Ausblick: Moufang-m-Ecke

Sei $m \geq 3$ und $\Gamma = (V, E)$ ein dickes verallgemeinertes m-Eck. Mit $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ bezeichnen wir alle bijektiven Graphenhomomorphismen.

41. Definition

Ein <u>Moufang-m-Eck</u> ist ein dickes verallgemeinertes m-Eck mit folgender Eigenschaft:

(M) Für jeden Weg $\alpha = (v_0, \dots, v_m)$ mit $d(v_0, v_m) = m$ wirkt die Gruppe

$$\mathcal{U}_\alpha := \{ f \in \mathrm{Aut}(\Gamma) \mid f(v) = v \text{ für alle } v \in \Gamma_{v_1} \cup \dots \cup \Gamma_{v_{m-1}} \}$$

transitiv auf der Menge der Kreise der Länge $2m$ in Γ die α enthalten.

42. Satz von Tits + Weiss ('76/'79)

Moufang m-Ecke existieren nur für $m = 3, 4, 6, 8$.

– ohne Beweis –

43. Zur Klassifikation von Moufang m-Ecken

(sind alle klassifiziert)

$$\Gamma \overset{1:1}{\rightsquigarrow} \underbrace{(\mathcal{U}_{[1,m]}, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m)}_{\text{algebraische Daten}} \quad \text{Gruppen}$$

<u>z.B.:</u> $m = 3$: Moufang 3-Ecke sind durch alternative Divisionsringe klassifiziert. $(\mathcal{U}_{[1,3]}, \underset{(A,+)}{\mathcal{U}_1}, \underset{(A,+)}{\mathcal{U}_2}, \underset{(A,+)}{\mathcal{U}_3})$

– mehr dazu in Moufang Polygons von Tits + Weiss

Zurück zu Gebäuden vom Rang ≥ 3

44. Theorem (Tits' 77)

(i) Es gibt kein dickes Gebäude vom Typ H_3 $(\bullet\!-\!\!\!-\bullet\overset{5}{-\!\!\!-}\bullet)$ oder H_4 $(\bullet\!-\!\!\!-\bullet\!-\!\!\!-\bullet\overset{5}{-\!\!\!-}\bullet)$

(ii) Gebäude vom Typ A_n ($B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4$) sind durch algebraische Daten klassifiziert

– mehr dazu in: The structure of spherical Buildings von Weiss –

<u>Beweisidee zu (i):</u>

A: es existiert ein d. Gebäude (Δ, δ) vom Typ H_3 $(\bullet\!-\!\!\!-\underset{i}{\bullet}\overset{5}{-\!\!\!-}\underset{j}{\bullet})$

- Man betrachtet das Untergebäude (Δ', δ') mit

$$x, y \in \Delta' \iff \delta(x,y) \in W_{\{i,j\}} \cong D_5$$

und

$$\delta' = \delta|_{\Delta' \times \Delta'} : \Delta' \times \Delta' \to D_5$$

- Man zeigt dann, dass Δ' Moufangsch ist ↯ zu Satz 42.

#

Erinnerung:

Was ist ein Gebäude?

'50-'60

Simplizialkomplex bestehend aus Appartements $\bigcup_{j \in J} \Sigma_j$

+ weitere Eigenschaften

mehr dazu

'80

Kammernsystem über I mit einer W-wertigen Abstandsfunktion + weitere Eigenschaften

Erinnerung:

Sei X eine Menge und $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von endlichen Teilmengen von X. Wir nennen $(\Delta, \subseteq)$ einen Simplizialkomplex, wenn gilt:

$$\text{aus } a \subseteq b \in \Delta \text{ folgt stets } a \in \Delta.$$

Die Elemente von Δ heißen Simplizes. Die Dimension eines Simplex $a \in \Delta$ ist k, falls $\# a = k+1$ gilt.

Allgemeiner nennen wir eine partiell geordnete Menge auch Simplizialkomplex, wenn sie zu so einem $(\Delta, \subseteq)$ ordnungsisomorph ist.

45. Definition:

Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X, so ist der Nerv von $\mathcal{U}$ der Simplizialkomplex

$$N(\mathcal{U}) = \{ \{U_1, \dots, U_k\} \mid U_i \in \mathcal{U},\ i = 1, \dots, k,\ k \in \mathbb{N},\ U_1 \cap \dots \cap U_k \neq \emptyset \}$$

46. Definition:

Sei (W, I) ein Coxetersystem. Sei $\mathcal{U}$ folgende Überdeckung von W:

$$\mathcal{U} = \{ w W_{I - \{i\}} \mid w \in W,\ i \in I \}$$

Der Coxeterkomplex $\Sigma = \Sigma(W, I)$ ist der Nerv $N(\mathcal{U})$.

Wir brauchen eine andere Beschreibung von Σ:

$$a = \{w_1 W_{I-\{i_1\}}, \dots, w_r W_{I-\{i_r\}}\} \quad \text{Simplex}$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, w \in W \text{ mit } w \in w_k W_{I-\{i_k\}} \text{ für } k = 1, \dots, r$$

$$\Leftrightarrow \quad \exists\, w \in W \text{ mit } w W_{I-\{i_k\}} = w_k W_{I-\{i_k\}}, \; k = 1, \dots, r$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \{ w W_{I-\{j\}} \mid j \in J = \{i_1, \dots, i_r\}\}$$

Auf $\bigcup\{W/W_J \mid J \subseteq I\}$ definieren wir wie folgt partielle Ordnung:

$$w W_J \leq w' W_{J'} :\Leftrightarrow \underbrace{w' W_{J'} \subseteq w W_J}_{\text{als Teilmengen}}$$

Weiter definieren wir wie folgt eine Abbildung:

$$f : (\Sigma(W, I), \subseteq) \longrightarrow (\bigcup\{W/W_J \mid J \subseteq I\}, \leq)$$

$$\{w W_{I-\{j\}} \mid j \in J\} \longmapsto w W_{I-J}$$

f ist ein Ordnungsisomorphismus. $\boxed{\text{ÜA}}$

Bemerkung:

Simplizes der Dimension $\# I - 1$: $\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in I\} \longmapsto wW_\emptyset$
$$= w \cdot \{1\} = \{w\}$$

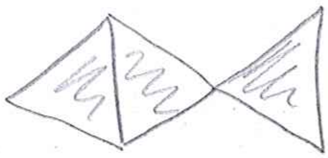
entsprechen Gruppenelementen aus W.

Simplizes der Dimension $\# I - 2$: $\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in I - \{i\}\} \longmapsto wW_{\{i\}}$
$$= \{w, wi\}$$
entsprechen den Nebenklassen $\{w, wi\}$.

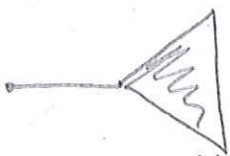
Der Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$ hat einige Eigenschaften die wir jetzt betrachten.

