K\} = b \end{aligned}$$

surjektiv: Für $wW_J \in \bigcup_{J \subseteq I} W/W_J$ gilt:

$$f(\{wW_{I-\{k\}} \mid k \in I - J\}) = wW_{I-(I-J)} = wW_J$$

ordnungserhaltend: Seien $a, b \in \Sigma(W, I)$ wie oben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \subseteq b &\Leftrightarrow \forall j \in J \exists k \in K : wW_{I-\{j\}} = vW_{I-\{k\}} \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J \exists k \in K : W_{I-\{j\}} = w^{-1}vW_{I-\{k\}} \\ &\Leftrightarrow \forall j \in J \exists k \in K : w^{-1}v \in W_{I-\{j\}} \wedge I - \{j\} = I - \{k\} \\ &\Leftrightarrow J \subseteq K \wedge \forall j \in J : w^{-1}v \in W_{I-\{j\}} \\ &\Leftrightarrow I - J \supseteq I - K \wedge w^{-1}v \in W_{I-J} \\ &\Leftrightarrow W_{I-J} \supseteq w^{-1}vW_{I-K} \\ &\Leftrightarrow wW_{I-J} \supseteq vW_{I-K} \\ &\Leftrightarrow f(a) \leq f(b) \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Mit diesem Isomorphismus erhalten wir nun ein besseres Bild unseres Coxeterkomplexes. Die (maximalen) Simplexes der Dimension $\#I - 1$ sind

$$\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in I\} \mapsto wW_{\emptyset} = w\{1\} = \{w\}$$

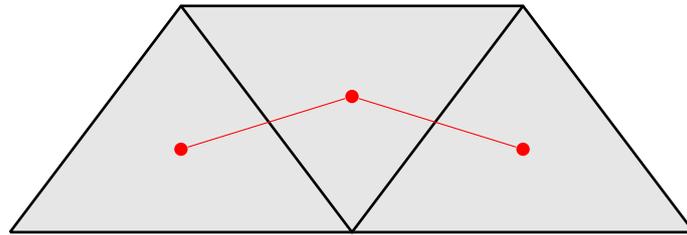
und entsprechen damit genau den Gruppenelementen von W . Die Simplexes der Dimension $\# - 2$ sind

$$\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in I - \{i\}\} \mapsto wW_{\{i\}} = w\{1, i\} = \{w, wi\}$$

Definition 3.47.

1. Wir nennen einen Simplicialkomplex Δ *rein*, falls alle maximalen Simplexes dieselbe Dimension haben.
2. Der *Kammerngraph* eines reinen Simplicialkomplexes ist der folgende Graph:
 - Ecken: Maximale Simplexes
 - Kanten: a, b bilden eine Kante $:\Leftrightarrow \dim(a \cap b) = \dim(a) - 1$.
3. Wege im Kammerngraphen nennen wir *Galerien*.
4. Wenn der Kammerngraph zusammenhängend ist, so nennen wir Δ einen *Kammernkomplex*.

Beispiel. Wir betrachten den folgenden reinen Simplicialkomplex Δ mit zugehörigem Kammerngraph (rot):



Da der Kammerngraph zusammenhängend ist, ist Δ ein Kammernkomplex.

Lemma 3.48. *Jeder Coxeterkomplex $\Sigma = \Sigma(W, I)$ ist ein Kammernkomplex.*

Beweis. Wir haben oben bereits gesehen, dass die maximalen Simplexe genau den Gruppenelementen von W entsprechen. Daher ist Σ rein. Zudem haben wir gesehen, dass die Simplexe der Kodimension 1 genau den Nebenklassen

$$wW_i = w\{1, i\} = \{w, iw\}$$

entsprechen. Daher ist der Kammerngraph genau der Cayleygraph von (W, I) . Da W von I erzeugt wird, ist dieser Graph also zusammenhängend. \square

Definition 3.49. Seien Δ_1, Δ_2 Simplicialkomplexe. Eine Abbildung

$$\phi : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2$$

heißt *reguläre simpliciale Abbildung*, falls ϕ sowohl ordnungs- als auch dimensionserhaltend ist.

Beispiel 3.50. Sei (W, I) ein Coxeterkomplex und $\Sigma = \bigcup_{J \subseteq I} W/W_J$ der zugehörige Coxeterkomplex.

1. W wirkt via

$$g(wW_J) := (gw)W_J$$

durch reguläre simpliciale Abbildungen auf Σ . Für eine Kammer $\{w\}$ in Σ gilt

$$\text{Stab}(\{w\}) = \{g \in W \mid g\{w\} = \{gw\} = \{w\}\} = \{1\}$$

und W wirkt zudem wegen

$$(vw^{-1})\{w\} = \{vw^{-1}w\} = \{v\}$$

transitiv auf den Kammern.

2. Die Typfunktion

$$\begin{aligned} \Sigma &\xrightarrow{t} (\mathcal{P}(I), \subseteq) \\ wW_K &\longmapsto I - K \end{aligned}$$

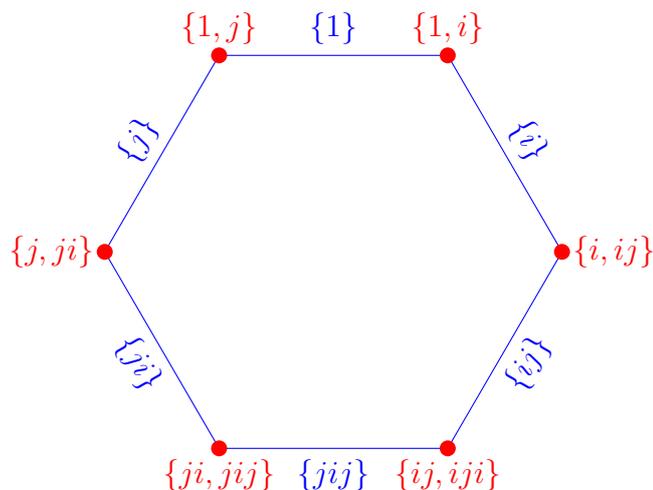
ist wohldefiniert und t ist eine reguläre simpliciale Abbildung. (ÜA)

Beispiel 3.51.

