§3 Gebäude

(Jacques Tits)

Anfänge in den '50 – '60 Jahre

Erinnerung:

Sei V ein $(n+1)$-dim. K-Vektorraum.

$PG(V) = \{ U \leq V \mid U \text{ Unterraum}, 0 \neq U \neq V \}$

$\Delta(V) = \{ \{ U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_k \} \mid U_i \in PG(V), k \in \mathbb{N} \}$

$\cup \{ \text{leere Fahne} \}$

$$\boxed{\Delta(V) = \bigcup_{\substack{B \text{ Basis} \\ \text{von } V}} \underbrace{\Sigma(B)}_{\text{Appartement}} \text{ ist ein } (n-1)\text{-dim. Simplizialkomplex}}$$

Wichtige Bausteine in $\Delta(V)$ sind Kammern (max. Simplizes)

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{cham}(\Delta(V)),\ \delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to \mathrm{Sym}(n+1) \\ \text{ist ein Kammernsystem über } \{(1\,2), \ldots, (n, n+1)\} \text{ mit} \\ \text{einer } \mathrm{Sym}(n+1)\text{-wertigen Abstandsfunktion.} \end{array}}$$

Was ist ein Gebäude?

'50 – '60 Jahre: Simplizialkomplex bestehend aus Appartements + weitere Eigenschaften

'80 (moderner Zugang): Kammernsystem über I mit einer W-wertigen Abstandsfunktion + weitere Eigenschaften

Erinnerung: Ein Kammernsystem über einer Indexmenge I ist eine Menge Δ mit Äquivalenzrelationen $\underset{i}{\sim}$ für $i \in I$. Die Elemente in Δ heißen Kammern.

Seien $c_0, c_m \in \Delta$. Eine Gallerie von c_0 nach c_m vom Typ $(i_1, \dots, i_m)$ in Δ ist eine endliche Folge von Kammern

$$(c_0, c_1, \dots, c_m) \quad \text{mit} \quad c_{k-1} \underset{i_k}{\sim} c_k \quad \text{und} \quad c_{k-1} \neq c_k \quad \forall 1 \leq k \leq m,$$

dabei heißt m die Länge von $(c_0, \dots, c_m)$.

Wir betrachten (c_0) als Galerie vom leeren Typ mit Länge 0.

Δ heißt zusammenhängend, falls je zwei Kammern durch eine Gallerie verbunden werden können.

1. Definition

Seien Δ_1 und Δ_2 zwei Kammernsysteme über I. Eine Abbildung $f: \Delta_1 \to \Delta_2$ heißt Homomorphismus, falls gilt:

$$c \underset{i}{\sim} c' \Rightarrow f(c) \underset{i}{\sim} f(c') \quad \forall i \in I, c, c' \in \Delta_1.$$

2. Definition

Sei $M = (m_{ij})_{i,j}$ (oder Γ) eine Coxetermatrix (oder ein Coxetergraph) und (W, I) das zug. Coxetersystem.

Ein Gebäude vom Typ M (oder Γ) ist ein Kammernsystem Δ über I mit einer ("Abstands") Funktion

$\delta : \Delta \times \Delta \to W$, so dass gilt:

(G1) Jede Äquivalenzklasse jeder Äquivalenzrelation $\sim_i$ von Δ enthält mindestens zwei Elemente.

(G2) Seien $x, y \in \Delta$ und $\omega = i_1 \ldots i_k$ mit $\ell(\omega) = k$ $(i_1, \ldots, i_k \in I)$

Dann gilt:

$\delta(x,y) = \omega \iff$ Es ex. eine Gallerie von x nach y in Δ vom Typ $(i_1, \ldots, i_k)$

(Reduzierte Darstellungen in W beschreiben also Gallerien in Δ)

I nennt man den Rang des Gebäudes (Δ, δ).

Ein Gebäude heißt dick (dünn), wenn jede Äquivalenzklasse jeder Äquivalenzrelation $\sim_i$ von Δ mindestens drei (genau zwei) Elemente enthält.

Bemerkungen:

Setzt man in ($\delta 2$) $w=1$ oder $w=i \in I$, so erhält man

- $\delta(x,y)=1 \iff x=y$
- $\delta(x,y)=i \iff x \underset{i}{\sim} y$ und $x \neq y$

Also bestimmt das Paar (Δ, δ) die Äquivalenzrelationen $\underset{i}{\sim}$ für $i \in I$ und damit das Kammernsystem.

Man kann demnach Gebäude auch so definieren:

3. Definition

Ein Gebäude vom Typ M (oder Γ) ist eine Menge Δ mit einer Abbildung $\delta: \Delta \times \Delta \to W$, so dass gilt:

($\delta 1'$) Für jedes $i \in I$ definiert $x \underset{i}{\sim} y :\iff \delta(x,y) \in \{1, i\}$ eine Äquivalenzrelation auf Δ (also ein Kammernsystem) und jede Äquivalenzklasse enthält mindestens zwei Elemente.

($\delta 2$) wie in Definition ~~1~~ 2.

4. Beispiel

Sei M eine Coxetermatrix und (W, I) das zug. Coxetersystem. Wir definieren

$$\delta_W : W \times W \to W$$
$$(x, y) \longmapsto x^{-1} y.$$

Dann ist (W, δ_W) ein dünnes Gebäude vom Typ M.

Beweis:

zu (G1'):

Seien $x, y \in W$, $i \in I$ bel.

- Dann ist $x \underset{i}{\sim} y \Leftrightarrow x^{-1} y \in \{1, i\}$ eine Äquivalenzrelation. (nachrechnen).
- Jede Äquivalenzklasse enthält genau zwei Elemente: $\{x, xi\}$.

zu (G2):

Seien $x, y \in W$ bel. und $w = i_1 \dots i_k \in W$ mit $l(w) = k$.

Dann:

$$\delta(x, y) = x^{-1} y = w = i_1 \dots i_k$$
$$\Leftrightarrow \quad y = x i_1 \dots i_k$$
$$\Leftrightarrow \quad (x, x i_1, \dots, x i_1 \dots i_k) \text{ ist eine Galerie}$$

von x nach y vom Typ $(i_1, \dots, i_k)$.

$\square$

Kurze Wiederholung

Ein Kammernsystem über I ist eine Menge Δ mit Äquivalenzrelationen $\underset{i}{\sim}$ für $i \in I$.

Seien $x, y \in \Delta$. Eine <u>Galerie von x nach y</u> vom Typ $(i_1, \dots, i_m)$ in Δ ist eine endliche Folge von Kammern

$$(\underset{c_0}{\overset{\shortparallel}{x}}, c_1, \dots, c_{m-1}, \underset{c_m}{\overset{\shortparallel}{y}}) \quad \text{mit} \quad c_{k-1} \neq c_k \quad \text{und} \quad c_{k-1} \underset{i_k}{\sim} c_k \quad \forall\, 1 \leq k \leq m$$

Seien Δ_1 und Δ_2 zwei Kammernsysteme über I.
Eine Abbildung $f: \Delta_1 \to \Delta_2$ heißt <u>Kammernhomomorphismus</u>, falls gilt: $x \underset{i}{\sim} y \Rightarrow f(x) \underset{i}{\sim} f(y)$ $\forall i \in I, x, y \in \Delta_1$.

Sei $M = (m_{ij})_{i,j}$ (oder Γ) eine Coxetermatrix (oder ein Coxetergraph) und (W, I) das zug. Coxetersystem.
Ein <u>Gebäude vom Typ M (oder Γ)</u> ist eine Menge Δ mit einer Abbildung $\delta: \Delta \times \Delta \to W$, so dass gilt:

(G1') Für jedes $i \in I$ definiert $x \underset{i}{\sim} y :\Leftrightarrow \delta(x,y) \in \{1, i\}$ eine Äquivalenzrelation auf Δ (also ein Kammernsystem) und jede Äquivalenzklasse enthält mindestens zwei Elemente.

(G2) Seien $x, y \in \Delta$ und $w = i_1 \dots i_k$ mit $\ell(w) = k$. Dann gilt:
$\delta(x,y) = w \Leftrightarrow$ Es ex. eine Galerie von x nach y vom Typ $(i_1, \dots, i_k)$

Ein Gebäude heißt <u>dick (dünn)</u>, wenn jede Äquivalenzklasse jeder Äquivalenzrelation $\underset{i}{\sim}$ von Δ mindestens drei (genau zwei) Elemente enthält.