47. Definition

Sei Δ ein Simplizialkomplex. Wir nennen Δ <u>rein</u>, wenn alle maximalen Simplizes die gleiche Dimension haben.



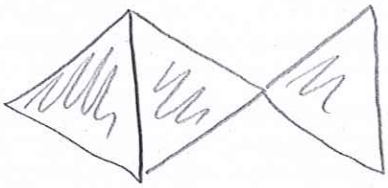
rein



nicht rein

Dann heißen die maximalen Simplizes <u>Kammern</u>.
Der <u>Kammergraph</u> eines reinen Simplizialkomplex ist folgender Graph: Die Ecken sind die Kammern, zwei Kammern a, b bilden eine Kante, wenn gilt:
$$\dim(a \cap b) = \dim(a) - 1$$

Δ



Kammergraph

Wenn der Kammergraph zusammenhängend ist, so heißt Δ Kammer~~graph~~komplex. Wege in Kammergraphen heißen Galerien.

48. Lemma

Jeder Coxeterkomplex $\Sigma(W, I)$ ist ein Kammerkomplex.

Beweis:

Die Simplizes entsprechen genau den Nebenklassen wW_K, die maximalen Simplizes entsprechen genau den Gruppenelementen in W. Folglich ist Σ rein.

Die Simplizes der Kodimension 1 entsprechen den Nebenklassen $wW_{\{i\}} = \{w, wi\}$.

Damit ist der Kammergraph von Σ genau der Cayleygraph von (W, I).

Da I W erzeugt, ist Σ ein Kammerkomplex. $\square$

49. Definition

Seien Δ_1, Δ_2 Simplizialkomplexe. Eine Abbildung

$$\varphi: \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2 \text{ heißt}$$

regulär simpliziale Abbildung, wenn

φ ordnungserhaltend ist (d.h. $a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$)

und dimensionserhaltend ($\dim a = \dim \varphi(a)$) ist).

50. **Beispiele:**

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $\Sigma = \Sigma(W,I) \cong \bigcup\{W/W_K \mid K \subseteq I\}$ Coxeterkomplex.

(i) Wir definieren eine Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi: W &\to \mathrm{Sym}(\Sigma(W,I)) \\ g &\longmapsto [\, wW_K \mapsto gwW_K \,]. \end{aligned}$$

Dann ist $\Psi(g)$ ein regulärer simplizialer Automorphismus von Σ.

• Sei $w \in W$ eine Kammer. Dann ist $\mathrm{Stab}(w) = \{g \in W \mid \Psi(g)(w) = w\}$
$= \{g \in W \mid gw = w\}$
$= \{1\}$.

• Ψ operiert transitiv auf den Kammern.

<u>Denn:</u> Seien w und w' zwei bel. Kammern.

Dann gilt: $\Psi(w'w^{-1})(w) = w'w^{-1}w = w'$.

(ii) Die Typfunktion

$$\begin{aligned} t: \Sigma &\to (\mathcal{P}(I), \subseteq) \\ wW_K &\mapsto I-K \end{aligned}$$

ist wohldefiniert (ÜA) und t ist ein regulärer simplizialer Automorphismus.

<u>Kurze Wiederholung</u>

- Gebäude als Simplizialkomplexe : $\Delta = \bigcup_{j \in J} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{Coxeterkomplex}\\ \Sigma(W,I)}}{\Sigma_j}$

- Dünne Gebäude $\hat{=}$ Coxeterkomplexe

- Sei (W,I) ein Coxetersystem. Der <u>Coxeterkomplex $\Sigma = \Sigma(W,I)$</u> ist wie folgt definiert:

$$\Sigma = \Sigma(W,I) = \{ a = \{ wW_{I-\{j\}} \mid j \in J \} \mid J \subseteq I \}.$$

  - Σ ist bzgl. „$\subseteq$" (Teilmenge) ein $|I|-1$ dim. Simplizialkomplex

- Um mit Coxeterkomplexen besser arbeiten zu können, brauchen wir eine andere Beschreibung von Σ.

$$\Big(\Sigma(W,I), \underset{\substack{\uparrow\\ \text{als Teilmenge}}}{\subseteq}\Big) \xrightarrow{\ f\ } \Big(\bigcup \{ W/W_J \mid J \subseteq I \}, \ \leq\ \Big)$$

$wW_J \leq w'W_{J'}$

$:\Longleftrightarrow w'W_{J'} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{als Teilmengen}}}{\subseteq} wW_J$

$$\{ wW_{I-\{j\}} \mid j \in J \} \longmapsto wW_{I-J}$$

- f ist eine ordnungserhaltender ~~...~~ Bijektion

max. Simplizes $\{ wW_{I-\{j\}} \mid j \in I \} \longmapsto wW_{\emptyset} = w \cdot \{1\} = \{w\}$
$\parallel$
Kammern

- Eigenschaften von $\Sigma(W,I)$: $\Sigma(W,I)$ ist ein Kammernkomplex der Dimension $\# I - 1$

Geometrischen Veranschaulichungen von (W,I)

(i) Die kanonische (geometrische) Darstellung

$$\Phi : W \hookrightarrow GL(\mathbb{R}^{\# I})$$

(ii) $\Psi : W \hookrightarrow Aut(\Sigma(W,I))$ ← die Gruppe der reg. simpl. Automorphismen

$$g \longmapsto [\Psi(g) : wW_K \mapsto gwW_K]$$

- Ψ operiert transitiv auf den Kammern
- $Stab(w) = \{ g \in W \mid \Psi(g)(w) = w \} = \{1\}$
- $Stab(wW_J) = wW_Jw^{-1}$

