# Gebäude

- Coxetergruppen bzw. Coxeterkomplexe sind dünne Gebäude
- Fahnenkomplexe $\Delta(K^{n+1})$ sind Gebäude vom Typ $A_n$ $(\bullet\!-\!\bullet\!-\!\bullet \cdots \!-\!\bullet)$
- Bäume ohne Blätter sind Gebäude vom Typ $\tilde{A}_1$ $(\bullet\overset{\infty}{-\!-}\bullet)$
- verallg. m-Ecke sind Gebäude vom Typ $\bullet\overset{m}{-\!-}\bullet$
- Mengen mit mindestens zwei Elementen sind Gebäude vom Typ $A_1$.

## Gruppen + Gebäude

$G \curvearrowright \Delta$ (stark transitiv) $\rightsquigarrow$ $G$ hat ein BN-Paar und $\Delta \cong \Delta(G,B,N,S)$

$G$ hat ein BN-Paar $\rightsquigarrow$ $G \curvearrowright \Delta(G,B,N,S)$ (stark transitiv)

abstrakte Gruppe

Geometrie (geometrische Interpretation der Gruppe)

**Theorem (Tits):** Sei $\Delta$ ein Gebäude vom Typ $(W,I)$, wobei $(W,I)$ ein irred. Coxetersystem ist und $\# W < \infty$.

Wenn $\underline{\# I \geq 3}$, dann $\Delta \cong \Delta(\underbrace{G,B,N,S}_{\text{algebraische Daten}})$ (wobei $G$ eine „klassische" oder algebraische Gruppe ist). $\rightsquigarrow$ Klassifikation

(Matrixgruppen)

## 6. Beispiel: Geometrische Interpretation der Gruppe $\underset{(n)}{GL_3}(K)$ (bzw. $\underset{(n)}{PGL_3}(K)$, $\underset{(n)}{SL_3}(K)$, $\underset{(n)}{PSL_3}(K)$)

Im folgenden sei $K$ ein Körper (mit $q$-Elementen) und $V$ ein 3-dimensionaler Vektorraum über $K$.

<u>Erinnerung:</u>

- $PG(V) = \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum}, \ 0 \neq U \neq V \}$
- Eine <u>Fahne</u> ist eine aufsteigende Kette von Unterräumen:

$$0 \neq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_k \subsetneq V$$

- Der <u>Fahnenkomplex</u> $\Delta(V)$ ist die Menge aller Fahnen mit der Inklusion „$\subseteq$" von Fahnen als partielle Ordnung. Dabei erlauben wir die leere Fahne $\{\}$.

- $\Delta(V)$ ist ein 1-dim. Simplizialkomplex:

  0-dim Simplizes: 1-dim. Vektorräume und 2-dim. Vektorräume

  1-dim: Simplizes: $U_1 \subsetneq U_2$, wobei $\dim U_2 = 1$, $\dim U_2 = 2$

<u>Beispiele:</u> $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ und $\Delta(\mathbb{F}_3^3)$

Aus Aufgabe 1.2. wissen wir, dass $\#$ 0-Simplizes $= 2 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 2$

$\#$ 0-Simpl. in $\Delta(\mathbb{F}_2^3) = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 2 = 14$

$\#$ 0-Simpl. in $\Delta(\mathbb{F}_3^3) = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 + 2 = 26$

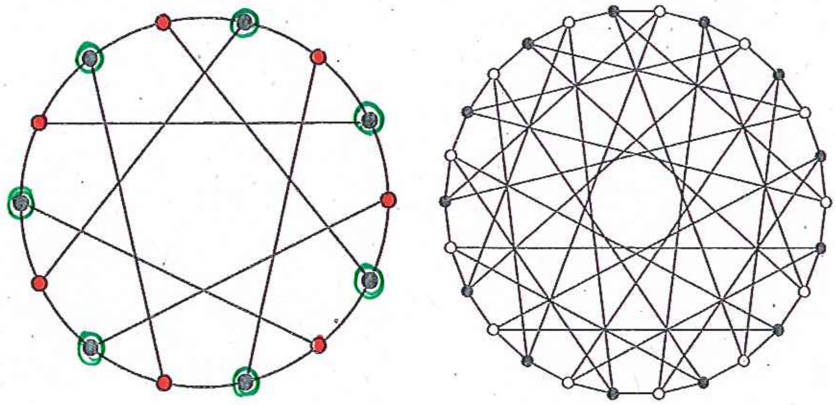


Figure 1: The flag complex Δ of the three dimensional vector space over the fields of order 2 *(left)* and 3 *(right)*.