1. Wir betrachten zu $(W, I) = (D_3, \{i, j\})$ den eindimensionalen Simplicialkomplex $\Sigma(W, I)$.

- 0-dim. Simplizes: $\{wW_{I-\{k\}}\} \mapsto wW_{I-\{k\}} = \begin{cases} \{w, wi\}, & k = j \\ \{w, wj\}, & k = i \end{cases}$
- 1-dim. Simplizes: $\{wW_{I-\{k\}} \mid k = i, j\} \mapsto wW_\emptyset = \{w\}$

Damit erhalten wir die folgende geometrische Realisierung:



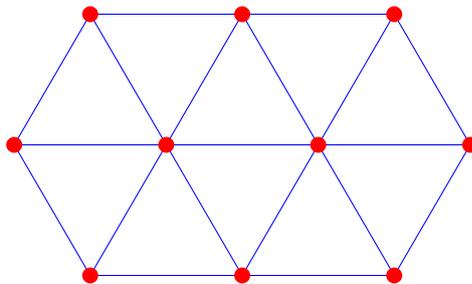
2. Wir betrachten nun zu dem Coxetersystem (W, I) mit $I = \{s, t, u\}$ und

$$W = W(\tilde{A}_2) = \langle s, t, u \mid s^2, t^2, u^2, (st)^3, (tu)^3, (su)^3 \rangle.$$

den 2-dim. Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$. Wir erhalten nun als

- 0-dim. Simplizes: $\{wW_{I-\{u\}}\} \mapsto wW_{\{s,t\}}$
- 1-dim. Simplizes: $\{wW_{I-\{s\}}, wW_{I-\{t\}}\} \mapsto wW_{\{u\}}$

und damit als geometrische Realisierung eine Triangulierung der Ebene:

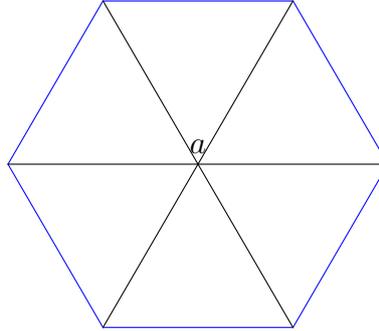


Wir interessieren uns nun für die lokale Struktur von $\Sigma(W, I)$. Dazu benötigen wir bestimmte Unterkomplexe.

Definition 3.52. Sei Δ ein Simplicialkomplex und $a \in \Delta$. Der *Link* von a in Δ ist der folgende Unterkomplex von Δ :

$$lk(a) := \{b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset, a \cup b \in \Delta\}$$

Beispiel. Für den folgenden Simplicialkomplex betrachten wir den Link (blau) von der Ecke $a \in \Delta$:



Somit erhalten wir nach Beispiel 3.51

$$lk(W_{\{s,t\}}) \cong \text{Hexagon} \cong \Sigma(W_{\{s,t\}}, \{s, t\})$$

sowie

$$lk(W_{\{s\}}) \cong \bullet \bullet \cong \Sigma(W_{\{s\}}, \{s\})$$

Definition. Sei Δ ein Simplicialkomplex und $a \in \Delta$ beliebig. Wir definieren die Menge

$$\Delta_{\geq a} := \{x \in \Delta \mid a \subseteq x\}$$

Bemerkung 3.53.

1. $\Delta_{\geq a}$ ist i.A. **kein** Unterkomplex von Δ .
2. Durch den Ordnungsisomorphismus

$$f : (lk(a), \subseteq) \longrightarrow (\Delta_{\geq a}, \subseteq) \\ b \longmapsto a \cup b$$

wird $(\Delta_{\geq a}, \subseteq)$ zu einem abstrakten Simplicialkomplex.

Nun können wir obige Beobachtungen bzgl. der Struktur von Links in Coxeterkomplexen als allgemeines Resultat aufschreiben.

Satz 3.54. Sei (W, I) ein Coxetersystem und $\Sigma(W, I)$ der zugehörige Coxeterkomplex. Für $J \subseteq I$ und $w \in W$ gilt:

$$lk(wW_J) \cong \Sigma(W_J, J)$$

Insbesondere sind Links in Coxeterkomplexen auch Kammernkomplexe.