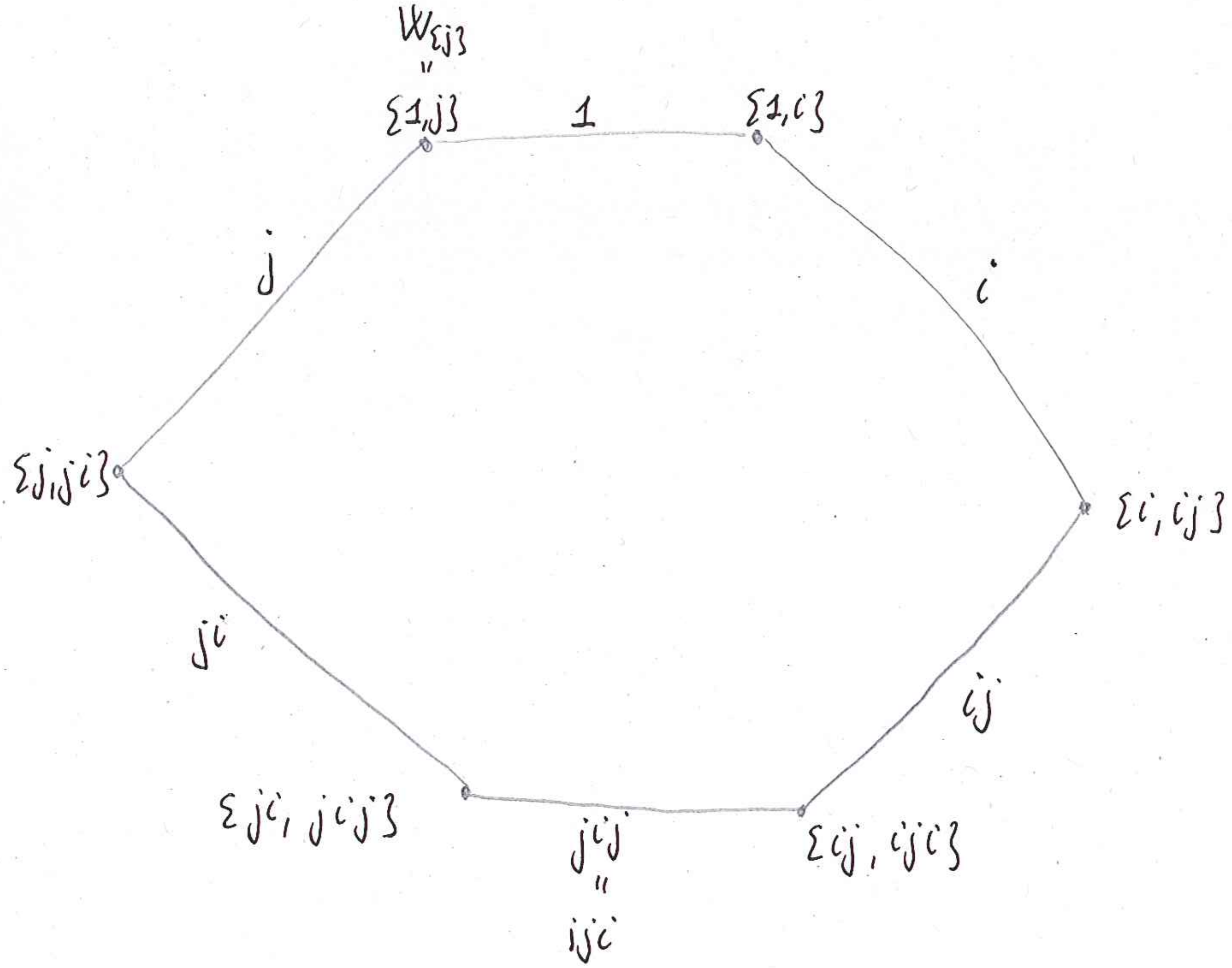
<u>Also:</u> $\# Stab(wW_J) = \infty \iff \# W_J = \infty$.

51. Beispiele

(i) $(W, I) = (D_3, \{i, j\})$

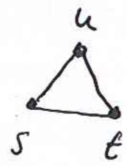
$D_3 = \{1, i, j, ij, ji, iji = jij\}$

$\Sigma(W, I)$ ist ein 1-dim. Simplizialkomplex.

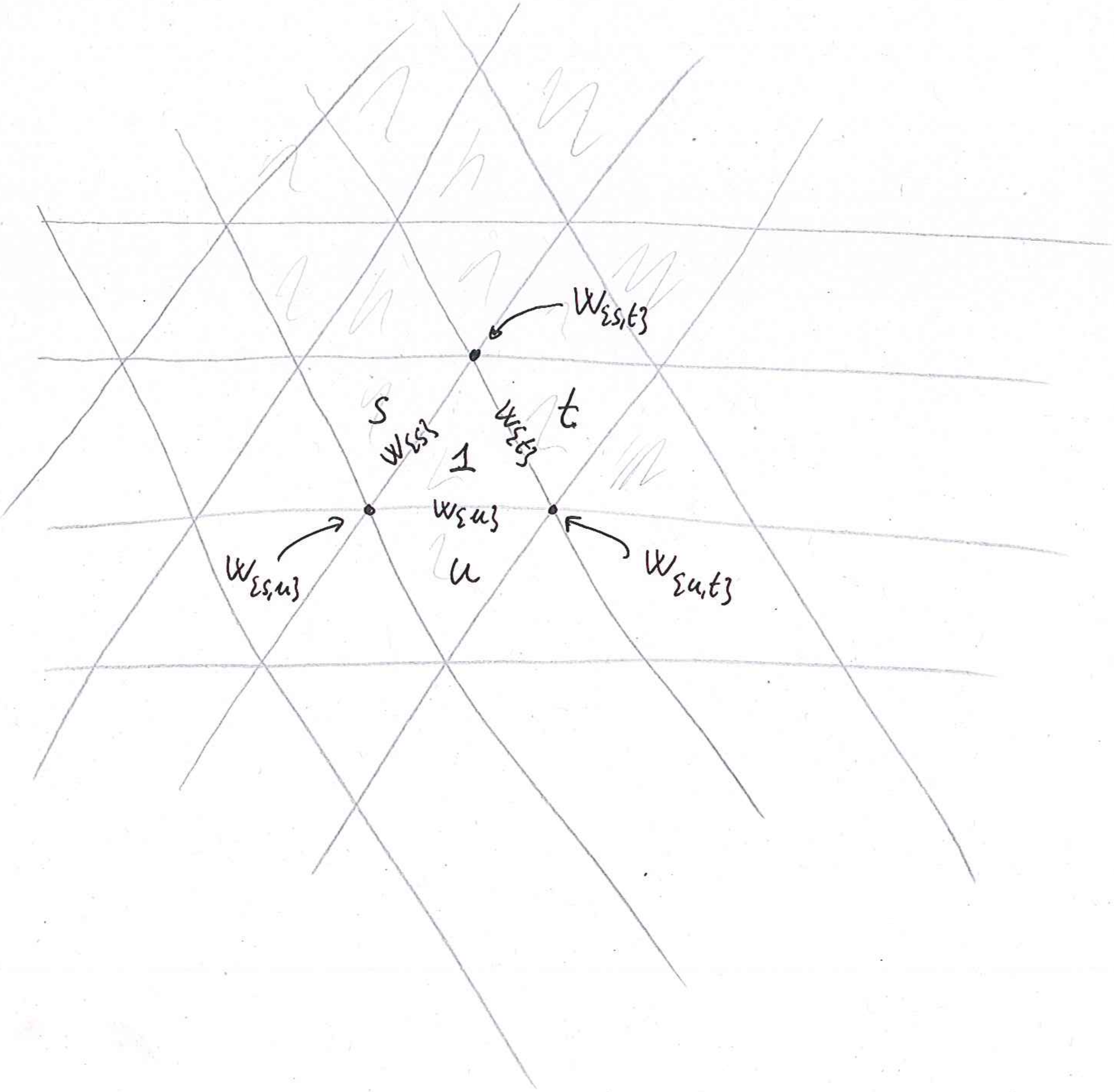


(ii) $W = \langle \overbrace{s,t,u}^{I} \mid s^2, t^2, u^2, (st)^3, (tu)^3, (su)^3 \rangle$

• W ist also die affine Coxetergruppe vom Typ $\tilde{A}_2$



$\Sigma(W,I)$ ist ein 2-dim. Simplizialkomplex



Wir interessieren uns jetzt für die lokale Struktur von $\Sigma(W,I)$.