- Die Gruppe $GL(V)$ operiert auf $\Delta(V)$ wie folgt:

$$\Psi : GL(V) \to Sym(\Delta(V))$$
$$g \longmapsto \left[ \begin{array}{l} U_1 \longmapsto g(U_1) \\ U_1 \subsetneqq U_2 \longmapsto g(U_1) \subsetneqq g(U_2) \end{array} \right]$$

<u>Ziel:</u> $\Psi : GL(V) \to Sym(\Delta(V))$

stark transitiv

- $\Delta(V) \cong \Delta(GL(V), B, N, S)$

Zuerst überlegen wir uns, dass $\Delta(V)$ ein Simplizialkomplex über $I = \{1,2\}$ ist.

Wir def. wie folgt eine Abbildung:

$$t : \Delta(V) \to \mathcal{P}(I)$$
$$\{U_k\} \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \dim U_k = 1 \\ 2, & \text{falls } \dim U_k = 2 \end{cases}$$
$$\{U_k \subsetneqq U_l\} \longmapsto \{1,2\}$$

$\rightsquigarrow$ $t$ ist eine reguläre simpliziale Abbildung.

Also ist $\Delta(V)$ ein 1-dim. Simplizialkomplex über $I = \{1,2\}$.

- Weiter ist $\Psi : GL(V) \to Aut(\Delta(V))$

Automorphismengruppe über $I$

__Erinnerung:__

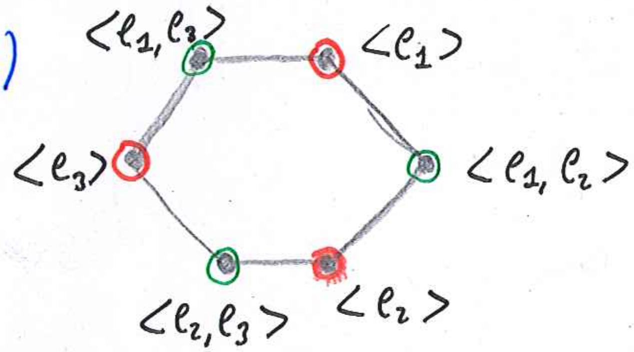
Ist $\{b_1, b_2, b_3\} = B$ eine Basis von $V$, so sei $\Sigma(B)$ die Menge aller Fahnen für die gilt:

jedes Element aus der Fahne wird von einer Teilmenge von $B$ aufgespannt.

Dann ist $\Sigma(B)$ ein Unterkomplex von $\Delta(V)$. Wir nennen $\Sigma(B)$ ein Appartement.

__Beispiel:__ $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$

$\Sigma(B)$




- Sei $\mathcal{A} = \{\Sigma(B) \mid B$ ist Basis von $V\}$

Es gilt: $\Psi : SL(V) \to \mathrm{Aut}(\Delta(V), \mathcal{A})$

d.h. $SL(V)$ operiert durch reguläre simpliziale Automorphismen über $I$ auf $\Delta(V)$ und $\Psi(g)(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ für alle $g \in SL(V)$.

- Wir identifizieren $V \cong K^3$.

<u>z.z:</u> $\Psi: SL_3(K) \to \mathrm{Aut}(\Delta(K^3), \mathcal{A})$ ist eine stark transitive Wirkung.

(ST1) $SL_3(K)$ operiert transitiv auf $\mathrm{cham}(\Delta(K^3))$
- siehe Aufgabe 1.1 d)

(ST2) $SL_3(K)$ operiert transitiv auf $\mathcal{A}$.

<u>Denn:</u> Seien $B_1, B_2$ zwei Basen von $K^3$.

Dann $\exists\ g \in SL_3(K)$ mit $g(B_1) = B_2$.

Folglich: $g(\Sigma(B_1)) = \Sigma(B_2)$.

(ST3) Ist $\Sigma(B) \in \mathcal{A}$, so operiert

$$\underset{SL_3(K)}{N}(\underset{\Sigma(B)}{\overset{\shortparallel}{\Sigma}}) = \{ g \in S \mid g(\Sigma) = \Sigma \}$$ transitiv auf $\mathrm{cham}(\Sigma)$.

<u>Denn:</u> Sei $\{e_1, e_2, e_3\}$ die Standardbasis von $K^3$

und $\Sigma = \Sigma(\{b_1, b_2, b_3\})$.

Dann ist $N_{SL_3(K)}(\Sigma) = \{$ monomiale Matrizen in $SL_3(K)\}$

und $N_{SL_3(K)}(\Sigma)$ wirkt transitiv auf $\mathrm{cham}(\Sigma)$.

Sei nun $B$ eine bel. Basis von $K^3$. Nach (ST2) ex.