Frage: Zu welchen Coxetergraphen existieren dicke (dünne) Gebäude?

Zuerst: dünne Gebäude

<u>Beispiel:</u>

Sei M eine Coxetermatrix und (W, I) das zug. Coxetersystem. Dann ist $\left(W, \delta_W : \begin{array}{l} W \times W \to W \\ (x,y) \longmapsto x^{-1}y \end{array} \right)$ ein dünnes Gebäude vom Typ M.

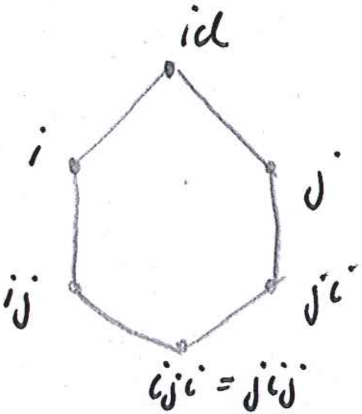
5. Definition

Sei Δ ein Kammernsystem über I. Der <u>Kammerngraph</u> Γ_Δ ist der folgende Graph:

- Die Ecken sind die Kammern
- Zwei Kammern $x, y \in \Delta, x \neq y$ bilden eine Kante, wenn es $i \in I$ gibt mit $x \underset{i}{\sim} y$.

Beispiel:

$(\underset{\{id, i, j, ij, ji, iji = jij\}}{\underset{\shortparallel}{D_3}}, \delta_{D_3})$



Bemerkungen:

Galerien in $(\Delta, \underset{i\in I}{\sim})$ $\leftrightarrow$ Wege in Γ_Δ

$(\Delta, \underset{i\in I}{\sim})$ ist zusammenhängend $\iff$ Γ_Δ ist zusammenhängend

6. Definition

Sei $(\Delta, \underset{i\in I}{\sim})$ ein Kammernsystem über I und Γ_Δ der Kammerngraph von Δ.

Wenn

$$\begin{aligned} \psi: \text{Kanten}(\Gamma_\Delta) &\to I \\ \{x,y\} &\mapsto i \text{ mit } x \underset{i}{\sim} y \end{aligned}$$

wohldefiniert ist (d.h. $x \underset{i}{\sim} y$ und $x \underset{j}{\sim} y \Rightarrow i=j$),

dann heißt diese Abbildung die <u>Kantenfärbung von Γ_Δ</u>.

Beispiel:

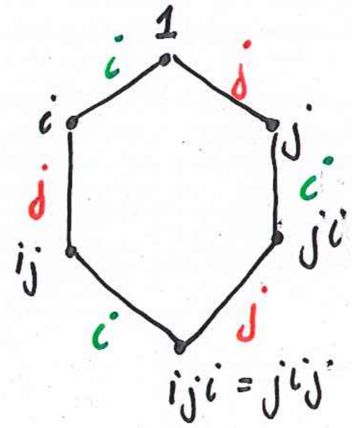
Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ M. Dann ist ψ wohldefiniert.

Denn: Seien $x, y \in \Delta$, $x \neq y$ mit $x \underset{i}{\sim} y$ und $x \underset{j}{\sim} y$.

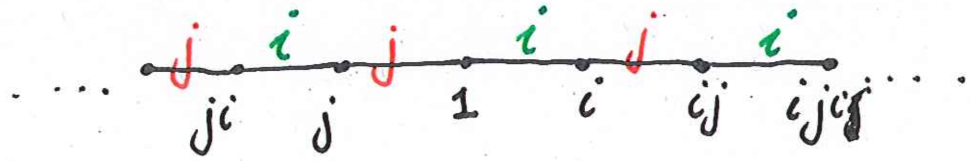
Dann folgt mit (δ2) $i = \delta(x,y) = j$.

Beispiele:

(i) (D_3, δ_{D_3})



(ii) $(D_\infty, \delta_{D_\infty})$



Bemerkung:

Galerien in $(\Delta, \sim_{i\in I})$ vom Typ $i_1 \dots i_k$ $\longleftrightarrow$ gefärbte Wege in Γ_Δ mit Kantenfärbung $i_1 \dots i_k$

7. Definition

Ein <u>Homomorphismus</u> zwischen zwei Gebäuden (Δ, δ) und (Δ', δ') vom gleichen Typ ist eine Abbildung

$$f: \Delta \to \Delta' \quad \text{mit} \quad \delta(x,y) = \delta'(f(x), f(y))$$

für alle $x, y \in \Delta$

8. Satz

Seien (Δ, δ) und (Δ', δ') zwei Gebäude vom gleichen Typ und $f: \Delta \to \Delta'$ eine Bijektion.

Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist ein Gebäudenhomomorphismus

(ii) f ist ein Kammernhomomorphismus

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Seien $x, y \in \Delta$ und $i \in I$ bel. Dann gilt:

$$x \underset{i}{\sim} y \Rightarrow \delta(x,y) \in \{1, i\} \Rightarrow \delta'(f(x), f(y)) \in \{1, i\}$$

$$\Rightarrow f(x) \underset{i}{\sim} f(y).$$

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Seien $x, y \in \Delta$ bel.

1. Fall: $x = y$

Dann $1 = \delta(x,y)$. Da f injektiv ist, folgt $f(x) = f(y)$ und damit folgt $\delta'(f(x), f(y)) = 1$

2. Fall: $x \neq y$

Wir wählen eine reduzierte Darstellung von $\delta(x,y) = w$

$$\delta(x,y) = \omega = i_1 \dots i_k \quad \text{mit } \ell(\omega) = k > 0$$

Nach (δ2) existiert eine Galerie

$$(\underset{\overset{\shortparallel}{c_0}}{x}, c_1, \dots, c_{k-1}, \underset{\overset{\shortparallel}{c_k}}{y}) \quad \text{vom Typ } (i_1, \dots, i_k)$$

<u>Also:</u>

$$x \sim_{i_1} c_1 \sim_{i_2} c_2 \sim \dots \sim_{i_k} y$$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} f(x) \sim_{i_1} f(c_1) \sim \dots \sim_{i_k} f(y)$$

Da f injektiv ist, gilt: $f(c_{\ell-1}) \neq f(c_\ell) \ \forall \ \ell = 1, \dots, k$.

Also ist $(f(x), \dots, f(y))$ eine Galerie von $f(x)$ nach $f(y)$ vom Typ $(i_1, \dots, i_k)$.

$$\overset{(\delta 2)}{\Rightarrow} \delta'(f(x), f(y)) = i_1 \dots i_k = \omega. \qquad \square$$

9. Lemma (Einfache Eigenschaften von Gebäuden)

Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ M und (W, I) das zug. Coxetersystem. Dann gilt:

(i) Δ ist zusammenhängend

(ii) Für $x \in \Delta$ ist die Abbildung:

$$\delta(x, \_) : \Delta \to W \text{ surjektiv.}$$

Insbesondere ist die Abbildung δ surjektiv.

(iii) Für $x, y \in \Delta$ gilt: $\delta(x,y) = \delta(y,x)^{-1}$

Beweis:

zu (i): Seien $x, y \in \Delta$ bel. Wir wählen eine reduzierte Darstellung von $\delta(x,y) = \omega = i_1 \dots i_k$ mit $\ell(\omega) = k$.

$\overset{(\delta 2)}{\Longrightarrow}$ Es existiert eine Galerie von x nach y vom Typ $(i_1, \dots, i_k)$.

zu (ii): Sei $\omega \in W$ bel. Wir wählen eine reduzierte Darstellung von $\omega = i_1 \dots i_m$ mit $\ell(\omega) = m$.

Wähle c_0, c_1 mit $c_0 \underset{i_1}{\sim} c_1$, $c_0 \neq c_1$ und dann induktiv $c_2, \dots, c_m$ mit

$c_{k-1} \underset{i_k}{\sim} c_k$ und $c_{k-1} \neq c_k$ für $2 \leq k \leq m$ (das ist möglich nach (δ1'))

Dann ist $(c_0, c_1, \dots, c_m)$ eine Galerie vom Typ $(i_1, \dots, i_m)$, also gilt nach (δ2) $\delta(c_0, c_m) = \omega$.

zu (iii):

Wir schreiben $\delta(x,y) = \omega = i_1 \dots i_m$ mit $\ell(\omega) = m$.