Erinnerung: Eine Teilmenge $\Delta' \subseteq \Delta$ eines Simplizialkomplexes ist ein Unterkomplex, wenn

$$\text{aus } b \subseteq a \in \Delta' \text{ folgt } b \in \Delta'.$$

52. Beispiele

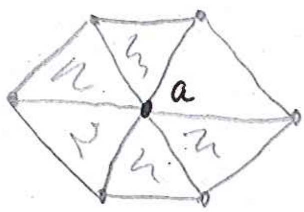
(i) Sei Δ ein Simplizialkomplex und $a \in \Delta$.

Der <u>Link von a</u>, $lk(a) = lk_\Delta(a)$ ist der folgende Unterkomplex von Δ:

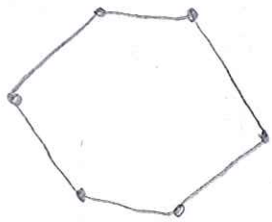
$$lk(a) := \{ b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset,\ a \cup b \in \Delta \}$$

<u>z.B.:</u>

Δ



$lk(a)$



(ii) Die Menge $\Delta_{\geq a} := \{ x \in \Delta \mid a \subseteq x \}$ ist i.A. <u>kein</u> Unterkomplex von Δ.

<u>z.B.:</u>

$\Delta = \{ \emptyset, \{v\}, \{w\}, \{v,w\} \}$

$a = \{v,w\}$

$\Delta_{\geq a} = \{ \{v,w\} \}$ ist nicht bezüglich Abstieg abgeschlossen

Wir können aber der partiell geordneten Menge $(\Delta_{\geq a}, \leq)$ eine Struktur eines Simplizialkomplexes geben. Dazu müssen wir einen Ordnungsisomorphismus (ordnungserhaltende Bijektion) zwischen eines Simplizialkomplexes und $(\Delta_{\geq a}, \leq)$ konstruieren.

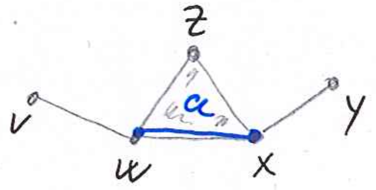
53. Bemerkung

Wir definieren eine Abbildung

$$f: (lk(a), \subseteq) \longrightarrow (\Delta_{\geq a}, \subseteq)$$
$$b \longmapsto a \cup b$$

f ist ein Ordnungsisomorphismus, also ist $(\Delta_{\geq a}, \subseteq)$ ein Simplizialkomplex (da zu $(lk(a), \subseteq)$ ordnungsisomorph)

Beispiel:



$$\Delta = \{\emptyset, \{v\}, \{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\}$$
$$\{v,w\}, \{w,x\}, \{x,y\}\}$$
$$\{z,w\}, \{z,x\}, \{z,w,x\}$$

$a = \{x, w\}$

$lk(a) = \{\emptyset, \{z\}\}$

$\Delta_{\geq a} = \{\{x,w\}, \{z,w,x\}\}$

$$f: (lk(a), \subseteq) \longrightarrow (\Delta_{\geq a}, \subseteq)$$
$$\emptyset \longmapsto \emptyset \cup a = a = \{x,w\}$$
$$\{z\} \longmapsto \{z\} \cup \{x,w\} = \{z,x,w\}$$

d.h.: $\dim(\{z,w,x\}) \overset{\text{via } f}{=} \dim(\{z\}) = 0.$

54. Satz

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $\Sigma = \Sigma(W,I)$ der dazugeh. Coxeterkomplex. Für $J \subsetneq I$ und $w \in W$ gilt:

$$lk(wW_J) \cong \Sigma(W_J, J)$$

Insbesondere ist der Link von $a \in \Sigma$ ein Kammernkomplex.

<u>Beweis:</u>

<u>Vorüberlegung:</u>

$$uW_K \subseteq W_J \overset{\S 2.72}{\iff} K \subseteq J \text{ und } u \in W_J$$

<u>Also:</u>

$$lk(wW_J) \overset{\text{Bem. 53}}{\cong} \Sigma_{\geq wW_J} \cong \Sigma_{\geq W_J} \overset{\text{Def.}}{=} \{uW_K \mid W_J \leq uW_K\}$$

$$= \{uW_K \mid uW_K \underset{\substack{\uparrow \\ \text{als Teilmengen}}}{\subseteq} W_J\} \overset{\text{Vorüberl.}}{=} \{uW_K \mid u \in W_J, K \subseteq J\}$$

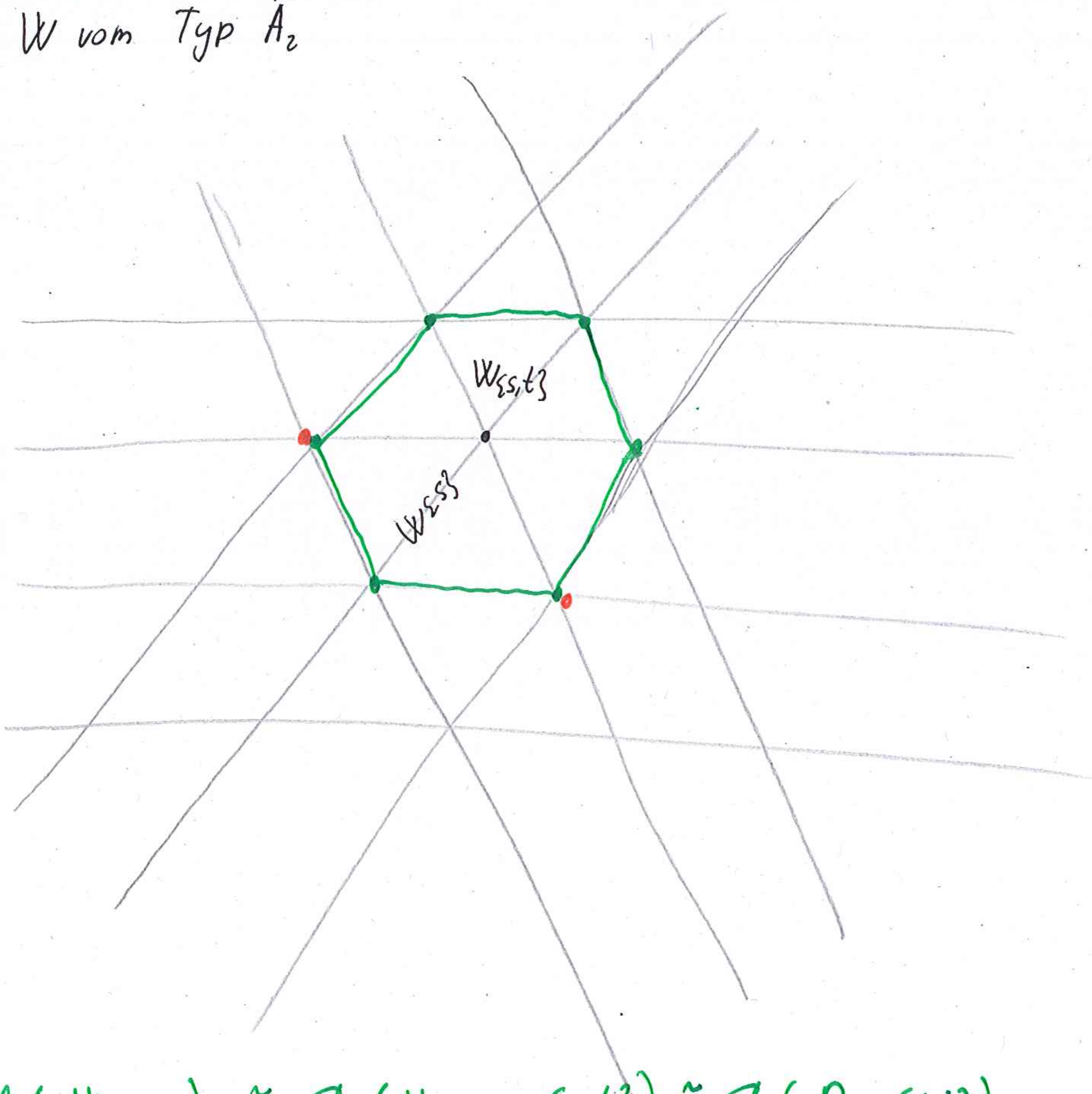
$$= \bigcup \{W_J / W_K \mid K \subseteq J\}$$

