zu „$\Leftarrow$": Sei $\# W < \infty$. Wir müssen zeigen, dass B positiv definit ist.

1. Schritt: Wir betrachten das Radikal der Bilinearform B:

$$V^{\perp} := \{ v \in V \mid B(v, V) = 0 \} = \{ v \in V \mid B(v, b_i) = 0 \text{ für } i = 1, \dots, \underset{\#I}{\underset{\shortparallel}{n}} \}$$

• $V^{\perp}$ ist Φ-invariant, d.h. $\Phi(W)(V^{\perp}) = V^{\perp}$.

Denn: sei $w \in W$, $v \in V^{\perp}$ bel.

Dann gilt für $i \in I$ bel: $B(\Phi(w)(v), b_i)$

$$\overset{B \text{ ist } W\text{-invariant}}{=} B(v, \Phi(w^{-1})(b_i))$$

$$= 0$$

• Sei $U \subsetneq V$ ein Φ-invarianter Unterraum. Dann gilt:

$$U \subseteq V^{\perp}.$$

Beweis: Wir definieren

$I_1 := \{ i \in I \mid b_i \in U \}$ und $I_2 := \{ i \in I \mid b_i \notin U \}$

Es gilt: $I = I_1 \cup I_2$ mit $I_2 \neq \emptyset$, da $U \neq V$.

Beh: $I_1 = \emptyset$

A: nicht, dann gibt es $i_1 \in I_1$ und $i_2 \in I_2$ so, dass die Ecken i_1 und i_2 im Coxetergraphen durch eine Kante verbunden sind (Irreduzibilität von (W, I)),

d.h. $B(b_{i_1}, b_{i_2}) \neq 0$.

Da U ein Φ-invarianter UVR ist, gilt:

$$\Phi(i_2)(b_{i_1}) = \sigma_{i_2}(b_{i_1}) = b_{i_1} - 2 \cdot B(b_{i_1}, b_{i_2}) \cdot b_{i_2} \in U$$

$$\Rightarrow 2 \cdot B(b_{i_1}, b_{i_2}) \cdot b_{i_2} \in U$$

$$\Rightarrow b_{i_2} \in U \quad ⚡$$

Es gilt also: $I = I_2$.

Sei nun $u \in U$ bel. Dann gilt für $i \in I$ bel:

$$\sigma_i(u) = u - 2 \cdot B(u, b_i) b_i$$

$$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot B(u, b_i) \underbrace{b_i}_{\notin U} = u - \sigma_i(u) \in U$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cdot B(u, b_i) = 0$$

Da $i \in I$ bel., folgt: $u \in V^{\perp}$. □

<u>2. Schritt:</u> z.z: $V^{\perp} = \{0\}$

A: nicht, dann: $\{0\} \neq V^{\perp} \underset{\uparrow}{\subsetneq} V$

denn $B(b_i, b_i) = 1$, also $b_i \notin V^{\perp}$.

Nach Schritt 1 wissen wir, dass $V^{\perp}$ Φ-invariant ist. Nach dem Satz von Maschke 2.39 ex. ein Φ-inv. Unterraum $U \subseteq V$ mit $V^{\perp} \oplus U = V$. Es gilt aber nach Schritt 1:

$U \subseteq V^{\perp}$.

Folglich: $V^{\perp} \oplus U \neq V$ ↯.

<u>3. Schritt:</u> Φ ist eine irreduzible Darstellung.

<u>Denn:</u> Sei $U \subsetneq V$ ein Φ-inv. Unterraum. Dann gilt nach Schritt 1:

$U \subseteq V^{\perp} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Schritt 2}}}{=} \{0\}$. Also $U = \{0\}$.

<u>4. Schritt:</u> Sei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $V \cong \mathbb{R}^n$.

Wir definieren: $\tilde{B}: V \times V \to \mathbb{R}$

$$(v_1, v_2) \longmapsto \frac{1}{|W|} \sum_{w \in W} \langle w(v_1), w(v_2) \rangle$$

- $\tilde{B}$ ist W-invariant und positiv definit.