Nach (δ2) existiert eine Galerie

$$(\underset{c_0}{\overset{\shortparallel}{x}}, c_1, \dots, \underset{y}{\overset{\shortparallel}{c_m}}) \text{ vom Typ } (i_1, \dots, i_m).$$

Dann ist

$$(\underset{\overset{\shortparallel}{y}}{c_m}, c_{m-1}, \ldots, \underset{\overset{\shortparallel}{x}}{c_0}) \text{ eine Galerie von } y \text{ nach } x$$

vom Typ $(i_m, \ldots, i_1)$

Nach (G2) gilt: $\delta(y,x) = i_m \ldots i_1$

$$= (i_1 \ldots i_m)^{-1}$$

$$= \delta(x,y)^{-1} \qquad \square.$$

10. Satz (über dünne Gebäude)

Sei (Δ, δ) ein dünnes Gebäude vom Typ M und (W, I) das zug. Coxetersystem. Dann ist

$$(\Delta, \delta) \text{ isomorph zu } (W, \delta_W).$$

Genauer: Ist $a \in \Delta$ fest. So existiert genau ein Isomorphismus $\varphi : (\Delta, \delta) \to (W, \delta_W)$ mit

$$a \longmapsto 1$$

nämlich $\varphi = \delta(a, -)$.

Beweis:

Wir zeigen zuerst, dass $\varphi = \delta(a,-) : \Delta \to W$ eine Bijektion ist.

- Nach Lemma 9(ii) ist $\delta(a,-)$ surjektiv.

zu Injektivität: Seien $x, y \in \Delta$ mit $\varphi(x) = \varphi(y)$ bel.

z.z: $x = y$.

Wir wählen eine reduzierte Darstellung

$$\begin{array}{l} \varphi(x) = \delta(a,x) = w = i_1 \dots i_m \quad \text{mit} \quad \ell(w) = m \\ \ \shortparallel \\ \varphi(y) = \delta(a,y) \end{array}$$

Nach (δ2) existieren Galerien

$(a, c_1, \dots, c_m = x)$ und

$(a, c_1', \dots, c_m' = y)$ vom Typ $(i_1, \dots, i_m)$

Es gilt: $a \underset{i_1}{\sim} c_1$ und $a \underset{i_1}{\sim} c_1'$

Da Δ ein dünnes Gebäude ist, folgt $c_1 = c_1'$

Wir erhalten: $c_1 = c_1'$, $c_2 = c_2'$, …, $\underset{\underset{x}{\shortparallel}}{c_m} = \underset{\underset{y}{\shortparallel}}{c_m'}$.

<u>Bem:</u> In dünnen Gebäuden ist jede Galerie durch ihren Anfangspunkt und ihren Typ eindeutig festgelegt.

Bleibt zu zeigen, dass φ ein Kammernhomomorphismus ist (das reicht, nach Satz 8).

Seien $x, y \in \Delta$ mit $x \underset{i}{\sim} y$ bel.

Wenn $x = y$ ist, dann $1 = \delta(x,y)$ und $f(x) = f(y)$

$\Rightarrow \delta'(f(x), f(y)) = 1$.

Also $x \neq y$:

<u>z.z:</u> $\mathcal{C}(x) \sim_i \mathcal{C}(y)$

$$\underset{\delta(a,x)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{C}(x)}} \sim_i \underset{\delta(a,y)}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{C}(y)}}$$

Sei $(a, c_1, \ldots, c_m = x)$ eine Galerie von a nach x vom Typ $(i_1, \ldots, i_m)$ mit $\ell(i_1 \ldots i_m) = m$ und $\delta(a,x) = i_1 \ldots i_m$.

<u>1. Fall:</u> $\ell(i_1 \ldots i_m i) = m+1$

Dann ist $(a, c_1, \ldots, c_m = x, y)$ eine Galerie von a nach y vom Typ $(i_1, \ldots, i_m, i)$.

Nach (δ2) gilt:
$$\delta(a,y) = i_1 \ldots i_m i = \delta(a,x) \cdot i$$
$$\Rightarrow \delta(a,x)^{-1} \delta(a,y) = i$$
$$\Rightarrow \delta(a,x) \sim_i \delta(a,y)$$
$$\Rightarrow \mathcal{C}(x) \sim_i \mathcal{C}(y).$$

<u>2. Fall:</u> $\ell(i_1 \ldots i_m i) = m-1$

Dann existiert $1 \leq k \leq m$ mit:

$$i_1 \ldots i_m = i_1 \ldots \widehat{i_k} \ldots i_m i \quad \text{((E) Exchange Condition)}$$

Da $\ell(i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_m\, i) = m$, existiert nach (G2) eine Galerie

$$(a, c_1', \dots, c_{m-1}', \cancel{y}\ x) \text{ vom Typ } (i_1, \dots, \hat{i}_k, \dots i_m, i)$$

Es gilt: $c_{m-1}' \underset{i}{\sim} x$ und $x \underset{i}{\sim} y \overset{\Delta \text{ dünn}}{\Longrightarrow} c_{m-1}' = y$.

Folglich: $\delta(a,y) = i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_m$

$$= i_1 \dots i_m \cdot i$$

$$= \delta(a,x) \cdot i$$

$$\Rightarrow \delta(a,x)^{-1} \delta(a,y) = i$$

$$\Rightarrow \delta(a,x) \underset{i}{\sim} \delta(a,y)$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \underset{i}{\sim} \varphi(y)$$

$\blacksquare$

<u>Eindeutigkeit:</u>

Sei $f: (\Delta, \delta) \to (W, \delta_W)$ ein Isomorphismus mit

$$a \longmapsto 1$$

Dann ist: $f \circ \varphi^{-1}: W \to W$ ein Isomorphismus mit

$$1 \longmapsto 1$$

Sei nun $w \in W$ bel. Dann gilt:

$$w = \delta_W(1, w) \underset{\substack{\uparrow \\ f\circ\varphi^{-1} \text{ ist} \\ \text{Hom.}}}{=} \delta_W(f\circ\varphi^{-1}(1), f\circ\varphi^{-1}(w)) = \delta_W(1, f\circ\varphi^{-1}(w))$$

$$= f\circ\varphi^{-1}(w)$$

$$\Rightarrow \quad f \circ \varphi^{-1}(\omega) = \omega$$

Folglich: $\quad f \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_W$

$$\Rightarrow \quad f = \varphi. \qquad \square$$

11. Bemerkung:

Mit diesem Satz sind also alle dünnen Gebände bekannt.

Kurze Wiederholung

Sei Γ ein Coxetergraph und (W,I) das zug. Coxetersystem.
Ein Gebäude vom Typ Γ ist eine Menge
Δ mit einer Abbildung $\delta: \Delta \times \Delta \to W$, so dass gilt:

(δ1') Für jedes $i \in I$ definiert $x \underset{i}{\sim} y :\Leftrightarrow \delta(x,y) \in \{1, i\}$ eine Äquivalenzrelation auf Δ (also ein Kammernsystem) und jede Äquivalenzklasse enthält mindestens zwei Elemente.

(δ2) Seien $x,y \in \Delta$ und $w = i_1 \dots i_k$ mit $\ell(w) = k$.
Dann gilt:

$\delta(x,y) = w \Leftrightarrow$ Es existiert eine Galerie von x nach y vom Typ $(i_1, \dots, i_k)$

Bemerkungen:

- Wir betrachten δ als eine W-wertige Abstandsfunktion. Das Element $w = \delta(x,y)$ gibt an wie wir in dem gefärbten Kammergraphen von x nach y kommen.
- Wieso betrachten wir nur reduzierte Darstellungen von $w \in W$?

Angenommen $x \underset{i}{\sim} y \underset{i}{\sim} z$ mit $x \neq y$ und $y \neq z$ und $x \neq z$
Dann ist (x,y,z) eine Galerie vom Typ (i,i)

Wir hätten dann: $\delta(x,z) = i \cdot i = 1$, aber $x \neq z$.

(δ hätte dann nicht die Eigenschaft einer Metrik und zwar die folgende: $\delta(x,z) = 1 \Leftrightarrow x = z$)

12. Definition

Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ Γ. Das Gebäude Δ heißt *sphärisch*, falls die Coxetergruppe W die zu Γ gehört endlich ist. Weiter heißt Δ irreduzibel, falls Γ ein zusammenhängender Graph ist.