Beweis. Mit dem Satz 2.72 über parabolische Untergruppen erhalten wir die folgende Beziehung:

$$uW_K \subseteq W_J \Leftrightarrow u \in W_J \wedge K \subseteq J$$

Somit erhalten wir mithilfe unserer schon bekannten Isomorphismen:

$$\begin{aligned} lk(wW_J) &\cong \Sigma_{\geq wW_J} \\ &\cong \Sigma_{\geq W_J} \\ &\cong \bigcup_{K \subseteq J} W_J / W_K \\ &\cong \Sigma(W_J, J) \end{aligned}$$

□

Definition 3.55. Der *Join* $P \star Q$ von zwei partiell geordnete Mengen (P, \leq_p) und (Q, \leq_q) ist die Menge $P \times Q$ mit der Ordnung

$$(p_1, q_1) \leq (p_2, q_2) : \Leftrightarrow p_1 \leq_p p_2 \wedge q_1 \leq_q q_2$$

Nach eventueller Umbenennung der Elemente können wir annehmen, dass

$$\{0\text{-dim. Simplizes von } P\} \cap \{0\text{-dim. Simplizes von } Q\} = \emptyset$$

und erhalten damit:

$$P \star Q \cong \{a \cup b \mid a \in P, b \in Q\}$$

Lemma 3.56. *Seien X, Y Simplizialkomplexe. Dann gilt:*

1. $X \star Y$ ist ein Simplizialkomplex
2. X, Y Kammernkomplexe $\Rightarrow X \star Y$ Kammernkomplexe, wobei

$$Cham(X \star Y) = Cham(X) \times Cham(Y)$$

Beweis. ÜA.

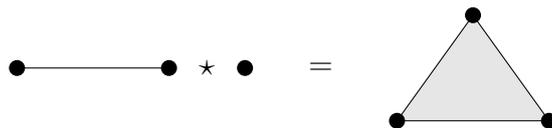
□

Beispiel. Wir betrachten

$$\begin{aligned} X &= \{\emptyset, \{v\}, \{w\}, \{v, w\}\} \\ Y &= \{\emptyset, \{z\}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X \times Y &= \{ (\emptyset, \emptyset), \\ &(\{v\}, \emptyset), (\{w\}, \emptyset), (\{z\}, \emptyset), \\ &(\{v\}, \{z\}), (\{w\}, \{z\}), (\{v, w\}, \emptyset), \\ &(\{v, w\}, \{z\}) \} \end{aligned}$$

Also erhalten wir das folgende Bild:



Satz 3.57. Sei (W, I) ein Coxetersystem. Sei nun $I = J \sqcup K$ mit $W \cong W_J \times W_K$. Dann gilt

$$\Sigma(W, I) \cong \Sigma(W_J, J) \star \Sigma(W_K, K)$$

Beweis. Für $w \in W$ gibt es wegen $W \cong W_J \times W_K$ eindeutige $u \in W_J, v \in W_K$ mit $w = uv$. Man rechnet nun nach, dass

$$\begin{aligned} \Sigma(W, I) &\rightarrow \Sigma(W_J, J) \star \Sigma(W_K, K) \\ wW_L &\mapsto (uW_{L \cap J}, vW_{L \cap K}) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Ordnungsisomorphismus ist. □

Beispiel 3.58. Wir betrachten das Coxetersystem (W, I) zu dem Coxetergraphen



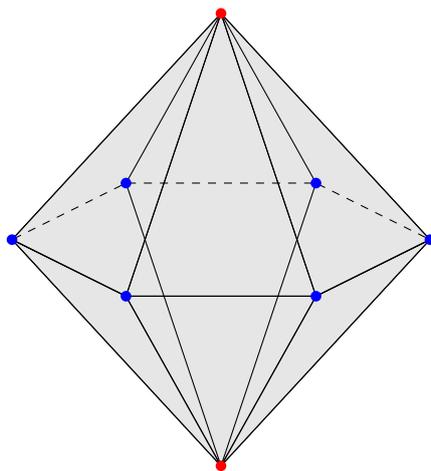
Wir zerlegen (W, I) in die irreduziblen Komponenten und erhalten

$$(W, I) \cong (D_3, \{i, j\}) \times (\mathbb{Z}_2, \{k\})$$

und somit:

$$\Sigma(W, I) \cong \Sigma(D_3, \{i, j\}) \star \Sigma(\mathbb{Z}_2, \{k\})$$

Damit erhalten wir für $\Sigma(W, I)$ die folgende Triangulierung der Sphäre:



Achtung: Der Coxeterkomplex zu D_6 mit den beiden Standard-Erzeugern liefert natürlich einen anderen Coxeterkomplex!

Beispiel. Wir betrachten das Coxetersystem (W, I) zu dem Coxetergraphen



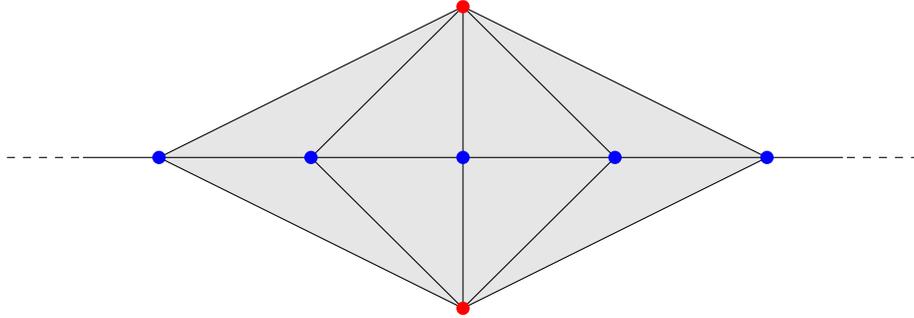
Wir zerlegen (W, I) in die irreduziblen Komponenten und erhalten

$$(W, I) \cong (D_\infty, \{i, j\}) \times (\mathbb{Z}_2, \{k\})$$

und somit:

$$\Sigma(W, I) \cong \Sigma(D_\infty, \{i, j\}) \star \Sigma(\mathbb{Z}_2, \{k\})$$

Damit erhalten wir die folgende geometrische Anschauung für $\Sigma(W, I)$:



Definition 3.59. Sei I eine beliebige Menge. Wir fassen die Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$ als $(\#I - 1)$ -dim. Simplizialkomplex auf. Ein Simplizialkomplex über I ist ein Simplizialkomplex Δ mit einer regulären, simplizialen Abbildung

$$t : \Delta \rightarrow \mathcal{P}(I).$$

Die Idee hinter dieser Definition ist folgende: I sind Farben und jeder Ecke $v \in \Delta$ wird eine Farbe $t(v)$ zugeordnet, so dass in einem Simplex jede Farbe höchstens einmal auftritt.