5. Schritt: Es ex. $c \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $B = c \cdot \tilde{B}$

Beweis:

Wir definieren: $f: V \to V^*$, $x \mapsto B(x,-)$ $\qquad \tilde{f}: V \to V^*$, $x \mapsto \tilde{B}(x,-)$

$f, \tilde{f}$ sind Isomorphismen, da B und $\tilde{B}$ nicht ausgeartet sind und $\dim(V) < \infty$.

Weiter definieren wir $g := \tilde{f}^{-1} \circ f : V \xrightarrow{\cong} V$

Seien nun $x, y \in V$ bel. Es gilt:

(*) $B(x,y) = f(x)(y) = \tilde{f} \circ g(x)(y) = \tilde{f}(g(x)(y)) = \tilde{B}(g(x), y)$

Z.z: $g = c \cdot id$. [Damit folgt dann: $B(x,y) = c \cdot \tilde{B}(x,y)$]

Seien wieder $x, y \in V$ bel. Dann gilt:

$$\tilde{B}(g(\omega(x)), y) \overset{(*)}{=} B(\omega(x), y) \overset{B \text{ ist W-inv.}}{=} B(x, \omega^{-1}(y))$$

$$\overset{(*)}{=} \tilde{B}(g(x), \omega^{-1}(y))$$

$$\underset{\text{W-inv.}}{\overset{\tilde{B} \text{ ist}}{=}} \tilde{B}(\omega(g(x)), y)$$

$$\Rightarrow \tilde{B}(g(\omega(x)) - \omega(g(x)), y) = 0$$

y bel.
$\Rightarrow$ $\boxed{g(\omega(x)) = \omega(g(x))}$ (**)
$\tilde{B}$ nicht ausgeartet, d.h. $V^\perp = \{0\}$

Nun betrachten wir: $\Phi(\underline{1})(\underline{b_1}) = \sigma_{\underline{1}}(b_1) = -b_1$

Es gilt:

$$\sigma_1 \circ g(b_1) \overset{\circledast\circledast}{=} g(\sigma_1(b_1)) = g(-b_1) = -g(b_1)$$

Also wird der Vektor $g(b_1) \neq 0$ auf $-g(b_1)$ geschickt.

Es $\exists$ $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ mit $g(b_1) = c \cdot b_1$ (σ_1 ist eine abst. Spiegelung)

$\Rightarrow$ $b_1 \in \underbrace{\ker(g - c \cdot id)}_{\Phi\text{- invariant (nachrechnen)}}$

Φ-irreduzibel
$\Rightarrow$ $\ker(g - c \cdot id) = V$

$\Rightarrow$ $g = c \cdot id_V$.

Es gilt also: $B = c \cdot \tilde{B}$ für ein $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Weiter ist $c \in \mathbb{R}_{>0}$, da $B(b_1, b_1) = 1 = c \cdot \underbrace{\tilde{B}(b_1, b_1)}_{>0}$.

□

6. Schritt: Da $\tilde{B}$ positiv definit ist und $c > 0$, ist auch B positiv definit.

□

Kurze Wiederholung:

58. Theorem:

Sei (W, I) ein irr. Coxetersystem und $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W bzgl. der Bilinearform B. Folgende Aussagen sind äquivalent:

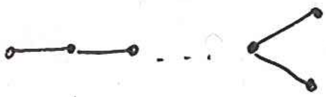
(i) B ist positiv definit

Theorem 2.23: (ii) W endlich

(iii) Der Coxetergraph Γ von (W, I) ist vom Typ:

A_n  (n- Knoten)

$B_n = C_n$ 

D_n 

E_6 

E_7 

E_8 

F_4 

G_2 

H_3 

H_4 

$I_2(m)$ 

$m \in \{5\} \cup \mathbb{N}_{\geq 7}$

59. Definition

Seien Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ zwei Coxetergraphen mit Eckenmengen I bzw. $\tilde{I}$ und Kantenbeschriftungen (m_{ij}) bzw. $(\tilde{m}_{ij})$.