Wir werden später sehen, dass folgendes gilt:

Jedes Gebäude Δ vom Typ $\Gamma = \Gamma_1 \,\dot\cup\, \Gamma_2 \,\dot\cup \dots \dot\cup\, \Gamma_k$ ist isomorph zu einem direkten Produkt $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_k$ von Gebäuden Δ_i vom Typ Γ_i für $i = 1, \dots, k$

$\rightsquigarrow$ Bausteine für Gebäude: irreduzible Gebäude

Sei Γ vom Typ $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)$.

Existiert ein dickes Gebäude vom Typ Γ?

Kann man diese Gebäude „schön" klassifizieren?

13. Gebäude vom Typ A_1 (also $(W,I) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \{i\})$)

Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 2 Elementen.

Dicke Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 3 Elementen.

<u>Denn:</u> • Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ A_1. Da die Äquivalenzklasse $\underset{i}{\sim}$ mindestens 2 Elemente enthält, folgt $\#\Delta \geq 2$.

• Sei nun Δ eine beliebige Menge mit $\#\Delta \geq 2$. Wir definieren $\delta: \Delta \times \Delta \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wie folgt

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ i, & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

Dann ist (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ A_1.

$\rightsquigarrow$ keine Klassifikation.

14. Gebäude vom Typ $\overset{m}{\bullet\!-\!\!-\!\!-\!\bullet}$

sind Graphen mit „schönen" Eigenschaften

Erinnerung:

Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ besteht aus einer Menge V (Ecken von Γ) und $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ mit $\# e = 2$ für alle $e \in E$ (Kanten von Γ).

(Γ ist ungerichtet, ohne Schleifen, ohne doppelten Kanten)

15. Definition

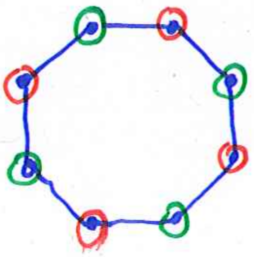
Ein Graph $\Gamma = (V, E)$ heißt <u>bipartit</u>, wenn eine Partition der Ecken $V = V_1 \dot\cup V_2$ existiert, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt:

$$v \in V_1 \Rightarrow w \in V_2 \text{ oder}$$
$$v \in V_2 \Rightarrow w \in V_1,$$

d.h.: Die Ecken von Γ können wir in zwei Farben färben, so dass benachbarte Ecken <u>nicht</u> dieselbe Farbe haben.

16. Beispiele

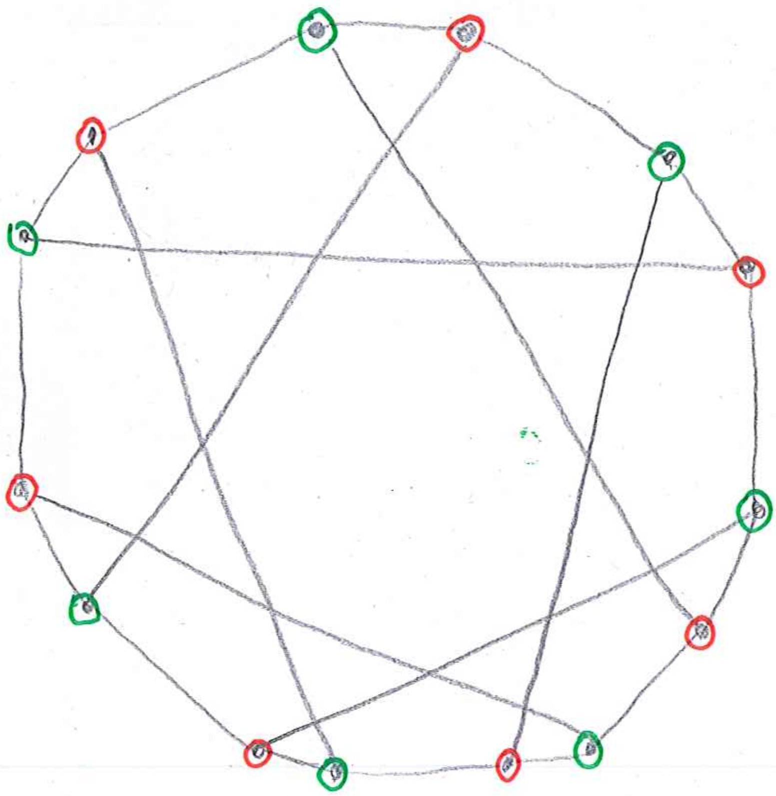
(i) Regelmäßiges n-Eck, also



ist genau dann bipartit, wenn n gerade ist.

(ii) (aus Kapitel 1) Fahnenkomplex $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$

14 - Ecken
21 - Kanten



17. Definition

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein Graph. Ein <u>Weg der Länge k</u> in Γ ist eine endliche Folge von Ecken $(x_0, \dots, x_k)$, so dass gilt: $\{x_{i-1}, x_i\} \in E \;\; \forall\, i = 1,..,k$ und $x_i \neq x_{i-2}$ $\forall\, i = 2, \dots, k$

Ein <u>Kreis in $\Gamma = (V,E)$</u> ist ein Weg der Länge $k \geq 3$

$(x_0, x_1, \ldots, x_k)$ mit $x_0 = x_k$

Sei $v \in V$. Die <u>Valenz</u> von v, $\#\Gamma_v$ ($\mathrm{val}(v)$) ist definiert als: $\#\Gamma_v = \#\{w \in V \mid \{v,w\} \in E\}$

Ab jetzt: Γ ist zusammenhängend (d.h. zwischen zwei Ecken aus V existiert mindestens ein Weg)

18. Definition

Sei $\Gamma = (V,E)$ ein Graph. Wir def. auf V eine Abstandsfunktion

$$d: V \times V \to \mathbb{N}$$
$$(v,w) \mapsto \text{die Länge des kürzesten Weges von } v \text{ nach } w$$

Weiter definieren wir den <u>Durchmesser</u> von Γ wie folgt:

$$\mathrm{diam}(\Gamma) := \sup\{d(v,w) \mid v,w \in V\}$$

Der <u>Umfang</u> von Γ, $g(\Gamma)$ ist die Länge des kürzesten Kreises in Γ.

Wenn Γ ein Baum ist (ohne Kreise), dann setzen wir $g(\Gamma) = \infty$.

19. Beispiel

Wir betrachten wieder $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$.

Es gilt: $\mathrm{diam}(\Delta(\mathbb{F}_2^3)) = 3$ und $g(\Delta(\mathbb{F}_2^3)) = 6$

20. Definition

Ein <u>verallgemeinertes m-Eck</u> $(m \geq 2)$ ist ein zusammenhängender bipartiter Graph $\Gamma = (V, E)$ mit

(i) $\operatorname{diam}(\Gamma) = m$

(ii) $g(\Gamma) = 2m$

21. Beispiele

- $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ ist ein verallgemeinertes 3-Eck

- 

$\operatorname{diam}(\Gamma) = 4$

$g(\Gamma) = 8$

Achtung: Regelmäßige $2k$-Ecke sind verallgemeinerte k-Ecke.

22. Lemma

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein verallgemeinertes m-Eck. Weiter seien $v, w \in V$ bel. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) Wenn $d(v, w) = k < m$, dann existiert ein eindeutiger Weg der Länge k von v nach w.

(ii) Wenn $d(v, w) = m$, dann haben die Ecken v und w die gleiche Anzahl an Nachbarn, d.h. $\Gamma_v \overset{\text{bijek.}}{\cong} \Gamma_w$.

($v' \in V$ ist ein Nachbar von v $\iff$ $d(v', v) = 1$)

(iii) Jede Ecke in Γ hat mindestens zwei Nachbarn.

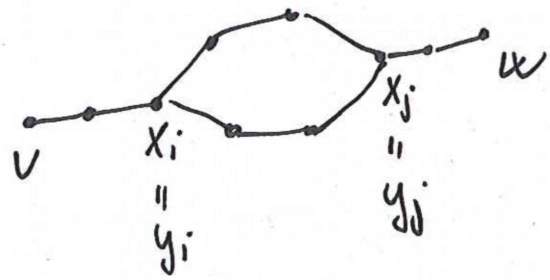
(iv) Es existiert ein Kreis $(x_0, x_1, \ldots, x_{2m} = x_0)$ der Länge $2m$, so dass $v = x_i$ und $w = x_j$ für $i, j \in \{0, \ldots, 2m\}$.