Beispiel. Sei (W, I) ein Coxetersystem mit zugehörigem Coxeterkomplex $\Sigma = \Sigma(W, I)$ und der Typfunktion:

$$\begin{aligned} t : \Sigma &\rightarrow \mathcal{P}(I) \\ wW_K &\mapsto I - K \end{aligned}$$

Dann ist Σ ein Simplizialkomplex über I .

Definition 3.60. Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe über I mit Färbungen $t_i : \Delta_i \rightarrow \mathcal{P}(I)$. Ein *Homomorphismus über I* ist eine simpliziale Abbildung $\phi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$, so dass folgenden Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \Delta_1 & \xrightarrow{\phi} & \Delta_2 \\ & \searrow t_1 & \swarrow t_2 \\ & \mathcal{P}(I) & \end{array}$$

Beispiel. Sei (W, I) ein Coxetersystem, Σ der zugehörige Coxeterkomplex und $t : \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(I)$ die Typfunktion. Wir betrachten die Wirkung $\Psi : W \rightarrow \text{Aut}(\Sigma)$. Dann liefert jedes $g \in W$ einen Automorphismus $\Psi(g)$ über I , denn es gilt:

$$(t \circ \psi(g))(wW_K) = t((gw)W_K) = I - K = t(W_K)$$

3.7 Gebäude als Simplicialkomplexe

Definition 3.61 (2. Def. von Gebäuden). Sei (W, I) ein Coxetersystem. Ein *Gebäude* vom Typ (W, I) ist ein Simplicialkomplex Δ über I mit einer Menge \mathcal{A} von Unterkomplexen von Δ , so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (G1) Für alle $\Sigma \in \mathcal{A}$ gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma(W, I) \rightarrow \Sigma \subseteq \Delta$ über I .
- (G2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus $\Sigma_1 \xrightarrow{\cong} \Sigma_2$ welcher a, b punktweise fixiert.
- (G3) Sind $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Wir nennen $\Sigma \in \mathcal{A}$ dann ein *Apartment* und \mathcal{A} *Apartmentsystem*.

Bemerkung.

- Nach (G3) gilt $\Delta = \bigcup \mathcal{A}$
- Da zwei beliebige Simplexe $a, b \in \Delta$ nach (G3) immer in einem Apartment Σ enthalten sind, welches nach (G1) wiederum zu dem Kammernkomplex $\Sigma(W, I)$ isomorph ist, ist auch Δ ein Kammernkomplex.
- Wir erhalten wegen (G1): $\dim(\Delta) = \dim(\Sigma) = \dim(\Sigma(W, I)) = \#I - 1$

Beispiel. Coxeterkomplexe $\Sigma(W, I)$ sind Gebäude mit $\mathcal{A} = \{\Sigma(W, I)\}$.

Bemerkung.

- In einem Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$ gilt: Jeder Simplex $wW_i = \{w, wi\}$ der Kodim. 1 ist in genau zwei Kammern enthalten: $\{w, wi\} \leq w$ und $\{w, wi\} \leq wi$.
- Daher gilt in Gebäuden (nach (G3)): Jeder Kodim.-1-Simplex ist in mindestens zwei Kammern enthalten.

Definition 3.62. Wir nennen ein Gebäude

- *dick*, falls jeder Kodim.-1-Simplex in mindestens 3 Kammern liegt.
- *dünn*, falls jeder Kodim.-1-Simplex in genau 2 Kammern liegt.

Satz 3.63. *Dünne Gebäude sind genau die Coxeterkomplexe.*

Beweis. ÜA. □

Beispiel 3.64.

1. Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens zwei Elementen und Apartments sind dann die zweielementigen Teilmengen.
2. $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ ist ein Gebäude vom Typ $(Sym(3), \{i, j\})$ und die Apartments sind die Kreise der Länge 6.

Definition 3.65. Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W, I) mit Apartmentsystem \mathcal{A} . Sei $b \in \Delta$ ein Simplex vom Typ $t(b) = J \in \mathcal{P}(I)$. Wir definieren die Menge

$$\mathcal{A}_b := \{\Sigma \cap lk(b) \mid \Sigma \in \mathcal{A}, b \in \Sigma\}$$

Satz. $lk(b)$ ist ein Gebäude vom Typ $(W_{I-J}, I - J)$ und Apartmentsystem \mathcal{A}_b .