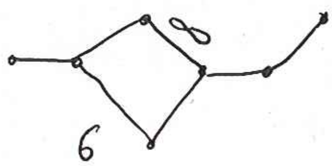
$\tilde{\Gamma}$ heißt <u>Untergraph von Γ</u>, wenn gilt:

(i) $\tilde{I} \subseteq I$

(ii) $\tilde{m}_{ij} \leq m_{ij}$ für $i,j \in \tilde{I}$.

Notation: $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma$.

60. Beispiel

$\tilde{\Gamma}$  $\leq$ Γ 

61. Lemma

Seien $\tilde{\Gamma} \leq \Gamma$ Coxetergraphen und $\tilde{B}$ bzw. B die zug. Bilinearformen auf $\tilde{V}$ bzw. V $(\tilde{V} \subseteq V)$.

Sei $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \tilde{V}$ mit $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, n$.

Dann gilt: $B(\lambda,\lambda) \leq \tilde{B}(\lambda,\lambda)$.

Insbesondere: Ist $\lambda \neq 0$ und es gilt $\tilde{B}(\lambda,\lambda) \leq 0$, so ist B nicht positiv definit.

<u>Beweis:</u> $\tilde{B}(\lambda,\lambda) - B(\lambda,\lambda) = \sum_{i,j \in I} \left(\tilde{B}(b_i,b_j) - B(b_i,b_j) \right)$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{i,j\in I \\ i\neq j \\ m_{ij}\neq\infty}} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\left(-\cos\frac{\pi}{\tilde{m}_{ij}} + \cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right)}_{\geq 0 \ (*)}}_{\geq 0} + \sum_{\substack{i,j\in I \\ i\neq j \\ m_{ij}=\infty}} \lambda_i \lambda_j \underbrace{\left(\tilde{B}(b_i,b_j) + 1\right)}_{\geq 0 \text{ da } \tilde{B}(b_i,b_j) \in [-1,0]}$$

zu ⊛: $\tilde{m}_{ij} \leq m_{ij}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{m_{ij}} \leq \frac{\pi}{\tilde{m}_{ij}}$$

cos ist auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ streng monoton fallend $\Rightarrow$ $\cos\frac{\pi}{m_{ij}} \geq \cos\frac{\pi}{\tilde{m}_{ij}}$

□

Beweis vom Theorem 2.23:

„$\Leftarrow$" $\boxed{\text{ÜA}}$ Gram-Matrix von B berechnen

$\rightsquigarrow$ Hauptminoren berechnen ✓

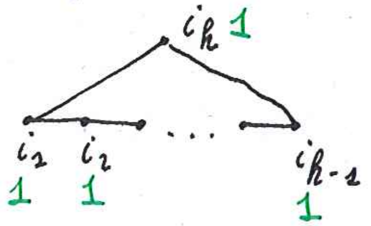
„$\Rightarrow$" Struktur von Γ

- Γ hat keine Kanten die mit ∞ beschriftet sind.

  A: doch, dann $\underset{\substack{\cong \\ D_\infty}}{W_{\{i_1,i_2\}}} \leq W$ ↯ zu W ist endlich

- Γ ist ein Baum

  A: nicht, dann betrachten wir den Untergraphen

$\tilde{\Gamma}$ 

Wir definieren $\lambda = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_{i_k}$

Dann gilt: $\tilde{B}(\lambda,\lambda) = 0$

$\overset{\text{Lemma 61}}{\Longrightarrow}$ B ist nicht positiv definit ↯.