Beweis:

zu (i):

Angenommen es existieren zwei verschiedene Wege der Länge k zwischen v und w, $(x_0, \dots, x_k)$ und $(y_0, \dots, y_k)$

Dann:



$\Rightarrow$ es ex. ein Kreis der Länge $\leq 2k < 2m$ ↯ zu $g(\Gamma) = 2m$.

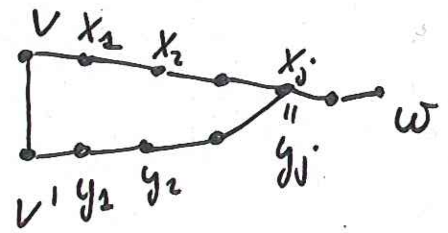
zu (ii):

Sei v' ein Nachbar von v. Es gilt also $d(v,v') = 1$.

Beh: $d(v',w) = m-1$.

Da $\operatorname{diam}(\Gamma) = m$, folgt $d(v',w) \leq m$

IA: $d(v',w) = m$. Dann



Dann erhalten wir einen Kreis der Länge $2 \cdot j + 1$. ↯

Da Γ bipartit ist, hat jeder Kreis ~~der~~ in Γ eine gerade Länge.

Nach (i) existiert ein eind. Weg von v' nach w.

Diesen Weg enthält genau einen Nachbar w' von w.

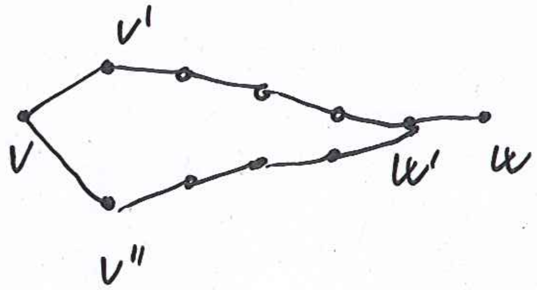
Wir betrachten die Abbildung:

$$\Gamma_v \xrightarrow{\psi} \Gamma_w$$

$$v' \longmapsto w'$$

- ψ ist wohldefiniert (da der Weg von v' nach w eindeutig ist)

- ψ ist injektiv, denn:



Dann erhalten wir einen Kreis der Länge

$$\leq 2\cdot(m-2)+2 = 2m-4+2 = 2m-2 \quad \text{⚡}$$

zu $g(\Gamma) = 2m$.

- ψ ist surjektiv, denn:

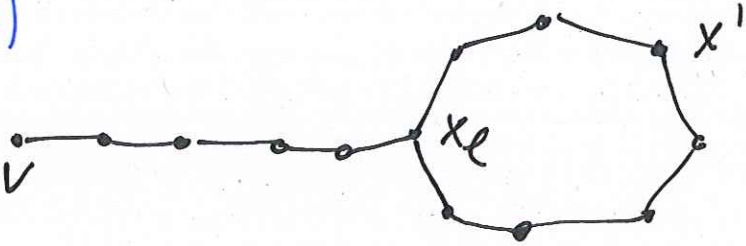
Sei $w' \in \Gamma_w$. Betrachte den eind. Weg von w' nach v. Dieser enthält genau einen Nachbar von v, v' und es gilt: $\psi(v') = w'$.

<u>zu (iii):</u> Sei $(x_0, \ldots, x_{2m} = x_0)$ ein Kreis der Länge $2m$ in Γ.

<u>1. Fall:</u> $v = x_i$ für ein $i = 0, \ldots, 2m$. Dann hat v mindestens 2 Nachbarn.

<u>2. Fall:</u> $v \neq x_i$ für $i = 0, \ldots, 2m$.

Sei $(y_0 = v, \dots, y_k = x_\ell)$ ein kürzester Weg von v zu dem Kreis $(x_0, \dots, x_{2m})$



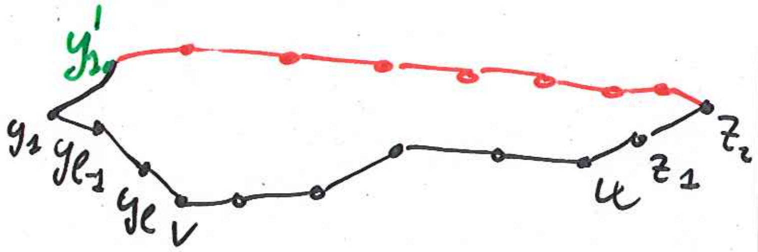
Weiter $\exists\, x' \in \{x_0, \dots, x_{2m}\}$ mit $d(x_\ell, x') = m - k$

Dann $d(v, x') = m \overset{(ii)}{\Rightarrow} \#$ Nachbarn von v

$= \#$ Nachbarn von $x' \geq 2$

zu (iv):

Sei $(x_0 = v, x_1, \dots, x_k = w)$ ein kürzester Weg zwischen v und w.



Da jeder Knoten mindestens zwei Nachbarn hat können wir diesen Weg verlängern, so dass

$(y_1, \dots, y_\ell, x_0, \dots, x_k, z_1, \dots, z_n)$ ein Weg der

Länge m ist.

Da y_1 mindestens zwei Nachbarn hat, ex. y_1' mit

$d(y_1, y_1') = 1$ und $y_1' \notin \{y_1, \dots, y_\ell, \dots\}$

Es gilt: $d(y_1', z_n) = m - 1 \overset{(i)}{\Rightarrow}$ Es ex. ein eindeutiger Weg zwischen y_1' und z_n

$\square$

Kurze Wiederholung

Sei Γ ein Coxetergraph und (W, I) das zug. Coxetersystem.
Ein Gebäude vom Typ Γ ist ein Kammernsystem Δ über I mit einer Abstandsfunktion $\delta: \Delta \times \Delta \to W$, so dass gilt:

(G1) Jede Äquivalenzklasse jeder Äquivalenzrelation $\underset{i}{\sim}$ von Δ enthält mindestens zwei Elemente.

(G2) Seien $x, y \in \Delta$ und $w = i_1 \ldots i_k$ mit $\ell(w) = k$.
Dann gilt:

$$\delta(x,y) = w \iff \text{Es ex. eine Gallerie von } x \text{ nach } y \text{ in } \Delta \text{ vom Typ } (i_1, \ldots, i_k)$$

- Jedes Gebäude Δ vom Typ $\Gamma = \Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_k$ ist isomorph zu einem direkten Produkt $\Delta_1 \times \ldots \times \Delta_k$ von Gebäuden Δ_i vom Typ Γ_i für $i = 1, \ldots, k$. (Beweis später)

$\rightsquigarrow$ Bausteine für Gebäude: irreduzible Gebäude

- Wir beschäftigen uns zuerst mit sphärischen Gebäuden: (d.h. W ist endlich):

Sei Γ vom Typ A_n ($B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)$)

Fragen:
- Existiert ein dickes Gebäude vom Typ Γ?
- Kann man diese "schön" (durch algebraische Daten) klassifizieren?

① Dicke Gebäude vom Typ A_1 sind Mengen mit mindestens 3 Elementen

② Gebäude vom Typ $\bullet\overset{m}{\text{—}}\bullet$ $(m \geq 3)$ sind verallgemeinerte m-Ecke.

Dicke Gebäude vom Typ $\bullet\overset{m}{\text{—}}\bullet$ $(m \geq 3)$ sind dicke verallgemeinerte m-Ecke.

Definition:

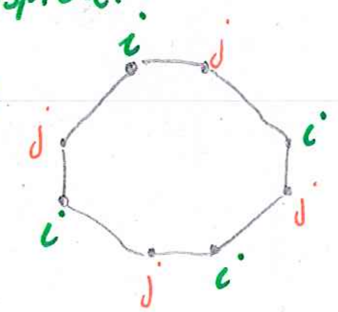
(i) Ein <u>verallgemeinertes m-Eck</u> ist ein zusammenhängender bipartiter Graph $\Gamma = (V, E)$ mit

- $\operatorname{diam}(\Gamma) = m$
- $g(\Gamma) = 2m$

(ii) Ein verallgemeinertes m-Eck heißt <u>dick</u>, falls

$$\# \Gamma_v = \# \{ w \in V \mid d(v,w) = 1 \} \geq 3 \quad \text{für alle } v \in V$$

Beispiele:

(i) 

ist ein verallalg. 4-Eck

(ii) $\Delta(\mathbb{F}_2^3)$ ist ein dickes verallalg. 3-Eck.