Beweis. Unter Benutzung des Isomorphismus $lk(b) \xrightarrow{\cong} \Delta_{\geq b}$ erhalten wir für $\Sigma \in \mathcal{A}$ und $wW_{I-J} \in \Sigma$:

$$\Sigma \cap lk(b) \cong \Sigma_{\geq b} \cong \Sigma(W_{I-J}, I - J)$$

Dieser Isomorphismus ist nach Konstruktion über $I - J$. Damit gilt (G1). Die anderen beide Axiome rechnet man schnell nach. \square

3.8 Übersetzung der Gebäude Konzepte

Wir haben nun zwei verschiedene Definitionen von Gebäuden kennenlernt: Als Kammernsysteme und als Simplizialkomplexe. In diesem kleinen Abschnitt wollen wir eine grobe Skizze der Übersetzung beider Konzepte erhalten. Wir zeigen also:

$$\text{Gebäude als Simplizialkomplexe} \xleftrightarrow{1:1} \text{Gebäude als Kammernsysteme}$$

Konstruktion.

\longrightarrow : Sei Δ also zunächst ein Gebäude vom Typ (W, I) als Simplizialkomplex. Wir definieren auf der Menge

$$cham(\Delta) := \{\text{Kammern (=max. Simplizes) in } \Delta\}$$

die folgende "Abstandsfunktion"

$$\delta : cham(\Delta) \times cham(\Delta) \longrightarrow W$$

wie folgt: Seien $c, d \in cham(\Delta)$. Nach (G3) gibt es ein Apartment $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $c, d \in \Sigma$ und nach (G1) gibt es einen Isomorphismus $\phi : \Sigma \rightarrow \Sigma(W, I)$ über I . Da c, d in Δ maximal sind und ϕ ein Isomorphismus ist, sind auch $\phi(c), \phi(d)$ maximal in $\Sigma(W, I)$ und entsprechen damit Gruppenelementen aus W . Wir definieren nun:

$$\delta(c, d) := \phi(c)^{-1}\phi(d) \in W$$

Nun muss man zeigen, dass δ wohldefiniert ist (wir haben Wahlen getroffen...) und die Axiome (G1') und (G2) erfüllt sind.

\longleftarrow : Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ (W, I) als Kammernkomplex. Für $J \subseteq I$ ist

$$x \sim_J y :\Leftrightarrow \delta(x, y) \in W_J$$

eine Äquivalenzrelation auf Δ . Für die Äquivalenzklassen schreiben wir $[\]_J$ und nennen diese J -Residuen. Auf der Menge

$$\mathcal{B}_\Delta = \{[x]_J \mid x \in \Delta, J \subseteq I\}$$

betrachten wir die partielle Ordnung:

$$[x]_J \leq [y]_K \Leftrightarrow [x]_J \supseteq [y]_K$$

Weiter definieren wir die Färbung

$$\begin{aligned} t : \mathcal{B}_\Delta &\rightarrow \mathcal{P}(I) \\ [x]_J &\mapsto I - J \end{aligned}$$

Nun lässt sich zeigen, dass $(\mathcal{B}_\Delta, \leq)$ ein (abstrakter) Simplicialkomplex über I der Dimension $\#I - 1$ ist. Ein Apartment von \mathcal{B}_W ist ein durch eine Isometrie

$$\alpha : (W, \delta_W) \rightarrow (\Delta, \delta)$$

induzierter Unterkomplex

$$\mathcal{B}_W \hookrightarrow \mathcal{B}_\Delta.$$

Nun kann man zeigen, dass $(\mathcal{B}_\Delta, \leq)$ ein Gebäude vom Tp (W, I) ist mit Apartmentensystem

$$\mathcal{A} := \{\alpha(\mathcal{B}_W) \mid \alpha : W \rightarrow \Delta \text{ Isometrie}\}$$

Beispiel 3.66. Wir betrachten das dünne Gebäude $(W, \delta_W) = (D_3, \delta_{D_3})$ (als Kammerkomplex). Nun betrachten wir die verschiedenen J -Residuen für $J \subseteq I = \{i, j\}$.

- \emptyset -Residuen: $wW_\emptyset = \{w\}$ für alle $w \in D_3$.
- $\{i\}$ -Residuen: $W_i = \{1, i\}$, $jW_i = \{j, ji\}$, $ijW_i = \{ij, iji\}$
- $\{j\}$ -Residuen: $W_j = \{1, j\}$, $iW_j = \{i, ij\}$, $jiW_j = \{ji, jij\}$
- $\{i, j\}$ -Residuen: $W_{i,j} = D_3$.

Mit der angegebenen simplicialen Struktur auf diesen Residuen erhalten wir somit genau den Coxeterkomplex $\Sigma(D_3, \{i, j\})$.

4 Gruppen mit Tits-Systemen

4.1 BN-Paare und das Einfachheitskriterium von Tits

Definition 4.1. Sei G eine Gruppe und $H, K \leq G$ Untergruppen. Für $g \in G$ heißt

$$HgK := \{h g k \mid h \in H, k \in K\}$$

eine Doppelnebenklasse und wir schreiben

$$H \backslash G / K := \{HgK \mid g \in G\}.$$

Lemma 4.2. *Doppelnebenklassen sind entweder disjunkt oder gleich.*

Beweis. Seien $h_1, h_2 \in H$ sowie $k_1, k_2 \in K$ und $g_1, g_2 \in G$ mit

$$h_1 g_1 k_1 = h_2 g_2 k_2$$

Dann erhalten wir

$$g_1 = h_1^{-1} (h_2 g_2 k_2) k_1^{-1} = (h_1^{-1} h_2) g_2 (k_2 k_1^{-1}) \in H g_2 K$$

und damit $H g_1 K \subseteq H g_2 K$. Analog erhält man die andere Inklusion. \square

Definition 4.3. Sei G eine Gruppe, $B, N \leq G$ Untergruppen und $S \subseteq N$ eine Teilmenge. Wir nennen (G, B, N, S) ein *Tits-System* oder auch *BN-Paar* wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ und $T := B \cap N \trianglelefteq N$.