$\boxed{\lambda := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \cdot b_{ij}}$

Γ ist ein Baum

ohne Verzweigungspunkt

- alle Kanten sind unbeschriftet → $\boxed{A_n}$
- genau eine Kante ist beschriftet

$\sqrt{2}\ \ 2 \overset{4}{—} \cdots 2 \overset{4}{—} \sqrt{2}$

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\sqrt{2} \overset{4}{—} \sqrt{2}$

$1\ \ 2 \overset{6}{—} \sqrt{3}$

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4 \overset{5}{—} 2\cdot\tau$

$\tilde{B}(\lambda,\lambda) < 0$

$2 \overset{5}{—} 4\ \ 2\tau\ \ \tau$

$\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\tilde{B}(\lambda,\lambda) < 0$

$\boxed{B_n, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)}$

mit genau einem Verzweigungspunkt

$\tilde{B}(\lambda,\lambda) = 0$

$2, 1, 2\ \ 2 \cdots 2\ \ 2, 1, 1$

Der Verzweigungspunkt hat Valenz 3.

$1, 1, 2, 1, 1$

Alle Kanten sind unbeschriftet

$1, 1, 2\ \ 2 \cdots 2 \overset{4}{—} \sqrt{2}$

mindestens ein Arm hat Länge 1

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1$; $2\ \ 1$

höchstens ein Arm hat Länge 3

$1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1$; 2

1. Armlänge: 1
2. Armlänge: 1
3. Armlänge: beliebig

→ $\boxed{D_n}$

1. Armlänge: 1
2. Armlänge: 2
3. Armlänge: höchstens 4

$2\ \ 4\ \ 6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1$; 3

$\boxed{E_6, E_7, E_8}$

Man kann via der Bilinearform B viele andere „schöne" Coxetergruppen klassifizieren.

62. Definition
Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem, $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W bzgl. der Bilinearform B.
W heißt eine <u>affine (Euklidische) Coxetergruppe</u>, falls B positiv semidefinit (d.h. $B(v,v) \geq 0 \ \forall v \in V$) aber nicht positiv definit ist.

63. Lemma
Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem. Wenn B positiv semidefinit ist, dann gelten folgende Aussagen:

(i) $V^{\perp} = \{ x \in V \mid B(x,x) = 0 \}$

(ii) Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V^{\perp} - \{0\}$ bel. Dann gilt: $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Insbesondere gilt: $\dim V^{\perp} \leq 1$.

<u>Beweis</u>: später

64. Lemma
Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem und Γ der dazug. Coxetergraph. Wenn B positiv semidefinit ist, dann ist die Bilinearform $\tilde{B}$ von jedem echten Untergraphen $\tilde{\Gamma} \subsetneqq \Gamma$ positiv definit.

<u>Beweis</u>: später

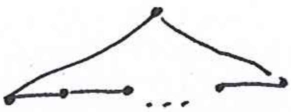
65. Theorem (Klassifikation der irr. affinen Coxetergruppen)

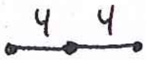
Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) B ist positiv semidefinit aber nicht positiv definit

(ii) (W,I) gehört zu einem der folgenden Coxetergraphen:

$\tilde{A}_1$ 

$\tilde{A}_n$ $(n \geq 2)$  $(n+1)$-Ecken

$\tilde{B}_2 = \tilde{C}_2$ 

$\tilde{B}_n$ $(n \geq 3)$  $(n+1)$-Ecken

$\tilde{C}_n$ $(n \geq 3)$  $(n+1)$-Ecken

$\tilde{D}_n$ $(n \geq 4)$  $(n+1)$-Ecken

$\tilde{E}_6$ 

$\tilde{E}_7$ 

$\tilde{E}_8$ 

$\tilde{F}_4$ 

$\tilde{G}_2$ 

Beweisidee: Lemma 64 + endliche Coxetergruppen

Bemerkungen:

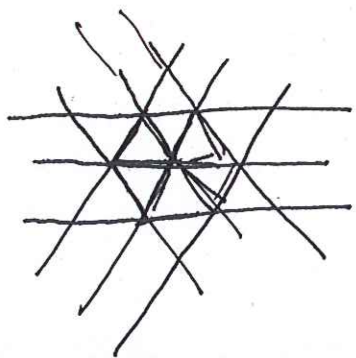
- Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem und $\Phi: W \to SL(V)$ die geom. Darstellung.
  Wir def. $T := \{ wiw^{-1} \mid w \in W, i \in I \}$.
  Dann ist $\Phi(wiw^{-1})$ eine abstrakte Spiegelung für alle $w \in W, i \in I$.
  Wir bezeichnen mit $H|_{\Phi(wiw^{-1})}$ die dazug. Hyperebene.