Erinnerung:

Seien $\Gamma = (V, E)$ und $\Gamma' = (V', E')$ zwei Graphen.

Eine Abbildung $\varphi : V \to V'$ heißt <u>Isomorphismus</u>, falls φ bijektiv und $d'(\varphi(v), \varphi(w)) = d(v,w)$ $\forall\, v, w \in V$ gilt.

23. Satz Sei $m \geq 3$

$$\{\text{Gebäude vom Typ } \overset{m}{\bullet\!\!-\!\!\bullet}\}/_{\cong} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{verallgemein. } m\text{-Ecke}\}/_{\cong}$$

<u>Beweis:</u>

„$\Longleftarrow$"

Sei $\Gamma = (V,E)$ ein verallgemeinertes m-Eck. Wähle eine Partition der Ecken V in zwei Teilmengen V_i und V_j, so dass für alle $\{v,w\} \in E$ gilt:

$$v \in V_i \Rightarrow w \in V_j \text{ oder}$$
$$v \in V_j \Rightarrow w \in V_i$$

(Die Wahl ist eindeutig bis auf Umnummerierung)

Sei $f: V \to \{i,j\}$ die dazugehörige Knotenfärbung, d.h.

$$v \longmapsto \begin{cases} i, & \text{falls } v \in V_i \\ j, & \text{falls } v \in V_j \end{cases}$$

Wir definieren $\Delta_\Gamma := E$, $I = \{i,j\}$ und für $k \in I$ def. wir:

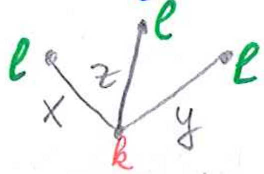
$x \sim_k y :\Leftrightarrow$ Die Kanten x und y haben mindestens eine gemeinsame Ecke in V_k.

<u>Beh:</u> $(\Delta_\Gamma, \sim_{i \in I})$ ist ein Kammernsystem.

<u>Beweis:</u> $x \sim_k x$ ✓

$x \sim_k y \Rightarrow y \sim_k x$ ✓

$x \sim_k y$ und $y \sim_k z \Rightarrow x \sim_k z$ ← Γ ist bipartit



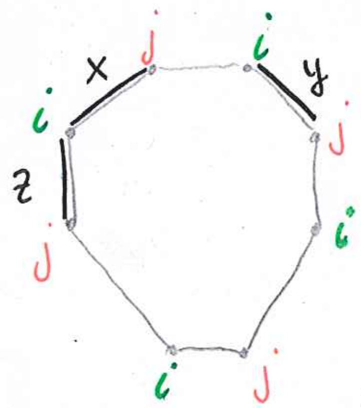
Da jede Ecke nach Lemma 22(iii) mindestens zwei Kanten hat, hat jede Äquivalenzklasse mindestens zwei Elemente, also ist (S1) erfüllt

zu (S2): Konstruktion von $\delta: \Delta_\Gamma \times \Delta_\Gamma \to W = \langle i,j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle$

1. Schritt:

Für $x = \{x_1, x_2\}$, $y = \{y_1, y_2\} \in E'$, $x \neq y$ definieren wir eine Abbildung

$$\tilde{d}(x,y) := \min \{ d(x_\ell, y_{\ell'}) \mid \ell, \ell' \in \{1,2\} \}$$



$\tilde{d}(x,z) = 0$

$\tilde{d}(x,y) = 1$

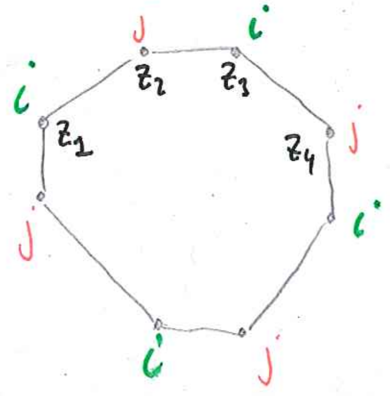
Beachte: $\tilde{d}$ ist keine Abstandsfunktion.

- Es gilt: $d(x,y) \le m-1$ für alle $x,y \in E$.
(siehe Lemma 22(ii))

2. Schritt:

Jeder Weg $(z_1, z_2, \dots, z_k)$ in Γ induziert ein Wort in $F(\{i,j\})$, nämlich $f(z_1)f(z_2)\dots f(z_k)$.

z.B.:



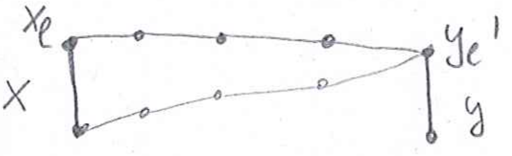
$(z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto ijij$

3. Schritt:

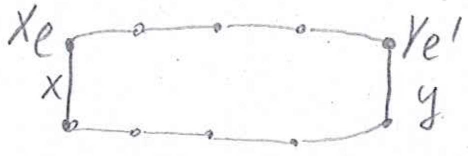
Seien $x, y \in E$ mit $\tilde{d}(x,y) < m-1$ bel.

Dann sind x_e, x_e' mit $d(x_e, y_e') = \tilde{d}(x,y) = k$ eindeutig.

Denn:



Kreis ungerader Länge ↯



Kreis der Länge

$$2k+2 < 2\cdot(m-1)+2 = 2m$$ ↯ zu $g(\Gamma)=2m$

Weiter ist der Weg $(x_e, z_1, \dots, z_n, y_e')$ der Länge $k < m-1$ eindeutig. (Lemma 22(i))

4. Schritt:

Wir definieren

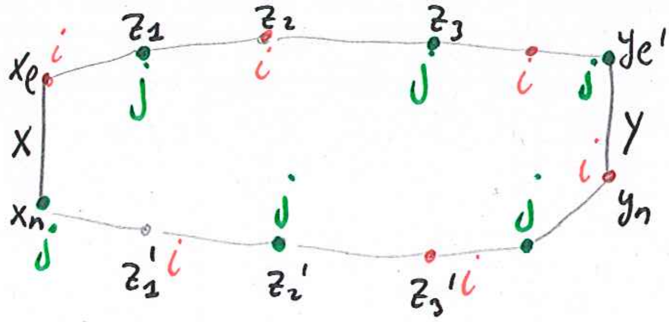
$$\delta: \Delta_\Gamma \times \Delta_\Gamma \to W$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} f(x_e)f(z_1)\dots f(z_n)f(y_e'), & \text{falls } \tilde{d}(x,y) < m-1 \\ \end{cases}$$

5. Schritt:

Seien $x, y \in E$, $x \neq y$ mit $\tilde{d}(x,y) = m-1$.

~~Dann~~ Seien x_e, y_e' mit $d(x_e, y_e') = m-1$, dann gilt auch $d(x_n, y_n) = m-1$



Da $d(x_e, y_e') = m-1$, ist der Weg $(x_e, z_1, z_2, \dots, y_e')$ der Länge $m-1$ eindeutig.

Genauso ist der Weg $(x_n, z_1', z_2', \dots, y_n)$ der Länge $m-1$ eindeutig.

Wir betrachten: $f(x_e) f(z_1) \dots f(y_e) \overset{\text{oBdA}}{=} \underbrace{ijiji j \dots}_{m\text{-Buchstaben}}$

Dann ist $f(x_n) f(z_1') f(z_2') \dots f(y_n) = \underbrace{jijiji \dots}_{m\text{-Buchstaben}}$

Da in W $(ij)^m = 1$ gilt, sind die Wörter

$$\underbrace{ijij \dots}_{m\text{-Buchst.}} = \underbrace{jijiji \dots}_{m\text{-Buchstaben}} \text{ gleich.}$$

6. Schritt: Wir definieren

$$\delta : \Delta_r \times \Delta_r \longrightarrow W$$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} f(x_e) f(z_1) \dots f(y_e'), & \text{wobei } \tilde{d}(x,y) = d(x_e, y_e') \\ & \text{und } (x_e, z_1, \dots, z_n, y_e') \\ & \text{ist ein Weg der Länge } d(x_e, y_e') \\ 1, \text{ falls } x = y & \end{cases}$$

δ ist nach Schritt 4 und Schritt 5 wohldefiniert.

Für δ gilt (G2).

<u>Bem:</u> (Δ_Γ, δ) ist dick genau dann wenn Γ dick ist.

