§4 Gruppen mit Tits-Systemen (BN-Paaren)

Wir wollen nun zu gewissen Gruppen ein dickes Gebäude konstruieren auf dem die Gruppe "schön" wirkt.

(i) Gruppe G hat eine "schöne" Struktur (BN-Paar) $\rightsquigarrow$ dickes Gebäude $\Delta(G, B, N, S)$ und $G \curvearrowright \Delta(G, B, N, S)$

Wenn eine Gruppe "schön" auf einem dick. Gebäude operiert, dann hat die Gruppe eine "schöne" algebraische Struktur.

(ii) Gruppe $G \xrightarrow[\text{transitiv}]{\text{"schön" stark}}$ Gebäude Δ

$\rightsquigarrow$ G hat eine "schöne" algebraische Struktur

<u>Mehr Motivation:</u>

$$
\begin{aligned}
\{\text{einfache endl. Gruppen}\} = &\{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mid p \in \mathbb{P}\} \\
&\cup \{\mathrm{Alt}(n) \mid n \geq 5\} \\
&\cup \{\text{einf. Gruppen vom Lie-Typ}\} \\
&\cup \{26 \text{ sporadische Gruppen}\}
\end{aligned}
$$

haben ein BN-Paar

1. Definition

Sei G eine Gruppe mit Untergruppen $H, K \leq G$. Eine Menge der Form $HgK = \{hgk \mid h \in H, k \in K\} \subseteq G$ heißt <u>Doppelnebenklasse</u>.

Schreibe $H \backslash G / K = \{HgK \mid g \in G\}$

2. Lemma

$HgK \cap Hg'K \neq \emptyset \iff HgK = Hg'K$

<u>Beweis:</u>

„$\Leftarrow$" ✓

„$\Rightarrow$" Da $HgK \cap Hg'K \neq \emptyset$, ex. $h, h' \in H$ und $k, k' \in K$ mit

$$hgk = h'g'k'$$

$$\Rightarrow \quad g = h^{-1}h'g'k'k^{-1} \quad \text{und} \quad g' = h'^{-1}hgk\,k'^{-1}$$

Folglich: $HgK \subseteq H'g'K$ und $Hg'K \subseteq HgK$

$$\Rightarrow \quad HgK = HgK \qquad \square$$

3. Definition

Sei G eine Gruppe, $B, N \leq G$ Untergruppen und $S \subseteq N$ eine Teilmenge. Wir nennen (G, B, N, S) ein <u>Tits-System</u> oder <u>BN-Paar</u>, wenn folgendes gilt:

(BN1) $G = \langle B \cup N \rangle$ und $T := B \cap N \trianglelefteq N$ ist normal in N.
Setze $W := N/T$.

(BN2) Die Elemente $\{sT \mid s \in S\}$ erzeugen W und sind Involutionen.

(BN3) Für alle $s \in S$ und $n \in N$ gilt:
$BnBsB \subseteq BnB \cup BnsB$

(BN4) Für alle $s \in S$ ist $sBs^{-1} \neq B$

Der Name Tits-System kommt aus Bourbaki (nach Jacques Tits), der Name BN-Paar von

$\underline{B}$ - Borelgruppe

$\underline{N}$ - Normalisator

Die Gruppe W heißt <u>Weyl-Gruppe</u> des Tits-Systems.

Vorschau:

$(W, S' = \{sT \mid s \in T\})$ ist ein Coxetersystem.

<u>Beweisidee:</u> <u>z.z:</u> (E) exchange condition gilt in W.

Satz: (Einfachheitskriterium von Tits) $\rightsquigarrow$ Seminar WS 17/18

Sei (G, B, N, S) ein Titssystem mit Weylgruppe W. Sei weiter (W, S') irreduzibel, G perfekt und B auflösbar.

Dann ist $G / \bigcap_{g \in G} g^{-1} B g$ einfach.

Beispiel:

Sei K ein Körper, $n \geq 2$ und $G = SL_n(K)$.

$B :=$ Menge der oberen Dreiecksmatrizen von G

$N :=$ Menge der monomialen Matrizen von G (d.h. in jeder Zeile und Spalte steht genau ein Eintrag $\neq 0$)

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix} \right\}$$

Dann ist (G, B, N, S) ein Tits-System mit Weylgruppe $W \cong Sym(n)$ (also irreduzibel mit (W, S'))

- Für $n > 2$ und $\# K > 3$ ist G perfekt.
- B ist auflösbar
- $\bigcap_{g \in G} g^{-1} B g = \text{Zentrum}(G) = Z(G)$

Einfachheits-kriterium $\Rightarrow$ $SL_n(K) / Z(SL_n(K)) =: PSL_n(K)$ ist einfach für $n > 2$ und $\# K > 3$.

Ausnahmen: $PSL_2(\mathbb{F}_2) \cong Sym(3)$, $PSL_2(\mathbb{F}_3) \cong Alt(4)$ } also nicht einfach

Details im Seminar WS 17/18.

4. Definition

Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W, I) mit Appartement-system $\mathcal{A}$. Sei G eine Gruppe, die auf Δ operiert, d.h. G operiert durch reguläre simpliziale Automorphismen über I auf Δ und $g(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ gilt für alle $g \in G$.