- Endliche Coxetergruppen nennt man auch <u>sphärisch</u>, denn
  $\Phi: W \hookrightarrow O(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, die Hyperebenen $H|_{\Phi(wiw^{-1})} \cap \mathbb{S}^{n-1}$ ergeben eine Triangulierung der Sphäre.

- Affine (Euklidische) Coxetergruppen:
  $\Phi: W \to SL(\mathbb{R}^n) \overset{\text{induziert}}{\rightsquigarrow} \Phi': W \to Aff(\mathbb{R}^{n-1})$
  $\rightsquigarrow$ die affinen Hyperebenen $H|_{\Phi'(wiw^{-1})}$ ergeben eine Triangulierung von $\mathbb{R}^{n-1}$

<u>z.B:</u> $\tilde{A}_1$

$\tilde{A}_2$



Kurze Wiederholung:

Zwei wichtige Klassen von irr. Coxetersystemen:

endliche (sphärische) Coxetergruppen

($\Leftrightarrow$ B ist positiv definit)

Klassifikation via Graphen

(Coxetergraph ist ein Baum mit höchstens einem Verzweigungspunkt mit Valenz 3 + weitere Eigenschaften)

A_n 

B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, $I_2(m)$

affine (Euklidische) Coxetergruppen

($:\Leftrightarrow$ B ist pos. semidefinit aber nicht positiv definit)

Klassifikation via Graphen

(Beweisidee: Klassifikation von endlichen Coxetergruppen + Lemma 64

(Γ positiv semidefinit $\Rightarrow \tilde{\Gamma} \subsetneqq \Gamma$ ist positiv definit)

d.h. wir dürfen bei einer endlichen Coxetergruppe genau einen Knoten hinzufügen)

$\tilde{A}_1$ 

$\tilde{A}_n$ 

$\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_n$, $\tilde{C}_n$, $\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, $\tilde{F}_4$, $\tilde{G}_2$.

63. Lemma

Sei (W,I) ein irr. Coxetersystem. Wenn B positiv semidefinit ist, dann gelten folgende Aussagen:

(i) $V^\perp = \{x \in V \mid B(x,x) = 0\}$

(ii) Sei $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V^\perp - \{0\}$ bel. Dann gilt: $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Insbesondere gilt: $\dim V^\perp \leq 1$.

Beweis:

zu (i): Sei A die Gram-Matrix von B bzgl. $b_1, \dots, b_n$. Also

$$A = (B(b_i, b_j))_{i,j}$$

$\circledast$ $V \cong \mathbb{R}^n$, $b_i \mapsto e_i$

Dann gilt: $V^\perp \overset{\circledast}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$

Wir definieren $N := \{v \in V \mid B(v,v) = 0\} \overset{\circledast}{=} \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^t A x = 0\}$

Es gilt: $V^\perp \subseteq N$ ✓

Z.z: $N \subseteq V^\perp$

A ist symmetrisch und positiv semidefinit, folglich

$\exists$ $D := \mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$ und eine orthogonale Matrix P mit

$$D = P^t A P \quad \text{und} \quad d_i \geq 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Hilfsbehauptung: Sei $y \in \mathbb{R}^n$ bel. Wenn $y^t D y = 0 \Rightarrow Dy = 0$.

Beweis: $0 = y^t D y = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{d_i}_{\geq 0} \underbrace{y_i^2}_{\geq 0} \Rightarrow$ für jedes i gilt: $d_i = 0$ oder $y_i = 0$

Also: $Dy = \sum_{i=1}^{n} d_i y_i = 0$.