(BN2) $S' = \{sT \mid s \in S\}$ sind Involutionen und erzeugen $W := N/T$.

(BN3) $\forall s \in S \forall n \in N : BnBsB \subseteq BnB \cup BnsB$.

(BN4) $\forall s \in S : sBs^{-1} \neq B$.

Wir nennen W die *Weyl-Gruppe* des Tits-Systems. Der Name Tits-System kommt aus Bourbaki (nach Jacques Tits), der Name BN-Paar von **B**orelgruppe **N**ormalisator.

Wir wollen als nächstes zeigen, dass die Weyl-Gruppe W eine Coxetergruppe ist. Dazu benötigen wir zunächst einige technische Lemmata. Sei von nun an (G, B, N, S) ein Tits-System und

$$W = N/T = \langle S' \rangle$$

die Weyl-Gruppe, wobei $T = N \cap B$. Auf W betrachten wir die Längenfunktion $l := l_{S'}$ bezüglich $S' \subseteq W$.

Lemma (A). *Seien $w, w' \in W$ mit $BwB = Bw'B$. Dann gilt bereits $w = w'$.*

Beweis. o.E. sei $l(w) \leq l(w')$.

- I.A.: Für $l(w) = 0$ gilt schon $w = 1_W = T$ und damit

$$Bw'B = BwB = BTB = B$$

da $T \subseteq B$. Also folgt $w' \subseteq B$ und damit schon (wegen $w' \subseteq N$) $w' = 1_W = w$.

- I.S.: Sei nun $l(w) > 0$ und $s' \in S'$ mit $w = s'w_1$ und $l(w_1) = l(w) - 1$. Es gilt

$$\begin{aligned} s'w_1B &\subseteq Bs'w_1B \\ &= BwB = Bw'B \end{aligned}$$

Damit erhalten wir mithilfe von (BN3)

$$\begin{aligned} w_1B &\subseteq s'Bw'B \\ &\subseteq Bs'Bw'B \\ &\subseteq Bw'B \cup Bs'w'B \end{aligned}$$

und somit

$$Bw_1B \subseteq Bw'B \cup Bs'w'B$$

Da Doppelnebenklassen entweder gleich oder disjunkt sind, erhalten wir

$$Bw_1B = Bw'B \vee Bw_1B = Bs'w'B$$

Nach I.V. erhalten wir damit

$$w_1 = w' \vee w_1 = s'w'.$$

Wegen $l(w_1) < l(w) \leq l(w')$ gilt somit schon $w_1 = s'w'$ und damit folgt

$$w = s'w_1 = s's'w' = w'.$$

□

Lemma (B). Sei $s' \in S'$ und $w \in W$ mit $l(s'w) \geq l(w)$. Dann gilt

$$Bs'BwB = Bs'wB$$

Beweis.

I.A.: Mit $l(w) = 0$ folgt $w = T$ und damit wegen $T \subseteq B$

$$Bs'BwB = Bs'BTB = Bs'B = Bs'TB = Bs'wB.$$

I.S.: Sei nun $l(w) > 0$ und $t \in S'$ mit $w = w't$ und $l(w) = l(w') + 1$. Offensichtlich gilt

$$Bs'BwB \supseteq Bs'wB$$

und nach (BN3) gilt andererseits

$$Bs'BwB \subseteq BwB \cup Bs'wB.$$

Angenommen es gilt $Bs'BwB \neq Bs'wB$, so folgt also schon

$$Bs'BwB \cap BwB \neq \emptyset.$$

Damit erhalten wir weiter:

$$Bs'B \underbrace{w}_{=w't} \cap BwB \neq \emptyset$$

und damit

$$Bs'Bw' \cap BwBt \neq \emptyset$$

und somit insbesondere

$$Bs'Bw'B \cap BwBt \neq \emptyset.$$

Wieder nach (BN3) erhalten wir

$$BwBt \subseteq BwB \cup B \underbrace{wt}_{=w'} B$$

und somit

$$Bs'Bw'B \cap (BwB \cup Bw'B) \neq \emptyset$$

Wegen $l(s'w') \geq l(w)$ gilt $l(s'w') \geq l(w')$ und nach I.V. folgt somit

$$Bs'Bw'B = Bs'w'B$$

und somit

$$Bs'w'B \cap (BwB \cup Bw'B) \neq \emptyset$$

Da Doppelnebenklassen gleich oder disjunkt sind, erhalten wir

$$Bs'w'B = BwB \vee Bs'w'B = Bw'B$$

und mit Lemma A somit

$$s'w' = w \vee s'w' = w'.$$

Wäre $s'w' = w$ würde der Widerspruch

$$l(w) \leq l(w') = l(w) - 1$$

folgen. Und ebenso führt $s'w' = w'$ zu dem Widerspruch $s' = 1_W$.

□

Lemma (C). Für $s' \in S'$ und $w \in W$ mit $l(s'w) \leq l(w)$ gilt:

$$Bs'BwB = Bs'wB \cup BwB$$

Beweis. Mithilfe von (BN3) und (BN4) erhält man schnell

$$Bs'Bs'B = B \cup Bs'B \quad (\star)$$

Nun gilt

$$l(s's'w) = l(w) \geq l(s'w)$$

und mit Lemma B erhalten wir somit

$$Bs'Bs'wB = Bs's'wB = BwB. \quad (**)$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned} Bs'BwB &= Bs'B(BwB) \\ &\stackrel{**}{=} Bs'B(Bs'Bs'wB) \\ &= (Bs'Bs'B)Bs'wB \\ &\stackrel{*}{=} (B \cup Bs'B)Bs'wB \\ &= Bs'wB \cup Bs'Bs'wB \\ &\stackrel{**}{=} Bs'wB \cup BwB \end{aligned}$$

□

Satz. (W, S') ist ein Coxetersystem.