$$\cong \Sigma(W_J, J)$$

$\square$

Beispiel:

W vom Typ $\tilde{A}_2$



$$lk(W_{\{s,t\}}) \cong \Sigma(W_{\{s,t\}}, \{s,t\}) \cong \Sigma(D_3, \{i,j\})$$

$$lk(W_{\{s\}}) \cong \Sigma(W_{\{s\}}, \{s\}) \cong \Sigma(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{i\})$$

Sei (W, I) ein Coxetersystem. Weiter gelte:

$$W \cong W_K \times W_J \quad \text{mit} \quad I = K \dot{\cup} J$$

Was wissen wir dann über:

$$\Sigma(W, I), \quad \Sigma(W, K), \quad \Sigma(W, J) \ ?$$

55. Konstruktion

Sind $(P, \leq_p)$ und $(Q, \leq_q)$ partiell geordnete Mengen, so ist der <u>Join $P * Q$</u> die Menge $P \times Q$ mit der partiellen Ordnung

$$(x, y) \leq_{P*Q} (u, v) :\Longleftrightarrow x \leq_p u \text{ und } y \leq_q v$$

56. Lemma

Seien X, Y Simplizialkomplexe.

(i) Dann ist $X * Y$ ein Simplizialkomplex.

(ii) Wenn X, Y Kammernkomplexe sind, dann ist auch $X * Y$ ein Kammernkomplex und

$$\mathrm{Cham}(X * Y) = \mathrm{Cham}(X) \times \mathrm{Cham}(Y)$$

Kammern

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{üA}}$

57. Satz

Sei (W,I) ein Coxetersystem. Weiter gelte für $K \dot\cup J = I$

$$W \cong W_J \times W_K$$

Dann gilt: $\Sigma(W,I) \cong \Sigma(W_J, J) * \Sigma(W_K, K)$

Beweis:

Vorüberlegung:

Ist $w \in W$, so können wir w wie folgt zerlegen:

$$w = u \cdot v \text{ mit } u \in W_J \text{ und } v \in W_K.$$

Wir definieren wie folgt eine Abbildung:

$$f : \Sigma(W,I) \to \Sigma(W_J, J) * \Sigma(W_K, K)$$
$$wW_L \longmapsto (uW_{L\cap J}, vW_{L \cap K})$$

Man zeige: f ist ein wohldefinierter Ordnungsisomorphismus. $\square$

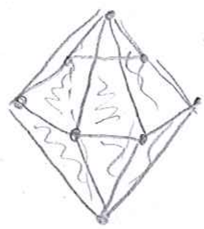
58. Beispiel

$(W, I = \{i,j,k\}) = (D_3 \times \mathbb{Z}/2, \{i,j,k\})$

$\Sigma(D_3, \{i,j\})$ 

$\Sigma(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{k\})$ 

$\Sigma(D_3 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{i,j,k\})$



59. Definition

Sei I eine endliche Menge. Wir fassen die Potenzmenge $\mathcal{P}(I)$ als $\# I-1$ dim. Simplizialkomplex auf.

(i) Ein <u>Simplizialkomplex über I</u> ist ein Simplizialkomplex Δ mit einer regulären simplizialen Abbildung

$$t: \Delta \to \mathcal{P}(I)$$

↑
"Farben"

(jeder Ecke v wird eine "Farbe" $t(v)$ gegeben, so dass in jedem Simplex jede Farbe höchstens einmal auftritt.)

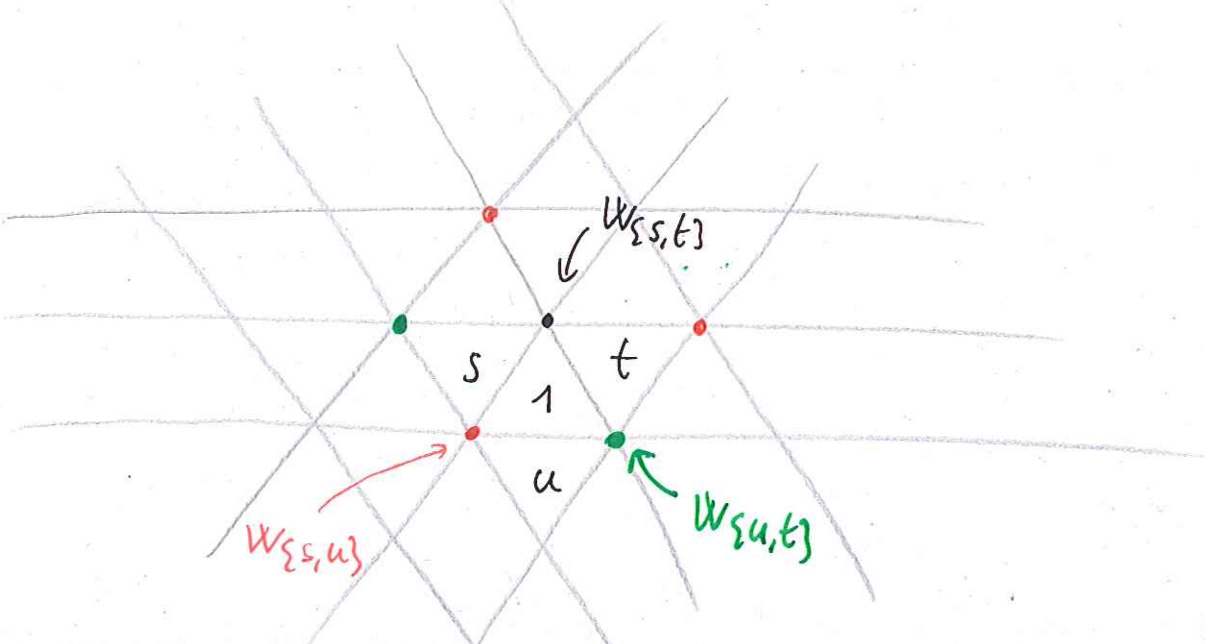
Beispiel:

Sei (W, I) ein Coxetersystem und Σ der dazug. Coxeterkomplex. Weiter sei $t: \Sigma \to \mathcal{P}(I)$ die Typfunktion.

$$wW_K \longmapsto I-K$$

Dann ist $\Sigma(W, I)$ ein Simplizialkomplex über I.

<u>z.B.:</u> $W = \langle s, t, u \mid s^2, t^2, u^2, (st)^3, (tu)^3, (su)^3 \rangle$



(ii) Seien Δ_1 und Δ_2 Simplizialkomplexe über I mit $t_i : \Delta_i \to \mathcal{P}(I)$.

Ein <u>Homomorphismus über I</u> ist eine simpl. Abb.

$$\varphi : \Delta_1 \to \Delta_2 \text{ , so dass}$$

das Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\Delta_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "t_1"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \Delta_2 \arrow[dl, "t_2"] \\
 & \mathcal{P}(I) &
\end{tikzcd}$$
kommutiert.

Beispiel:
Sei (W, I) ein Coxetersystem, Σ der dazug. Coxeterkomplex und $t : \Sigma \to \Sigma(W, I)$ die Typfunktion.

Sei weiter
$$\begin{aligned} \psi : W &\to \mathrm{Aut}(\Sigma) \\ g &\longmapsto [\psi(g) : wW_K \mapsto gwW_K]. \end{aligned}$$

Jedes $g \in W$ liefert einen Automorphismus $\psi(g)$ über I.

Denn:
$$\begin{tikzcd}
wW_K \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd, bend right=40, mapsto] & & gwW_K \arrow[dd, bend left=40, mapsto] \\
\Sigma \arrow[rr, "\psi(g)"] \arrow[dr, "t"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \Sigma \arrow[dl, "t"] \\
I-K & \mathcal{P}(I) & I-K
\end{tikzcd}$$

61. Definition (Gebäude vom Typ (W,I)) (2. Definition)

Sei (W,I) ein Coxetersystem. Ein <u>Gebäude vom Typ (W,I)</u> besteht aus einem Simplizialkomplex Δ über $\underline{I}$ und einer Menge $\mathcal{A}$ von Unterkomplexen von Δ mit folgenden Eigenschaften:

(G1) Für jedes $\Sigma \in \mathcal{A}$ gibt es einen Isomorphismus

$$\varphi : \Sigma(W,I) \xrightarrow{\sim} \Sigma \subseteq \Delta \quad \text{über } I.$$

(G2) Sind $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{A}$ und $a, b \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, so gibt es einen Isomorphismus

$$\psi : \Sigma_1 \cong \Sigma_2 \text{ über } I \text{, der } a, b \text{ festläßt.}$$

(G3) Ist $a, b \in \Delta$, so gibt es $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen <u>Appartements</u> und $\mathcal{A}$ heißt <u>Appartementsystem</u>.

Bemerkung:

Gebäude sind Kammernkomplexe (wegen (G3)) der Dimension $\#I - 1$.

Beispiel:

Sei (W, I) ein Coxetersystem und Σ der dazug. Coxeterkomplex.

$\Delta = \Sigma$ ist ein Simplizialkomplex über I, $\mathcal{A} = \{\Sigma\}$.

(G1) ✓, (G2) ✓, (G3) ✓

$\rightsquigarrow$ Coxeterkomplexe sind Gebäude.

Bemerkung:

Im Coxeterkomplex Σ gilt:

jeder Simplex der Kodimension 1 $(\{w, wi\})$ ist in <u>genau zwei</u> Kammern $\{w\}$, $\{wi\}$ enthalten.

Deswegen gilt in Gebäuden: jeder Kodimension 1-Simplex ist in <u>mindestens</u> 2 Kammern enthalten.

62. Definition

(i) Ein Gebäude heißt <u>dick</u>, wenn jeder Kodim-1-Simplex in <u>mindestens drei</u> Kammern liegt.

(ii) Ein Gebäude heißt <u>dünn</u>, wenn jeder Kodim.-1-Simplex in <u>genau zwei</u> Kammern liegt.

63. Satz

Die dünnen Gebäude sind genau die Coxeterkomplexe.

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{ÜA}}$.

6.4. Beispiele

(i) Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 2 Elementen, Appartements sind 2-elem. Teilmengen.

(ii) $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ ist ein Gebäude vom Typ $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$, Appartements sind Kreise der Länge 6.

Lokale Eigenschaften von Gebäuden

65. Definition + Satz

Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W,I) mit Appartementsystem $\mathcal{A}$. Sei $b \in \Delta$ ein Simplex vom Typ $t(b) = J \subsetneq I$ und sei

$$\mathcal{A}_b = \{ \Sigma \cap lk(b) \mid \Sigma \in \mathcal{A}, b \in \Sigma \}$$

Satz:

$lk(b)$ ist ein Gebäude vom Typ $(W_{I-J}, I-J)$ und Appartementsystem $\mathcal{A}_b$.

Beweis:

Wir benutzen den Isomorphismus

$$\begin{aligned} lk(b) &\cong \Delta_{\geq b} \\ a &\longmapsto a \cup b \end{aligned}$$

zu (S1): Sei $\Sigma' \in \mathcal{A}_b$ bel. Dann ex. $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $b \in \Sigma$ mit $\Sigma' = \Sigma \cap lk(b)$.

Weiter gilt:

$$\Sigma' = \Sigma \cap lk(b) \cong \underset{\substack{\parallel \\ wW_{I-J}}}{\Sigma_{\geq b}} \overset{\text{Satz 54}}{\cong} \Sigma(W_{I-J}, I-J),$$ also gilt (S1).

Bem: Der konstruierte Isomorphismus $\Sigma' \cong \Sigma(W_{I-J}, I-J)$ ist ein Isomorphismus über I.

zu (δ2):

Ist $a, c \in \mathrm{lk}(b)$, so betrachten wir $a \cup b$ und $c \cup b$.

Ist $a \cup b,\ c \cup b \in \Sigma_1, \Sigma_2$, so gibt es Iso über I

$$\varphi : \Sigma_1 \to \Sigma_2 ,$$ der $a \cup b$ und $c \cup b$ festläßt,

damit gilt (δ2) auch in $\mathrm{lk}(b)$.