Sei nun $x \in N$ bel. Es gilt also: $x^t A x = 0$ <u>z.z:</u> $Ax = 0$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \exists\, y \in \mathbb{R}^n \text{ mit } Py = x}}{Ax = APy} \underset{\substack{\uparrow \\ AP = PD}}{=} PDy \overset{Dy=0}{=} P(0) = 0.$$

$$y^t D y = x^t \underbrace{PDP^t}_{= A} x = x^t A x = 0 \overset{\text{Hilfsbeh.}}{\Longrightarrow} Dy = 0$$

zu (ii): Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in V^\perp - \{0\}$ bel.

Wir zeigen zuerst, dass $w := \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| b_i \in V^\perp$.

Es gilt:

$$0 \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ ist positiv semidefinit}}}{\leq} B(w,w) \leq B(v,v) = 0$$

$$|\lambda_i||\lambda_j| \underbrace{B(b_i, b_j)}_{\leq 0} \leq \lambda_i \lambda_j \underbrace{B(b_i, b_j)}_{\leq 0} \quad i \neq j$$

$\Rightarrow B(w,w) = 0 \overset{(i)}{\Rightarrow} w \in V^\perp.$

<u>z.z:</u> $\lambda_i \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Wir definieren: $\underset{\neq \emptyset}{J} := \{ j \in \{1, \dots, n\} \mid \lambda_j \neq 0 \}$ und $\tilde{J} := \{1, \dots, n\} - J$

A: $\tilde{J} \neq \emptyset$

Dann: Für $i \in \tilde{J}$ gilt:

$$0 \underset{\text{da } w \in V^\perp}{=} B(w, b_i) = \sum_{j \in J} \underbrace{|\lambda_j|}_{>0} \underbrace{B(b_i, b_j)}_{\leq 0}$$

$\Rightarrow \quad B(b_i, b_j) = 0$ für alle $j \in J$

Wir erhalten: $\quad B(b_i, b_j) = 0$ für alle $i \in \tilde{J}$ und $j \in J$

$\Leftrightarrow \quad m_{ij} = 2$ für all $i \in \tilde{J}$ und $j \in J$

$\Rightarrow \quad \Gamma$ ist nicht irreduzibel. $\lightning$.

Es gilt: $\dim V^\perp \leq 1$ (nachrechnen). $\square$

Nun können wir Lemma 64 beweisen:

64. Lemma

Sei (W, I) ein irr. Coxetersystem und Γ der dazug. Coxetergraph. Wenn B positiv semidefinit ist, dann ist die Bilinearform $\tilde{B}$ von jedem echten Untergraphen $\tilde{\Gamma} \subsetneq \Gamma$ positiv definit.

Beweis: A: nicht, dann ex. $\tilde{\Gamma} \subsetneq \Gamma$ s.d. die dazug. Bilinearform $\tilde{B}$ nicht positiv definit ist, d.h. es existiert

$$v = \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \lambda_i b_i \in \tilde{V} \leq V, \; v \neq 0 \quad \text{mit} \quad \tilde{B}(v,v) \leq 0.$$

Wir definieren $\quad w := \sum_{i=1}^{\tilde{n}} |\lambda_i| \, b_i$

Es gilt:

$$0 \le B(w,w) \overset{\text{Lemma 61}}{\le} \tilde{B}(w,w)$$

B ist positiv semidefinit

$$= \sum_{i,j} |\lambda_i||\lambda_j| \tilde{B}(b_i,b_j)$$

$$= \sum_{i=j} |\lambda_i||\lambda_j| \underbrace{\tilde{B}(b_i,b_j)}_{=1} + \sum_{i\neq j} |\lambda_i||\lambda_j| \underbrace{\tilde{B}(b_i,b_j)}_{\le 0}$$

$$\le \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \tilde{B}(b_i,b_j)$$

$$= \tilde{B}(v,v) \le 0 .$$

$\rightsquigarrow$ überall Gleichheit

Also: • $B(w,w)=0 \overset{\text{Lemma 63}}{\Longrightarrow} w \in V^{\perp} \overset{\text{Lemma 63}}{\Longrightarrow} \lambda_i \neq 0$ für alle $i=1,\dots,n$