$\tilde{g} \in SL_3(K)$ mit $\tilde{g}(\Sigma(B)) = \Sigma(\{b_1, b_2, b_3\})$.

Es gilt: $N_{SL_3(K)}(\Sigma(B)) = \tilde{g}^{-1} N_{SL_3(K)}(\Sigma(\{b_1, b_2, b_3\}) \tilde{g}$.

und $N_{SL_3(K)}(\Sigma(B))$ wirkt transitiv auf $\mathrm{cham}(\Sigma(B))$.

Theorem 5(ii):

$\Rightarrow$ $C_0 := \langle e_1 \rangle \subseteq \langle e_1, e_2 \rangle$

$\Sigma_0 := \Sigma(\{b_1, b_2, b_3\})$

$$B = \{ g \in SL_3(K) \mid \Psi(g)(C_0) = C_0 \} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

denn: $\mathrm{stab}(\langle e_2 \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} =: P_2$

$\mathrm{stab}(\langle e_1, e_2 \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} =: P_1$

$$B = P_1 \cap P_2 = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$$

$$N = \{ g \in SL_3(K) \mid \Psi(g)(\Sigma_0) = \Sigma_0 \} = \{ \text{monomiale Matrizen} \}$$

- $T := B \cap N = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$

- $N/_{T} \cong Sym(3)$

$s_1 T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T \longmapsto (12)$

$s_2 T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} T \longmapsto (23)$

$(SL_3(K), B, N, S = \{s_1, s_2\})$ ist ein Tits-System für $SL_3(K)$

- __z.z:__ $\Delta(K^3)$ ist kanonisch isomorph zu $\Delta(\underset{\overset{\shortparallel}{SL_3(K)}}{G}, B, N, S)$

__Erinnerung:__ Konstruktion von $\Delta(G, B, N, S)$

$P_\emptyset = B$

$P_{s_1} = Bs_1B \cup B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$

$P_{s_2} = Bs_2B \cup B = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$

$P_{\{s_1, s_2\}} = SL_3(K)$

$$\Delta(G, B, N, S) = G/B \cup G/P_{S_1} \cup G/P_{S_2}$$

mit „$\leq$".

0-dim. Simplizes:

$$SL_3(K)/\mathrm{stab}(\langle e_1 \rangle) \xrightarrow{1:1} \{1\text{-dim. Vektorräume}\}$$

$$\mathrm{stab}(\langle e_1 \rangle) = P_{S_2}$$

<u>Also:</u> $G/P_{S_2} \longleftrightarrow \{1\text{-dim. Vektorräume}\}$

$$SL_3(K)/\mathrm{stab}(\langle e_1, e_2 \rangle \xrightarrow{1:1} \{2\text{-dim. Vektorräume}\}$$

<u>Also:</u> $G/P_{S_1} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{2\text{-dim. Vektorräume}\}$

$$G/B \xrightarrow{1:1} \{1\text{-dim. Simplizes}\}$$

Insgesamt $\Delta(G, B, N, S) \cong \Delta(K^3)$ z.z.: ordnungserhaltend ✓

Wiederholung

Sei $G$ eine Gruppe, $B, N \leq G$ Untergruppen und $S \subseteq N$ eine Teilmenge. Wir nennen $(G, B, N, S)$ ein Tits-System oder BN-Paar, wenn folgendes gilt:

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ und $T := B \cap N \trianglelefteq$ ist normal in $N$.

Setze $W := N/T$.

(BN2) Die Elemente $\{sT \mid s \in S\}$ erzeugen $W$ und sind Involutionen.

(BN3) Für alle $s \in S$ und $n \in N$ gilt:

$$BnBsB \subseteq BnB \cup BnsB$$

(BN4) Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \neq B$.

Bemerkung:

(BN4) ist äquivalent zu (BN4'): Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \not\subseteq B$.

Bew: (BN4') $\Rightarrow$ (BN4) ✓

zu (BN4) $\Rightarrow$ (BN4').

Angenommen es ex. $s \in S$ mit $sBs^{-1} \subseteq B$

$$\overset{T \subseteq B}{\Rightarrow} sTBTs^{-1} \subseteq B$$

$$\overset{s^{-1}T = Ts^{-1}}{\Rightarrow} sTBs^{-1}T \subseteq B$$

$$\overset{sT = s^{-1}T}{\Rightarrow} B \subseteq sTBs^{-1}T = sTBTs^{-1}$$

$$= sBs^{-1}$$

Folglich: $B = sBs^{-1}$ ↯.

## 7. Lemma

Sei $(G, B, N, S)$ ein Titssystem. Weiter seien $w, w' \in W$ bel.