Wegen (δ3) in Δ gibt es auch $\Sigma_1 \in \mathcal{A}$ mit $a \cup b, c \cup b \in \Sigma_1$,

also gilt (δ3) in $\mathrm{lk}(b)$ □

66. Zerlegungen

Seien Δ_i für $i = 1,2$ Gebäude vom Typ (W_i, I_i), $i = 1,2$ mit Appartementsystemen $\mathcal{A}_i$.

Dann ist auch $\Delta_1 * \Delta_2$ ein Gebäude vom Typ $(W_1 \times W_2,\ I_1 \dot\cup I_2)$ mit Appartementsystem $\{\Sigma_1 * \Sigma_2 \mid \Sigma_i \in \mathcal{A}_i\}$.

$\boxed{\text{ÜA}}$

67. Satz

Ist das Coxetersystem (W, I) reduzibel mit $I = J \dot\cup K$, $W \cong W_J \times W_K$ und ist Δ ein Gebäude vom Typ (W, I), so ist Δ ein Join von Gebäuden vom Typ (W_J, J) und (W_K, K).

Beweis:

Vorüberlegung:

Sind $a, b \in \Delta$ mit $t(a) = J$ und $t(b) = K$. Dann gilt $c = a \cup b \in \Delta$.

Denn: Wähle ein Appartement $\Sigma \in \mathcal{A}$ mit $a, b \in \Sigma$.

Zeige dann: $a \cup b \in \Sigma \cong \Sigma(W, I) = \Sigma(W_J, J) * \Sigma(W_K, K)$

Weiter im Beweis:

Seien $a_0, b_0 \in \Delta$ mit $t(a_0) = J$ und $t(b_0) = K$.

Dann ist $c_0 = a_0 \cup b_0 \in \Delta$ eine Kammer, da $t(c_0) = I$.

Beh: $\Delta = \mathrm{Ch}(a_0) * \mathrm{Ch}(b_0) = \{ x \cup y \mid x \in \mathrm{Ch}(a_0), y \in \mathrm{Ch}(b_0) \}$

„$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" Sei $d \in \Delta$ bel. Da Δ ein Kammernkomplex ist, ex. eine Kammer c mit $d \leq c$.

Wir zeigen, dass gilt: $c \in \mathrm{Ch}(a_0) * \mathrm{Ch}(b_0)$

Ist nämlich $c \in \Delta$ eine Kammer, so gilt $t(c) = I$.

Wir zerlegen c wie folgt:

$c = a \cup b$ mit $t(a) = J$ und $t(b) = K$.

So gilt nach der Vorüberlegung: $a \cup b_0 \in \Delta$ und $a_0 \cup b \in \Delta$

Weiter gilt: $a \cap b_0 = \emptyset$, denn $t(a \cap b_0) = t(a) \cap t(b_0) = \emptyset$ und
$a_0 \cap b = \emptyset$, denn $t(a_0 \cap b) = t(a_0) \cap t(b) = \emptyset$

$\Rightarrow \quad a \in \mathrm{lk}(b_0)$ und $b \in \mathrm{lk}(a_0)$

$\Rightarrow c = a \cup b \in \mathrm{lk}(a_0) * \mathrm{lk}(b_0)$ $\square$

$\rightsquigarrow$ Bausteine für Gebäude sind irreduzible Gebäude
(d.h. (W, I) ist irreduzibel)

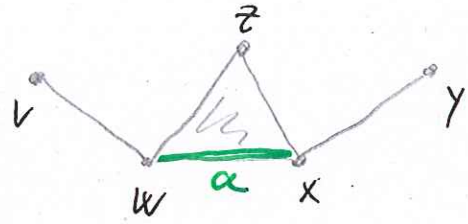
Kurze Wiederholung

Sei Δ ein Simplizialkomplex und $a \in \Delta$.

$lk(a) := \{ b \in \Delta \mid a \cap b = \emptyset, a \cup b \in \Delta \}$ ist ein Unterkomplex von Δ.

$\Delta_{\geq a} := \{ x \in \Delta \mid a \leq x \}$ ist i. A. <u>kein</u> Unterkomplex von Δ.

<u>z.B.:</u> $\Delta = \{ \emptyset, \{v\}, \{w\}, \{x\}, \{y\}, \{z\},$
$\{v,w\}, \{w,x\}, \{x,y\}, \{z,w\}, \{z,x\},$
$\{z,w,x\} \}$



$a = \{x, w\}$

$lk(a) = \{ \emptyset, \{z\} \}$

$\Delta_{\geq a} = \{ \{x,w\}, \{z,w,x\} \}$ ist kein Unterkomplex, da $\{x\} \notin \Delta_{\geq a}$.

Wir können aber der partiell geordneten Menge $(\Delta_{\geq a}, \leq)$ eine Struktur eines Simplizialkomplexes geben. Dazu müssen wir einen Ordnungsiso zwischen einem Simpl. und $(\Delta_{\geq a}, \leq)$ konstruieren.

$$f : (lk(a), \leq) \longrightarrow (\Delta_{\geq a}, \leq)$$
$$b \longmapsto a \cup b$$

im Beispiel:

$$\emptyset \longmapsto \emptyset \cup a = \{x, w\}$$
$$\{z\} \longmapsto \{z\} \cup a = \{z, w, x\}$$

d.h. $\dim(\{z,w,x\}) \overset{\text{via } f}{=} \dim(\{z\}) = 0$

Noch ein Beispiel:

$$(\Sigma(W,I), \subseteq) \xrightarrow{f} (\cup\{W/W_J \mid J \subseteq I\}, \leq)$$

$$\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in J\} \longmapsto wW_{I-J}$$

Via f wird $(\cup\{W/W_J \mid J \subseteq I\}, \leq)$ zu einem Simplizialkomplex.