$\Rightarrow$ Eckenmenge von $\tilde{\Gamma}$ = Eckenmenge von Γ

• $B(w,w) = \tilde{B}(w,w) \Rightarrow \tilde{m}_{ij} = m_{ij} \;\forall\, i,j$

$\Rightarrow \tilde{\Gamma} = \Gamma$ ↯

$\square$

66. Definition

Sei G eine Gruppe und $I \subseteq G$ ein Erzeugendensystem aus Involutionen (d.h. für jedes $i \in I$ gilt $i^2 = 1 \neq i$).

Betrachte die beiden folgenden Bedingungen:

(D) „Deletion condition"

Ist $i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ und gilt $l_I(w) < q$, so gibt es $1 \leq r < s \leq q$ mit

$$w = i_1 \dots \underbrace{\widehat{i_r} \dots \widehat{i_s}}_{\text{weglassen}} \dots i_q$$

(E) „Exchange condition"

Ist $i, i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ und gilt $l_I(w) = q$, so ist entweder $l(wi) = l(w) + 1$ oder

$$w = i_1 \dots \widehat{i_r} \dots i_q i \quad , 1 \leq r \leq q$$

67. Satz

Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe und $I \subseteq \mathcal{G}$ ein Erzeugendensystem aus Involutionen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) (D) gilt in $\mathcal{G}$

(ii) (E) gilt in $\mathcal{G}$

<u>Beweis:</u>

(D) $\Rightarrow$ (E)

Seien $i, i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ und $l_I(w) = q$.

Weiter gelte $l(wi) \neq l(w)+1 = q+1$. Wir definieren $i =: i_{q+1}$

Dann: $i_1 \dots i_q i \overset{(D)}{=} i_1 \dots \hat{i_r} \dots \hat{i_s} \dots i_q i_{q+1}$ $\quad 1 \leq r < s \leq q+1$

[Da $l_I(w) = q$ folgt $s = q+1$]

Also: $\underbrace{i_1 \dots i_q}_{w} \underbrace{i_{q+1}}_{i} = i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_q \widehat{i_{q+1}}$

$\Rightarrow$ ~~xxx~~ $wi = i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_q$

$\Rightarrow$ $w = i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_q i$.

(E) $\Rightarrow$ (D)

Seien $i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ und es gelte $l_I(w) < q$.

Es ex. $j \in \{1, \dots, q\}$ mit $l(i_1 \dots i_j) = j$ aber
$l(i_1 \dots i_j i_{j+1}) < j+1$

Wir wenden die Bedingung (E) auf $i_1 \dots i_j$ an:

$i_1 . \hat{i_r} .. i_j \cancel{i_{j+1}} = i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_j i_{j+1}$, $1 \leq r \leq j$.

$\Rightarrow$ $w = i_1 \dots i_r \dots i_j i_{j+1} \dots i_q = i_1 \dots \hat{i_r} \dots i_j \widehat{i_{j+1} i_{j+1}} \dots i_q$.

$\square$

Unser nächstes Ziel ist es zu zeigen, dass in Coxetergruppen die Bedingungen (D) und (E) gelten.

Dafür brauchen wir folgende Lemmata:

68. Lemma

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $\tilde{\Phi}^+$ die Menge der positiven Wurzeln von W. ($\tilde{\Phi}^+ = \{\omega(b_i) \mid \omega \in W, i \in I\} \cap \mathbb{R}_{\geq 0} b_1 + \ldots + \mathbb{R}_{\geq 0} b_n$).

Für $i \in I$ bel. gilt:

$$\sigma_i\left(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}\right) = \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}.$$

Beweis:

Sei $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \in \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}$ bel.
$\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

- v ist kein Vielfaches von b_i, denn:
  $B(v,v) = 1$ und $\tilde{\Phi}^+ \cap \mathbb{R} b_i = \{b_i\}$

- Da $v \neq b_i$ gibt es mindestens einen strikt positiven Koeffizienten $\lambda_j > 0$ für ein $i \neq j$.