Beweis. Wir zeigen, dass die Exchange-Condition in W gilt.

Sei $w = s_1 \dots s_l \in W$ mit $s_i \in S'$ und $l(w) = l$. Nun sei $r \in S'$ mit $l(rw) \leq l$. Wir wählen

$$i = \min\{j = 1, \dots, l \mid l(rs_1 \dots s_j) < j + 1\}$$

Dann sind $u = rs_1 \dots s_{i-1}$ und $v = s_1 \dots s_i$ reduzierte Worte mit $us_i = rv$. Wegen $l(u) \geq l(us_i)$ erhalten wir mit Lemma A:

$$Bus_iB \cup BuB = BuBs_iB$$

Durch wiederholtes Anwenden von Lemma B und C erhalten wir weiter

$$BuBs_iB = \dots = BrBs_1Bs_2 \dots Bs_iB = \dots = BrvB \cup BvB$$

und damit

$$BuB = BvB$$

was nach Lemma A bereits $u = v$ impliziert. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} w &= (s_1 \dots s_i)s_{i+1} \dots s_l \\ &= (v)s_{i+1} \dots s_l \\ &= (u)s_{i+1} \dots s_l \\ &= (rs_1 \dots s_{i-1})s_{i+1} \dots s_l = rs_1 \dots \hat{s}_i \dots s_l \end{aligned}$$

und damit die Gültigkeit der Exchange-Condition. □

Satz (Einfachheitskriterium von Tits). Sei (G, B, N, S) ein Tits-System mit Weylgruppe W . Sei weiter (W, S') irreduzibel, G perfekt und B auflösbar. Dann ist für

$$H = \bigcap_{g \in G} gBg^{-1}$$

die Gruppe G/H einfach.

Beispiel. Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $G = SL_n(K)$. Wir betrachten die Untergruppen

$$B := \{A \in G \mid A \text{ obere Dreiecksmatrix}\}$$

$$N := \{A \in G \mid A \text{ monomial}\}$$

und die Teilmenge

$$S := \left\{ \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \\ \hline & & \mathbb{1}_{n-2} \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{c|cc} \mathbb{1}_{n-2} & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \end{array} \right) \right\}$$

Man kann nun zeigen, dass (G, B, N, S) ein Tits-System ist. Ferner ist G für $n > 2$ und $\#K > 3$ perfekt und B auflösbar. Die Weylgruppe W ist $\text{Sym}(n)$ und es gilt

$$\bigcap_{g \in G} gBg^{-1} = Z(G)$$

Mit dem Einfachheitskriterium erhalten wir damit das Resultat, dass die Gruppe

$$PSL_n(K) = SL_n(K)/Z(G)$$

einfach ist.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass gilt

$$PSL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

$$PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong A_4$$

und diese projektiven Gruppen daher nicht einfach sind.

4.2 Stark transitive Wirkungen

Definition 4.4. Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W, I) mit Apartmentsystem \mathcal{A} . Sei G eine Gruppe die auf Δ durch reguläre simpliziale Abbildungen über I wirkt mit $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für alle $g \in G$. Solch eine Wirkung schreiben wir kurz als

$$G \rightarrow \text{Aut}(\Delta, \mathcal{A})$$

und heißt *stark transitiv*, falls gilt:

(ST1) G wirkt auf $\text{cham}(\Delta)$ transitiv.

(ST2) G wirkt auf \mathcal{A} transitiv.

(ST3) Für $\Sigma \in \mathcal{A}$ wirkt $N_G(\Sigma) := \{g \in G \mid g\Sigma = \Sigma\}$ transitiv auf $\text{cham}(\Sigma)$.

Bemerkung. Das Axiom (ST1) ist redundant, denn für zwei Kammern c_1, c_2 gibt es nach (G3) ein Apartment Σ mit welches die Kammern enthält. Nun gibt es nach (ST3) ein $g \in N_G(\Sigma)$ mit $g(c_1) = c_2$.

Beispiel. Die kanonische Wirkung $W \curvearrowright \Sigma(W, I)$ ist stark transitiv. Das Axiom (ST1) haben wir nachgerechnet und die anderen beiden sind wegen $\mathcal{A} = \{\Sigma(W, I)\}$ triviale Aussagen.

Theorem 4.5.

1. Sei G eine Gruppe mit Tits-System (G, B, N, S) mit Weyl-Gruppe (W, S') . Dann gibt es ein dickes Gebäude

$$\Delta = \Delta(G, B, N, S)$$

vom Typ (W, S') auf dem G stark transitiv wirkt. Ist c_0 eine Kammer und Σ_0 ein Apartment welches c_0 enthält, so gilt weiter:

$$\begin{aligned} B &= \{g \in G \mid g(c_0) = c_0\} \\ N &= \{g \in G \mid g(\Sigma_0) = \Sigma_0\} \end{aligned}$$

2. Sei andererseits G eine Gruppe welche auf ein dickes Gebäude (Δ, \mathcal{A}) vom Typ (W, S') stark transitiv wirkt. Weiter sei c_0 eine Kammer und Σ_0 ein Apartment welches c_0 enthält. Für die Gruppen

$$\begin{aligned} B &:= \{g \in G \mid g(c_0) = c_0\} \\ N &:= \{g \in G \mid g(\Sigma_0) = \Sigma_0\} \\ T &:= B \cap N \end{aligned}$$

gilt dann $N/T \stackrel{f}{\cong} W$. Sei S ein Repräsentantensystem von $f^{-1}(S')$. Dann ist (G, B, N, S) ein Tits-System für G und Δ ist kanonisch isomorph zu $\Delta(G, B, N, S)$.