„$\longrightarrow$" Sei (Δ, δ) ein Gebäude vom Typ $\overset{m}{\underset{i\quad j}{\bullet\!-\!\bullet}}$.

Wir definieren $\Gamma_\Delta \overset{=}{} (V,E)$ wie folgt:

V: Ecken von Γ_Δ: Äquivalenzklassen $\sim_i, \sim_j$.

E: Kanten von Γ_Δ: $\{v,w\} \in E \Leftrightarrow v \cap w \neq \emptyset$ für $v,w \in V$.

Dann ist: Γ_Δ bipartit, zusammenhängend, $\mathrm{diam}(\Gamma_\Delta) = m$ und $g(\Gamma_\Delta) = 2m$.

$\square$

Kurze Wiederholung

$$\{\text{(dicke) Gebäude vom Typ } \overset{m}{\bullet\!-\!\bullet}\}/_{\cong} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \{\text{(dicke) verallgemein. } m\text{-Ecke}\}/_{\cong}$$

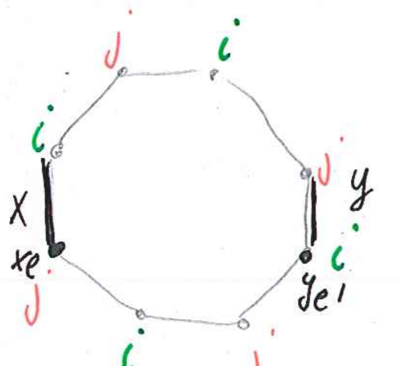
$$\Big(\Delta_\Gamma = E,\ \delta: \Delta_\Gamma \times \Delta_\Gamma \to \langle i,j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle \Big) \longleftarrow\!\shortmid\ \Gamma = (\underset{\substack{\shortparallel \\ V_i \,\dot\cup\, V_j}}{V}, E)$$

$$(\underset{\substack{\shortparallel \\ \{x_1,x_2\}}}{x}, \underset{\substack{\shortparallel \\ \{y_1,y_2\}}}{y}) \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = y \\ f(x_e) f(z_1) \dots f(z_n) f(y_{e'}), & \end{cases}$$

Knotenfärbung

wobei $d(x_e, y_{e'}) = \min\{d(x_k, y_n) \mid k, n = 1,2\}$

und $(x_e, z_1, \dots, z_n, y_{e'})$ ist der eind. Weg der Länge $d(x_e, y_{e'})$ zwischen x_e und $y_{e'}$.



$(x,y) \longmapsto jiji$

$$(\Delta,\ \delta: \Delta \times \Delta \to \underset{\substack{\shortparallel \\ \langle i,j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle}}{D_m}) \longmapsto \Gamma = \big(V = \{\text{Äquivalenzklassen bzgl. } \sim_i \text{ und } \sim_j\},$$

$$E = \{\{v,w\} \mid v,w \in V,\ v \cap w \neq \emptyset\}$$

24. Konstruktion von verallgemeinerten m-Ecken

Idee: Wir starten mit einem Graphen Γ_0 und konstruieren

$$\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \subseteq \Gamma_2 \subseteq \dots,$$

so dass der direkte Limes $\bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ ein verallgemeinertes m-Eck ist.

25. Definition

Ein <u>partielles m-Eck</u> ist ein zusammenhängender Graph Γ mit folgender Eigenschaft:

(P_m) Die Länge jedes Kreises in Γ ist gerade und $\geq 2m$.

26. Beispiele

(i)  Weg der Länge k ist ein partielles m-Eck für alle $m \geq 3$.

(ii) Bäume sind partielle m-Ecke für alle $m \geq 3$.

27. Definition/ Konstruktion

Sei $m \geq 3$.

<u>0. Schritt:</u> Wir starten mit einem partiellen m-Eck $\Gamma_0 = (V_0, E_0)$ mit $\operatorname{diam}(\Gamma_0) \geq m+1$.

<u>Schritt $i \leadsto i+1$:</u> Für jedes Paar $v, w \in V_i$ mit $d(v,w) = m+1$ fügen wir dem Graphen Γ_i einen Weg der Länge $m-1$ mit den Endpunkten v und w hinzu. So erhalten wir einen neuen Graphen $\Gamma_{i+1} = (V_{i+1}, E_{i+1})$.

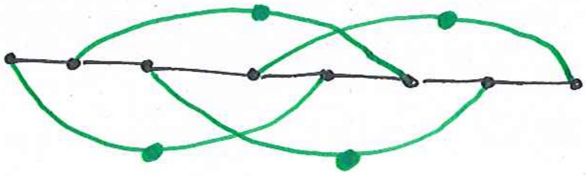
Der Graph $\mathcal{T}(\Gamma_0) := \bigcup\limits_{i \in I} \Gamma_i$ heißt der freie Abschluss von Γ_0.

28. Beispiel

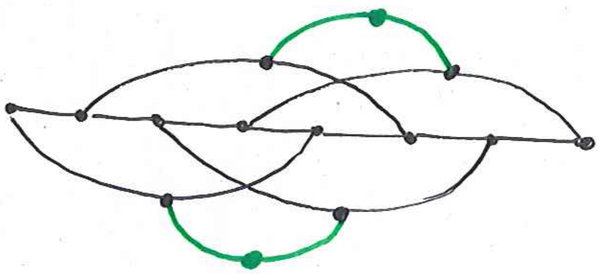
$m = 3$

Γ_0

Γ_1



Γ_2



...

29. Satz

$\mathcal{T}(\Gamma_0)$ ist ein verallgemeinertes m-Eck.

Beweis:
- $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ ist zusammenhängend ✓
- $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ ist bipartit, denn: Γ_0 hat Eigenschaft (P_m) und jedes Γ_i hat Kreise ~~un~~gerader Länge.
- $g(\mathcal{T}(\Gamma_0)) = 2m$ ✓
- $\operatorname{diam}(\mathcal{T}(\Gamma_0)) = m$

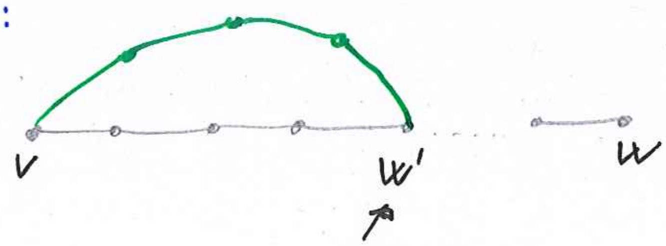
<u>Denn:</u> $\operatorname{diam}(\mathcal{T}(\Gamma_0)) \geq m$, denn Γ_1 hat einen Kreis der Länge $2m$ und dieser erhält zwei Knoten v, w mit $d(v,w) = m$.
Der Abstand zwischen den Knoten auf diesem Kreis wird nicht verändert.

$\operatorname{diam}(\mathcal{T}(\Gamma_0)) \leq m$, denn:

seien v, w Ecken von $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ mit $d(v,w) = k > m$.

Dann ex. $i \in I$ mit v, w sind Ecken von Γ_i.

Es gilt in Γ_{i+1}:



$d(v,w') = m+1$ in Γ_i

$\Rightarrow d(v,w) = k-2$ in Γ_{i+1}

Also $d(v,w) \leq m$ in $\mathcal{T}(\Gamma_0)$.

30. Bemerkungen

(i) $\Gamma_0, \Gamma_i \Rightarrow \mathcal{T}(\Gamma_0) \cong \mathcal{T}(\Gamma_i)$

(ii) Wie können wir an Γ_0 und Γ_0' erkennen, dass

$$\mathcal{T}(\Gamma_0) \not\cong \mathcal{T}(\Gamma_0')?$$

$\rightsquigarrow$ gewichtete Eulercharakteristik.

31. Definition:

Sei $\Gamma = (V, E)$ ein endlicher Graph.

Für $m \geq 3$ definieren wir <u>die gewichtete Eulercharakteristik</u> $\delta_m(\Gamma)$ wie folgt:

$$\delta_m(\Gamma) := (m-1) \cdot \# V - (m-2) \cdot \# E$$

32. Lemma

Sei Γ_0 ein endlicher partieller m-Eck mit $\operatorname{diam}(\Gamma_0) \geq m+1$ und $\mathcal{T}(\Gamma_0) = \bigcup_{i \in I} \Gamma_i$ der freie Abschluss von Γ_0.