Wenn $BwB = Bw'B$ gilt, dann folgt $w = w'$.

Beweis: Mit $\ell(w)$ bezeichnen wir die Länge von $w$ bzgl. $S' = \{sT \mid s \in S\}$.

oBdA: $\ell(w) \leq \ell(w')$

Induktion nach $\ell(w)$:

IA: $\ell(w) = 0 \Rightarrow w = 1_W = T$

Also: $BwB = BTB = B$

$\quad\ \ \|$

$Bw'B \Rightarrow w' \subseteq B$

Es gilt auch: $w' = nT \subseteq N$

$\Rightarrow w' \subseteq B \cap N = T$

$\Rightarrow w' = T = 1_W$.

IS: $\ell(w) > 0$.

Dann ex. $s' \in S'$ mit $w = s'w_1$ und $\ell(w_1) = \ell(w) - 1$.

Es gilt:

$wB = s'w_1B \subseteq Bs'w_1B \overset{\text{Vor.}}{=} Bw'B$

$\cdot s'^{-1}$

$\Rightarrow w_1B \subseteq s'Bw'B \subseteq Bs'Bw'B \overset{\text{BN3 invert.}}{\subseteq} Bw'B \cup Bs'w'B$

$\Rightarrow Bw_1B \subseteq Bw'B \cup Bs'w'B$

$\Rightarrow Bw_1B = Bw'B$ oder $Bw_1B = Bs'w'B$

Doppelnebenklassen sind gleich oder disjunkt

Nach IVor. folgt $w_1 = w'$ oder $w_1 = s'w'$

Da aber $\ell(w_1) < \ell(w) \leq \ell(w')$ ist,

erhalten wir $w_1 = s'w'$

und $\underline{\underline{w}} = s'w_1 = \underline{\underline{w'}}$ $\square$.

8. Lemma

Für $s' \in S'$ und $w \in W$ mit

$\ell(s'w) \geq \ell(w)$ gilt: $Bs'BwB = Bs'wB$.

Beweis:

Induktion nach $\ell(w)$:

IA: $\ell(w) = 0 \Rightarrow w = 1$

Dann: $Bs'BwB = Bs'B$.

IS: $\ell(w) > 0$. Es ex. $t \in S'$ und $w' \in W$ mit

$w = w't$ und $\ell(w) = \ell(w') + 1$

A: $Bs'BwB \neq Bs'wB$

Es gilt: $Bs'BwB \overset{\text{BN3 invert.}}{\subseteq} BwB \cup Bs'wB$

Da $Bs'BwB \neq Bs'wB$ folgt $Bs'BwB \cap BwB \neq \emptyset$

$\Rightarrow Bs'Bw \cap BwB \neq \emptyset$

$w = w't \Rightarrow Bs'Bw't \cap BwB \neq \emptyset$

$\overset{\cdot t}{\Rightarrow} Bs'Bw' \cap BwBt \neq \emptyset$

Wenn $s'w' = w$, dann:

$$\ell(w) \overset{\text{Vor.}}{\leq} \ell(s'w) = \ell(w') = \ell(w) - 1 \quad ⚡.$$

Wenn $s'w' = w'$, dann $s' = 1$ ⚡. □

9. Lemma

Für $s' \in S'$ und $w \in W$ mit $\ell(s'w) \leq \ell(w)$ gilt:

$$Bs'BwB = Bs'wB \cup BwB$$

Beweis:

Vorüberlegung: Es gilt: $Bs'Bs'B = B \cup Bs'B$

Denn: Nach (BN3) gilt: $Bs'Bs'B \subseteq B \cup Bs'B$

Zu „$\supseteq$": Es gilt $B \subseteq Bs'Bs'B$, denn $b = bs'1s'1$.

z.z.: $Bs'B \subseteq Bs'Bs'B$.

Es gilt $Bs'Bs'B \subseteq B \cup Bs'B$

$\Rightarrow s'Bs' \subseteq B \cup Bs'B$

Nach (BN4') gilt: $s'Bs' \not\subseteq B$

$\Downarrow$

$s'Bs' \cap Bs'B \neq \emptyset$

Es ex. $b, \tilde{b}, \tilde{\tilde{b}} \in B$ mit: $s'bs' \overset{(*)}{=} \tilde{b}s'\tilde{\tilde{b}}$.

Sei nun $xs'y \in Bs'B$ bel.

Wir schreiben $xs'y = \underbrace{(x\tilde{b}^{-1})}_{\in B} \underbrace{\tilde{b}s'\tilde{\tilde{b}}}_{\overset{(*)}{\in} s'Bs'} \underbrace{(\tilde{\tilde{b}}^{-1}y)}_{\in B} \in Bs'Bs'B$.