Schreibe kurz $G \to Aut(\Delta, \mathcal{A})$.

Wir nennen solch eine Wirkung stark transitiv, wenn folgendes gilt:

(ST1) G operiert transitiv auf $cham(\Delta)$

(ST2) G operiert transitiv auf $\mathcal{A}$

(ST3) Ist $\Sigma \in \mathcal{A}$, so operiert $N_G(\Sigma) = \{g \in G \mid g(\Sigma) = \Sigma\}$ transitiv auf $Cham(\Sigma)$.

Bemerkung:

ST1 ist redundant,

denn: seien $C_1, C_2 \in \mathrm{cham}(\Delta)$ bel.

Dann ex. nach §3 $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $C_1, C_2 \in \Sigma$.

Da nach ST3 $N_G(\Sigma)$ transitiv auf $\mathrm{cham}(\Sigma)$ operiert,

ex. $g \in N_G(\Sigma)$ mit $g(C_1) = C_2$.

Bemerkung:

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $\Sigma(W,I)$ der dazug. Coxeterkomplex. Die Wirkung

$$\psi: W \to \mathrm{Aut}(\Delta = \Sigma(W,I), \mathcal{A} = \{\Sigma(W,I)\})$$

$$g \longmapsto [wW_J \mapsto gwW_J]$$

ist stark transitiv.

Denn: ST1 gilt nach §3.50

ST2 gilt, da $\mathcal{A} = \{\Sigma(W,I)\}$

ST3 gilt, da $N_W(\Sigma(W,I)) = W$ und

W wirkt transitiv auf $\mathrm{cham}(\Sigma(W,I))$

(nach §3.50)

Vorschau:

5. Theorem

(i) Sei G eine Gruppe mit Tits-System (G, B, N, S).
Sei weiter (W, S') das zug. Coxetersystem.
Dann existiert ein dickes Gebäude $\Delta(G, B, N, S)$ vom Typ (W, S') auf dem G stark transitiv operiert.

Sei weiter $c_0 \in \Delta$ eine Kammer und $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$ mit $c_0 \in \Sigma_0$.

Dann gilt:
$$B = \{g \in G \mid g(c_0) = c_0\}$$
$$N = \{g \in G \mid g(\Sigma_0) = \Sigma_0\}$$

(ii) Sei Δ ein dickes Gebäude vom Typ (W, S).
Sei weiter G eine Gruppe und $\Psi : G \to \mathrm{Aut}(\Delta, \mathcal{A})$ eine stark transitive Wirkung.
Sei weiter $c_0 \in \Delta$ eine Kammer und $\Sigma_0 \in \mathcal{A}$ mit $c_0 \in \Sigma_0$.

Sei nun
$$B := \{g \in G \mid \Psi(g)(c_0) = c_0\} \text{ und}$$
$$N := \{g \in G \mid \Psi(g)(\Sigma_0) = \Sigma_0\}.$$

Dann ist $N/_{B \cap N} \overset{f}{\cong} W$. Sei nun $f^{-1}(S) = \{n_1 B \cap N, \ldots, n_{\# S} B \cap N\}$.

Wir setzen $S = \{n_1, \ldots, n_{\# S}\}$.

Dann ist (G, B, N, S) ein Tits-System für G und Δ ist kanonisch isomorph zu $\Delta(G, B, N, S)$

zu (i) Konstruktion:

- Sei $R \subseteq S$ und $W_R := \langle rT \mid r \in R \rangle \subseteq W$

$$P_R := \bigcup \{ BwB \mid w \in W_R \}$$

Dann ist (W_R, R') ein Coxetersystem und $P_R \subseteq G$ ist eine Untergruppe (To Do)

- Wir definieren

$$\Delta(G, B, N, S) = \bigcup \{ G/P_R \mid R \subseteq S \}$$

mit part. Ordnung:

$$gP_R \leq g'P_{R'} :\Longleftrightarrow gP_R \underset{\substack{\uparrow \\ \text{als Teilmenge}}}{\supseteq} g'P_{R'}$$

Weiter definieren wir $t : \Delta(G, B, N, S) \to \mathcal{P}(S)$

$$gP_R \longmapsto S - R.$$

To Do: $(\Delta(G, B, N, S), \leq)$ ist ein Simplizialkomplex über I.

- Sei $\Sigma(W, S)$ der zum Coxetersystem (W, S) geh. Coxeterkomplex. Wir definieren

$$\varphi : \Sigma(W, S) \longrightarrow \Delta(G, B, N, S) \text{ durch}$$

$$wW_R \longmapsto wP_R$$

To Do: φ ist ein injektiver reg. simpl. Homomorphismus über I

- Sei $\Sigma_0 = \varphi(\Sigma(W,S))$ und

$$\mathcal{A} := \{ g(\Sigma_0) \mid g \in \mathcal{G} \}$$

Linksmultiplikation

To Do: $\Delta(\mathcal{G}, B, N, S)$ ist ein dickes Gebäude vom Typ (W,S) mit Appartementsystem $\mathcal{A}$.

- Die Wirkung

$$\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}(\Delta(\mathcal{G}, B, N, S), \mathcal{A})$$

$$g \longmapsto [g' P_R \longmapsto g g' P_R]$$ ist stark transitiv.