- Wir betrachten: $\sigma_i(v)$ und v

$$\sigma_i(v) = v - 2 \cdot B(v, b_i)\, b_i$$

$\sigma_i(v)$ und v unterscheiden sich nur in den Koeffizienten b_i.

Die Koeffizienten bei b_j stimmen also überein.

Jede Wurzel ist entweder positiv oder negativ und da $\lambda_j > 0$ ist, folgt $\sigma_i(v) \in \tilde{\Phi}^+$ und $\sigma_i(v) \neq b_i$,

denn: A: $\sigma_i(v) = b_i \Rightarrow v = \sigma_i(b_i) = -b_i$ ↯.

Also: $\sigma_i(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}) \subseteq \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}$

$\overset{\sigma_i}{\Rightarrow} \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\} \subseteq \sigma_i(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\})$

Insgesamt erhalten wir: $\sigma_i(\tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}) = \tilde{\Phi}^+ - \{b_i\}$ $\square$

Sei $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W.

Wir definieren $T := \{ w i w^{-1} \mid w \in W, i \in I \}$.

Jedes Element aus T ist eine abstrakte Spiegelung unter Φ.

Es gilt:

$$w i w^{-1}(v) \overset{\boxed{\text{üA}}}{=} v - 2 \cdot B(v, w(b_i))\, w(b_i) =: \sigma_{w(b_i)}$$

Für jede Wurzel $\alpha \in \tilde{\Phi}$ erhalten wir also eine abstrakte Spiegelung.

6.8 Lemma

Wenn $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}$ und $w(\alpha) = \beta$ für ein $w \in W$.

Dann gilt: $w \sigma_\alpha w^{-1} = \sigma_\beta$.

Beweis: $\boxed{\text{üA}}$

70. Satz

Sei (W, I) ein Coxetersystem. Dann gilt die Bedingung (E).

Beweis:

Seien $i, i_1, \dots, i_q \in I$ und $w = i_1 \dots i_q$ mit $\ell(w) = q$.

Weiter gelte: $\ell(wi) \neq \ell(w) + 1$

Also: $\ell(wi) = \ell(w) - 1 \Rightarrow w(b_i) < 0$

Es ex. $1 \leq r \leq q$ s.d. $i_{r+1} \dots i_q (b_i) > 0$

$i_r i_{r+1} \dots i_q (b_i) < 0$

Lemma 68
$\Rightarrow$ $i_{r+1} \dots i_q (b_i) = b_{i_r}$

Lemma 69
$\Rightarrow$ $i_{r+1} \dots i_q \, i \, i_q \dots i_{r+1} = i_r$

Insgesamt erhalten wir:

$$w = i_1 \dots \underline{i_r} i_{r+1} \dots i_q = i_1 \dots i_{r-1} (i_{r+1} \dots i_q \, i \, i_q \dots i_{r+1}) i_{r+1} \dots i_q$$

$$= i_1 \dots i_{r-1} \widehat{i_r} i_{r+1} \dots i_q \, i.$$

$\square$

71. Theorem (Charakterisierung von Coxetergruppen via (D) bzw. (E))

Sei G eine Gruppe und $I \subseteq G$ ein Erzeugendensystem aus Involutionen. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent:

(i) (G, I) ist ein Coxetersystem

(ii) (E) gilt in G.

(iii) (D) gilt in G.

– (ii) ⇒ (i) – ohne Beweis

72. Satz

Sei (W, I) ein Coxetersystem und $J, K \subseteq I$ bel. Dann gelten folgende Aussagen:

(i) $W_J = W_K \Leftrightarrow J = K$

(ii) $W_{J \cap K} = W_J \cap W_K$

(iii) $W_J \subseteq W_K \Leftrightarrow J \subseteq K$

Beweis: $\boxed{\text{üA}}$