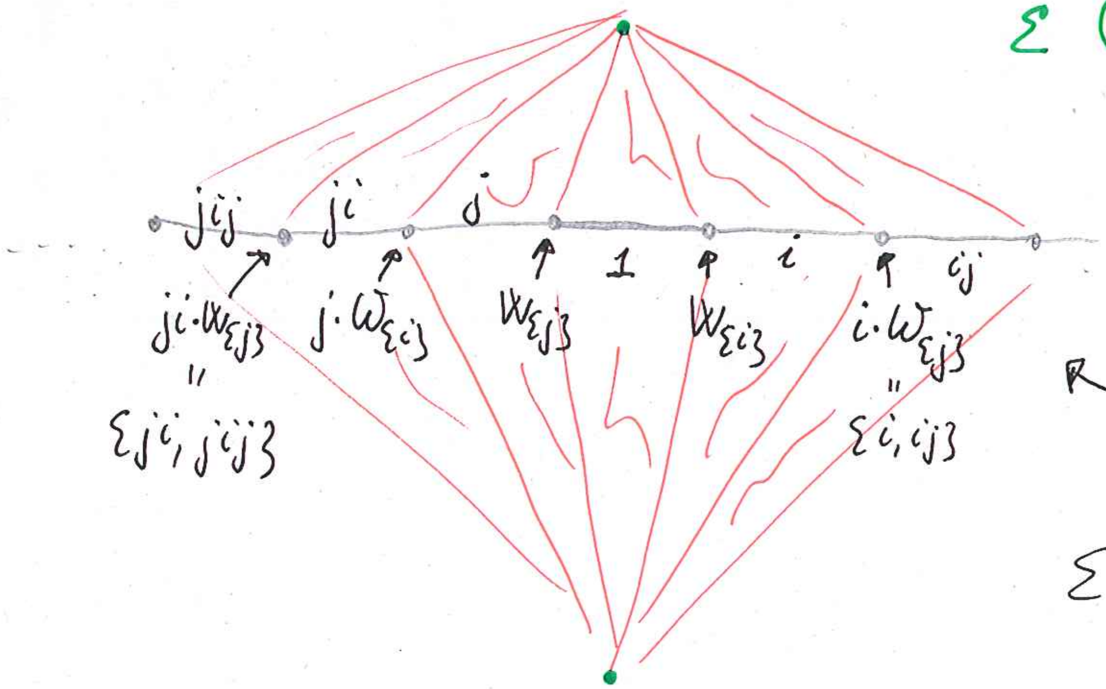
$$\dim(wW_{I-J}) \overset{\text{via } f}{=} \dim(\{wW_{I-\{j\}} \mid j \in J\})$$

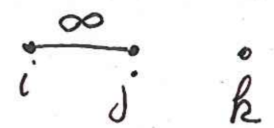
$$= \# J - 1$$

Weitere Beispiele für $\Sigma(W,I)$: $W = \langle i,j,k \mid i^2, j^2, k^2, (ik)^2, (jk)^2 \rangle$

(a) $D_\infty = \langle i,j \mid i^2, j^2 \rangle$

$\Sigma(D_\infty, \{i,j\})$





$\Sigma(W, \{i,j,k\})$

$\Sigma(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{k\})$

$\Sigma(W,I)$

"

$\Sigma(D_\infty, \{i,j\}) * \Sigma(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{k\})$

Gebäude als Kammernsystem $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Gebäude als Simplizialkomplex

Grobe Skizze:

„$\leftarrow$" Sei Δ ein Gebäude vom Typ (W, I) wie in Definition §3.61.
Mit Cham(Δ) bezeichnen wir die Menge der Kammern in Δ (maximale Simplizes).
Wir definieren eine Abbildung

$$\delta : \text{Cham}(\Delta) \times \text{Cham}(\Delta) \to W$$

wie folgt:
Seien $c, d \in \text{Cham}(\Delta)$. Dann ex. nach (§3) ein Appartement Σ mit $c, d \in \Sigma$. Nach (§1) gibt es einen Isomorphismus φ über I:

$$\begin{aligned} \varphi : \Sigma &\to \Sigma(W, I) \\ c &\longmapsto \varphi(c) \in W \quad (\text{da } c, d \text{ Kammern}) \\ d &\longmapsto \varphi(d) \in W \end{aligned}$$

Setze: $\delta(c, d) = \varphi(c)^{-1} \cdot \varphi(d) \in W$.
Man muss nun beweisen, dass δ wohldefiniert ist (nicht von der Wahl des Appartements Σ und φ abhängt).
Weiter muss man zeigen, dass $(\text{Cham}(\Delta), \delta)$ ein Gebäude vom Typ (W, I) wie in Definition §3.3 ist.

„$\rightsquigarrow$" Sei nun (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ (W, I) wie in Definition §3.3.

<u>Definition / Satz:</u>

Sei $J \subseteq I$.

(i) So ist $x \underset{J}{\sim} y :\Leftrightarrow \delta(x,y) \in W_J$ eine Äquivalenzrelation auf Δ.

Die Äquivalenzklassen $[\ ]_J$ heißen <u>J-Residuen</u>.

(ii) Wir definieren
$$\mathcal{B}(\Delta) = \mathcal{B} = \{ J\text{-Residuen} \mid J \subseteq I \}$$
Auf dieser Menge def. wir wie folgt eine partielle Ordnung:
$$[x]_J \leq [y]_K :\Leftrightarrow [x]_J \supseteq [y]_K$$
als Teilmenge

(iii) $(\mathcal{B}, \leq)$ ist ein Simplizialkomplex der Dimension $\# I - 1$
(d.h. ist ordnungsisomorph zu einem Simplizialkomplex der Dim. $\# I - 1$)

Weiter def. wir
$$t : \mathcal{B} \to \mathcal{P}(I)$$
$$[x]_J \longmapsto I - J$$

Damit ist $(\mathcal{B}, \leq)$ ein Simplizialkomplex über I der Dimension $\# I - 1$

Beispiel: $(W, \delta_W) = (D_3, \delta_{D_3})$, $\delta_{D_3}(x,y) = x^{-1}y$

$\emptyset$- Residuen: Elemente aus D_3

$\{i\}$- Residuen: $\{1, i\}$, $\{j, ji\}$, $\{ij, iji\}$

$\{j\}$- Residuen: $\{1, j\}$, $\{i, ij\}$, $\{ji, jij\}$

$\{i,j\}$ - Residuen: $\{1, i, j, ij, ji, iji\}$

$$\mathcal{B}(D_3) \xrightarrow{\cong} \Sigma(D_3, \{i,j\})$$

z.B

$$\{1, i\} \longmapsto D_{3\{i\}}$$

$$\{1, i, j, ij, ji, iji\} \longmapsto D_{3\{i,j\}} = D_3$$

$$\{i\} \longmapsto i \cdot D_{3\emptyset} = i \cdot \{1\} = \{i\}$$

Lemma: Sei (W, I) ein Coxetersystem. Dann gilt:

$$\mathcal{B}(W) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ordnungsisomorph über } I}}{\cong} \Sigma(W, I)$$

Wo sind die Appartements in (Δ, δ)? (bzw. in $(\mathcal{B}(\Delta), \leq)$)

(i) Ein Appartement von Δ ist ein isometrisches Bild $\alpha(W)$ von W in Δ, d.h. $\alpha: W \to \Delta$ eine Abb., so dass gilt

$$\delta(\alpha(x), \alpha(y)) = \delta_W(x,y) = x^{-1}y \quad \forall x, y \in W.$$

(ii) Ein Appartement von $\mathcal{B}(\Delta)$ ist dann:

$$\mathcal{B}(W) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{via } \alpha}}{\hookrightarrow} \mathcal{B}(\Delta).$$

Sei $\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha} \alpha(\mathcal{B}(W))$.

Z.z.: $(\mathcal{B}, \leq)$ ist ein Gebäude vom Typ (W, I) mit Appartmentsystem $\mathcal{A}$.

Für (B3) braucht man den Fortsetzungssatz von Tits.