$\Rightarrow BsBw'B \cap BwBt \neq \emptyset$. (*)

Weiter gilt: $BwBt \overset{(BN3)}{\subseteq} BwB \cup BwtB$

$\overset{wt=w'}{=} BwB \cup Bw'B$ (*)(*)

Also gilt: $BsBw'B \overset{(*) \text{ und } (*)(*)}{\cap} (BwB \cup Bw'B) \neq \emptyset$.

Z.z: $\ell(s'w') \geq \ell(w')$

Angenommen $\ell(s'w') < \ell(w')$, so wäre

$\ell(s'w) = \ell(s'w't) \leq \ell(s'w') + 1$

$< \ell(w') + 1 = \ell(w)$ ↯ zur Vor.

Nach I.vor. gilt also: $Bs'Bw'B = Bs'w'B$.

Damit erhalten wir:

$$BsBw'B \cap (BwB \cup Bw'B) \neq \emptyset$$

$\shortparallel$

$$\Rightarrow Bs'w'B \cap (BwB \cup Bw'B) \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow Bs'w'B = BwB \quad \text{oder} \quad Bs'w'B = Bw'B$$

$$\overset{\text{Lemma 7}}{\Rightarrow} s'w' = w \quad \text{oder} \quad s'w' = w'$$

Es gilt: $\ell(s' \underbrace{s'w}) = \ell(w) \overset{\text{Vor.}}{\geq} \ell(\underbrace{s'w})$

Lemma 8 für $s'w$ $\Rightarrow$ $Bs'Bs'wB = Bs's'wB = BwB$. (*)

Weiter haben wir:

$$
\begin{aligned}
Bs'BwB &= Bs'B\,(BwB) \\
&\overset{(*)}{=} Bs'B\,(Bs'Bs'wB) \\
&= (Bs'Bs'B)(Bs'wB) \\
&\overset{\text{Vorüberl.}}{=} (B \cup Bs'B)(Bs'wB) \\
&= Bs'wB \cup Bs'Bs'wB \\
&\overset{(*)}{=} Bs'wB \cup BwB
\end{aligned}
$$

□

**10. Satz**

$(W, S')$ ist ein Coxetersystem.

<u>Beweis:</u> Wir zeigen, dass in $W$ die Exchange Condition (E) gilt.

Sei $w = s_1 \dots s_k$, $s_1, \dots, s_k \in S'$ mit $\ell(w) = k$

und $r \in S'$ mit $\ell(wr) \leq \ell(w)$.

<u>z.z:</u> es ex. $i \in \{1, \dots, k\}$ s.d. gilt: $w = s_1 \dots \hat{s_i} \dots s_k r$.

Wähle $i \in \{1, \ldots, k\}$ maximal s.d.

$s_i \ldots s_k r$ nicht reduziert ist.

Dann ist $u := s_{i+1} s_{i+2} \ldots s_k \cdot r$ reduziert und $v := s_i \ldots s_k$ ist auch reduziert.

und es gilt: $\underline{s_i \cdot u = v \cdot r}$

Es gilt:

1) $B s_i \cdot u B \cup BuB \overset{\text{Lemma 9}}{=} B s_i BuB$

$\ell(u) \geq \ell(s_i u)$

2) $BuB \overset{\text{Lemma 8}}{=} B s_{i+1} B s_{i+2} \ldots s_k \cdot r B \overset{\text{Lemma 8}}{=} B s_{i+1} B s_{i+2} B \ldots B r B$

$\ell(s_{i+1} s_{i+2} \ldots s_k \cdot r) \geq \ell(s_{i+2} \ldots s_k r)$

3) $B v r B \cup B v B \overset{\text{Lemma 9}}{=} B v B r B$

$\ell(vr) \leq \ell(v)$

4) $B v B \overset{\text{Lemma 8}}{=} B s_i B s_{i+1} B \ldots B s_k B$

Insgesamt: $\underline{\underline{B s_i u B \cup BuB}} \overset{1)+2)}{=} B s_i B s_{i+1} B s_{i+2} \ldots B r B$

$\overset{4)}{=} B v B r B$

$\overset{3)}{=} \underline{\underline{B v r B \cup B v B}}$

$\Rightarrow BuB = BvB \overset{\text{Lemma 7}}{\Rightarrow} u = v$ <u>Folglich:</u> $w = s_1 \ldots s_k$

$= s_1 \ldots \widehat{s_i} s_{i+1} \ldots s_k \cdot r$ $\square$