Dann gilt:

(i) $\delta_m(\Gamma_0) = \delta_m(\Gamma_i)$ für alle $i \in I$

(ii) Sei A ein endlicher zusammenhängender Graph mit $\Gamma_0 \subseteq A \subseteq \Gamma_i$, dann gilt: $\delta_m(\Gamma_0) \leq \delta_m(A)$.

<u>Beweis:</u> ÜA

33. Satz

Seien A_0 und B_0 partielle m-Ecke mit $\operatorname{diam}(A_0) \geq m+1$ und $\operatorname{diam}(B_0) \geq m+1$ mit $\mathcal{T}(A_0) \cong \mathcal{T}(B_0)$.

Dann gilt: $\delta_m(A_0) = \delta_m(B_0)$.

<u>Beweis:</u> A: $\delta_m(A_0) > \delta_m(B_0)$.

Da $\mathcal{T}(A_0) \cong \mathcal{T}(B_0)$ via φ, existiert $i \in I$ mit

$$\varphi(A_0) \subseteq B_i$$

$$\Rightarrow \varphi^{-1}(B_i) \supseteq A_0$$

Also: $A_0 \subseteq \underbrace{\varphi^{-1}(B_i)}_{\text{zusam. endlicher Graph}} \subseteq A_j$ für ein $j \in I$.

$$\overset{\text{Lemma 32}}{\Rightarrow} \quad \delta_m(A_0) \leq \delta_m(\varphi^{-1}(B_i)).$$

Weiter gilt:

$$\delta_m(\varphi^{-1}(B_i)) \underset{\varphi \text{ ist Iso}}{=} \delta_m(B_i) \overset{\text{Lemma 32}}{=} \delta_m(B_0) \overset{\text{A:}}{<} \delta_m(A_0) \quad ↯ \text{ zu}$$

□

34. Beispiele

Sei $m \geq 3$. Wir betrachten folgende Graphen:

$\Gamma_0^k :=$  $d(v,w) = k \geq m+1$

Es gilt:

$$\delta_m(\Gamma_0^k) = (m-1)\cdot(k+1+4) - (m-2)\cdot(k+4)$$
$$= mk + m + 4m - k - 1 - 4$$
$$- (mk + 4m - 2k - 8)$$
$$= m + k + 3$$

Also für $k \neq l$ erhalten wir $\mathcal{T}(\Gamma_0^k) \not\cong \mathcal{T}(\Gamma_0^l)$.

35. Bemerkung

Die Klasse der verall. m-Ecke ist mindestens abzählbar unendlich.

<u>Frage:</u> Wann ist $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ dick?

36. Lemma

Sei $\Gamma = (V,E)$ ein verall. m-Eck.

Γ ist dick $\Leftrightarrow$ es existieren Ecken v, w in Γ mit $d(v,w)=1$ und $\# \Gamma_v \geq 3$ und $\# \Gamma_w \geq 3$.

<u>Beweis:</u>

„$\Rightarrow$" ✓

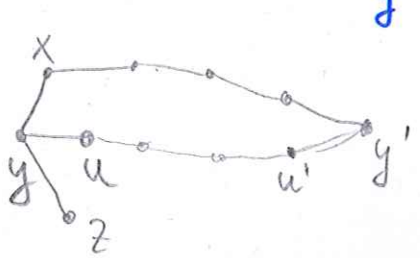
„$\Leftarrow$"

<u>Vorüberlegungen:</u> Für $y, y' \in V$ mit $d(y,y') = m$ gilt: $\Gamma_y \overset{\varphi_{y,y'}}{\cong} \Gamma_{y'}$

$\uparrow$ Bijektion

⊛ <u>Beh:</u> Wenn $\# \Gamma_y \geq 3$ und $x, z \in \Gamma_y \Rightarrow$ ~~...~~ $\Gamma_x \cong \Gamma_z$

<u>Beweis:</u> Sei $u \in \Gamma_y - \{x, z\}$, sei $y' \in V$ mit $d(y,y') = m$ und wir setzen



$$u' = \varphi_{y,y'}(u)$$

Dann ist: $d(z,u')=m$ und $d(u',x)=m$

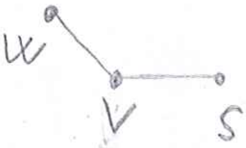
und: $\varphi_{u',z}\circ\varphi_{x,u'}\;\Gamma_x \xrightarrow{\cong} \Gamma_{u'} \xmapsto{\cong} \Gamma_z$. $\square$

Sind nun $v,w\in V$ mit $d(v,w)=1$ und $\#\Gamma_v \geq 3$ und $\#\Gamma_w \geq 3$

so folgt mit ⊛ durch Induktion über $d(v,s)$, dann $\#\Gamma_s \geq 3$ für jeden Eckpunkt s von Γ.

<u>Genauer:</u> Sei $s\in V$ beliebig.

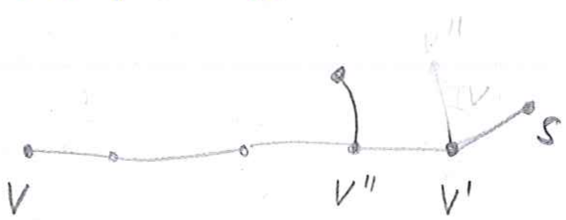
<u>IA:</u> $d(v,s)=1$



$\overset{⊛}{\Rightarrow}$ $\Gamma_w \cong \Gamma_s$, da $\#\Gamma_w \geq 3$ ist auch $\#\Gamma_s \geq 3$.

<u>IS:</u>

$d(v,s)=n+1$



$d(v',s)=1$

Nach IV ist $\#\Gamma_{v'} \geq 3$.

und $\#\Gamma_{v''} \geq 3$

<u>Also:</u> $\#\Gamma_{v'} \geq 3$ und $s, v''\in\Gamma_{v'}$ $\overset{⊛}{\Rightarrow}$ $\Gamma_{v''} \cong \Gamma_s$

Da nach IV $\#\Gamma_{v''} \geq 3$, folgt $\#\Gamma_s \geq 3$. $\square$

37. Bemerkung

Die Klasse der verall. dicken m-Ecke ist mindestens abzählbar unendlich.

Denn: Nach Lemma 36 ist $\mathcal{T}(\Gamma_0^k)$ dick und nach Beispiel 34 gilt für $k \neq l$

$$\mathcal{T}(\Gamma_0^k) \not\cong \mathcal{T}(\Gamma_0^l)$$

<u>Frage:</u> Kann man dicke verall. m-Ecke "schön" klassifizieren?

$\rightsquigarrow$ so allgemein scheint eine Klassifikation unmöglich zu sein („wilde" Konstruktionen)

- wir brauchen zusätzliche Strukturannahmen:

  <u>z.B:</u> Endlichkeit oder Existenz gewisser Automorphismen (Moufang-Bedingung)

38. Satz

Sei: $\Gamma = (V, E)$ ein dickes verall. m-Eck. Seien $v, w \in V$ bel.

Wenn $d(v,w)$ gerade ist (d.h. v und w haben dieselbe Farbe), dann gilt: $\Gamma_v \cong \Gamma_w$.

Wenn m ungerade ist, dann gilt für alle $v, w \in V$:

$$\Gamma_v \cong \Gamma_w.$$

<u>Beweis:</u> $\boxed{\text{ÜA}}$

39. Definition

Sei $\Gamma = (V = V_i \cup V_j, E)$ ein verall. dickes m-Eck.

Γ hat Parameter (s,t), wenn für $v \in V_i$ und $w \in V_j$ bel.

gilt: $\# \Gamma_v = s+1$ und $\# \Gamma_w = t+1$.

$(s,t \in \mathbb{N}_{\geq 2} \cup \{\infty\})$.

40. Theorem (Feit + Higman '64)

Sei $\Gamma = (V,E)$ ein endliches dickes verall. m-Eck mit Parameter (s,t).

Dann ist $m = 2, 3, 4, 6, 8$.

Falls $m=4$, dann $\frac{st \cdot (st+1)}{s+t} \in \mathbb{N}$

Falls $m=6$, dann $st = k^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Falls $m=8$, dann $2 \cdot st = k^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$.

Higman '75

Wenn $m=4$ oder 8, dann $s \leq t^2$ und $t \leq s^2$.

Haemers '79

Wenn $m=6$, dann $s \leq t^3$ und $t \leq s^3$.

— ohne Beweis —