4.3 Geometrische Interpretation von $GL_3(K)$

Beispiel 4.6.

Wir betrachten den 3-dim. K -Vektorraum $V = K^3$ und den zugehörigen Fahnenkomplex $\Delta(V)$:

- 0-dim. Simplizes: $\{U\} \in \Delta(V)$ mit $\dim(U) \in \{1, 2\}$.
- 1-dim. Simplizes: $\{U_1 \subsetneq U_2\} \in \Delta(V)$ mit $\dim(U_1) = 1$ und $\dim(U_2) = 2$.

Die Typfunktion

$$\begin{aligned} t : \Delta(V) &\longrightarrow \mathcal{P}(I) \\ \{U\} &\longmapsto \{\dim(U)\} \\ \{U_1 \subsetneq U_2\} &\longmapsto \{1, 2\} \end{aligned}$$

ist eine reguläre, simpliziale Abbildung und $\Delta(V)$ ist somit ein 1-dim. Simplizialkomplex über I . Die Gruppe $GL_3(K)$ wirkt auf natürliche Weise V . Dies induziert eine Wirkung

$$GL_3(K) \curvearrowright \Delta(V)$$

durch Automorphismen über I . Zur Erinnerung: Für eine Basis B betrachten wir das Apartment

$$\Sigma(B) := \{c \in \Delta \mid \forall U \in c : \exists B_U \subseteq B : U = \langle B_U \rangle\}$$

und das Apartmentsystem

$$\mathcal{A} := \{\Sigma(B) \mid B \text{ Basis}\}$$

Da für $g \in GL_3(K)$ auch $g(B)$ eine Basis ist, erhalten wir $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ und somit

$$\psi : GL_3(K) \rightarrow \text{Aut}(\Delta(V), \mathcal{A})$$

Nun zeigen wir, dass ψ stark transitiv auf $\Delta(V)$ wirkt:

(ST1) In der Übungsaufgabe 1.1 haben wir gezeigt, dass $GL_3(K)$ transitiv auf den Kammern wirkt.

(ST2) Seien B_1, B_2 Basen von V . Dann sei $g \in GL_3(K)$ mit $g(B_1) = B_2$. Somit erhalten wir

$$g(\Sigma(B_1)) = \Sigma(g(B_1)) = \Sigma(B_2)$$

(ST3) Sei $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von V . Dann gilt für den Stabilisator von $\Sigma := \Sigma(E)$:

$$N_{GL_3(K)}(\Sigma) = \{g \in GL_3(K) \mid g \text{ monomiale Matrix}\}$$

und offensichtlich wirkt diese Untergruppe transitiv auf $\text{cham}(\Sigma)$. Sei nun B eine beliebige Basis. Nach (ST2) gibt es $h \in GL_3(K)$ mit $h\Sigma(B) = \Sigma$. Damit wirkt also auch

$$\begin{aligned} N_{GL_3(K)}(\Sigma(B)) &= \{g \in GL_3(K) \mid g\Sigma(B) = \Sigma(B)\} \\ &= \{g \in GL_3(K) \mid gh^{-1}\Sigma = h^{-1}\Sigma\} \\ &= \{g \in GL_3(K) \mid hgh^{-1}\Sigma = \Sigma\} = hN_G(\Sigma)h^{-1} \end{aligned}$$

transitiv auf $\text{cham}(\Sigma(B)) = h \cdot \text{cham}(\Sigma) \cdot h^{-1}$.

Nun betrachten wir die Kammer

$$c_0 := \left\{ \langle e_1 \rangle \subsetneq \langle e_1, e_2 \rangle \right\} \in \Delta(V)$$

und das Apartment

$$\Sigma_0 := \Sigma(\{e_1, e_2, e_3\}) \in \mathcal{A}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \text{Stab}\langle e_1 \rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \in GL_3(K) \right\} \\ \text{Stab}\langle e_1, e_2 \rangle &= \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \in GL_3(K) \right\} \end{aligned}$$

und damit erhalten wir

$$B := \text{Stab}(c_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \star & \star & \star \\ 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \in GL_3(K) \right\}$$

Eine kurze Rechnung ergibt weiter

$$N := \text{Stab}(\Sigma_0) = \{ \text{monomiale Matrizen in } GL_3(K) \}$$

sowie

$$T := B \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} \star & 0 & 0 \\ 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & \star \end{pmatrix} \in GL_3(K) \right\}$$

Ferner beobachten wir für $s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ folgenden Isomorphismus:

$$\begin{aligned} N/T &\xrightarrow{\cong} \text{Sym}(3) \\ s_1 T &\mapsto (1, 2) \\ s_2 T &\mapsto (2, 3) \end{aligned}$$

Nach dem obigen Theorem ist nun

$$\left(GL_3(K), B, N, S = \{s_1, s_2\} \right)$$

ein BN-Paar für $GL_3(K)$.