§2 Coxetergruppen (abstrakte Spiegelungsgruppen)

1. Wiederholung (Spiegelungsgruppen)

Sei $V = \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionaler Vektorraum. Eine <u>Hyperebene</u> H in V ist ein Unterraum der Dimension $d-1$.

Die <u>Spiegelung an der Hyperebene H</u> ist die lineare Abbildung

$$s_H : V \to V \text{ mit den Eigenschaften}$$

(i) $s_H|_H = id$

(ii) $s_H|_{H^\perp} = -id$

$$H^\perp = \{v \in V \mid \langle v, H \rangle = 0\}$$

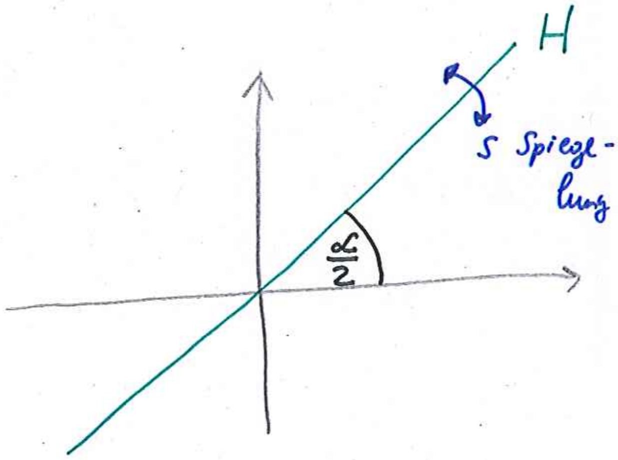
$\uparrow$ Standardskalarprodukt

2. Beispiel:

$s: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\binom{1}{0} \mapsto \binom{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad \alpha \in [0, \pi]$

$\binom{0}{1} \mapsto \binom{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$



3. Definition:

Sei $W \subseteq GL(\mathbb{R}^d)$ eine Untergruppe. W heißt <u>Spiegelungsgruppe</u>, falls

$$W = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H} \rangle$$

$\mathcal{H}$ ist eine Menge von Hyperebenen in $\mathbb{R}^d$.

4. Beispiele:

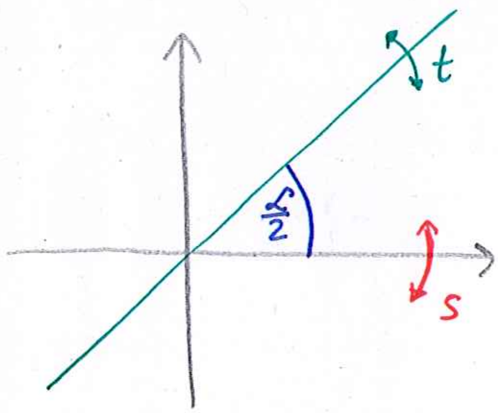
(i) $\#\mathcal{H} = 1$, dann $W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

(ii) $\#\mathcal{H} = 2$

<u>z.B.:</u> $V = \mathbb{R}^2$ $\quad s := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an der x-Achse

$t := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha \in\,]0,\pi]$ bel.

Spiegelung an der Geraden, die einen Winkel $\frac{\alpha}{2}$ zur x-Achse hat.



Wir wollen nun die Gruppe $\langle s,t \rangle \leq GL(\mathbb{R}^2)$ näher untersuchen.

Betrachte das Produkt:

$$t \circ s = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$ Drehung um den Winkel α.

Ist also $\alpha = \frac{2\pi}{m}$, so hat ts Ordnung m.

Wenn $\alpha = \frac{2\pi}{m}$ ist, dann definieren wir

$$D_m := \langle s,t \rangle \leq GL(\mathbb{R}^2)$$

Abstrakte Sicht auf Spiegelungsgruppen, die von zwei Spiegelungen erzeugt sind.

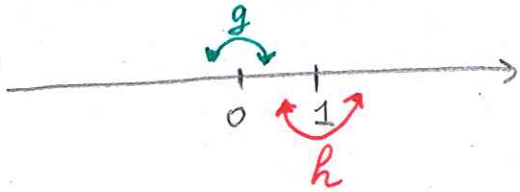
5. **Definition:** Eine Gruppe G heißt <u>Diedergruppe</u>, wenn sie von zwei verschiedenen Involutionen erzeugt wird, d.h.:

$$G = \langle g, h \rangle \quad , \ \mathrm{ord}(g) = \mathrm{ord}(h) = 2 \quad , \ g \neq h.$$

6. **Beispiele:**

- D_m sind Diedergruppen
- Wir def. folgende affine Abbildungen:

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$\quad t \mapsto -t \qquad\qquad\quad t \mapsto 2-t$$



Dann gilt: $\mathrm{ord}(g) = 2$

$\mathrm{ord}(h) = 2$

$\mathrm{ord}(gh) = \infty$, denn $g \circ h(t) = g(2-t)$

$= -(2-t)$

$= t-2$

Charakterisierung von Diedergruppen

7. **Satz:**
Sei G eine Diedergruppe, die von den Involutionen $g, h \in G$ erzeugt wird. Sei $m := \mathrm{ord}(gh)$, $R := \langle gh \rangle$. Dann gilt:

(i) $R \trianglelefteq G$; $G = \langle g \rangle \cdot R$; $\langle g \rangle \cap R = \{1\}$
(d.h. $G = \langle g \rangle \ltimes R$ inneres semidirektes Produkt)

(ii) $G \cong \begin{cases} C_2 \ltimes \mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}} , & m < \infty , \\ C_2 \ltimes \mathbb{Z} , & m = \infty \end{cases}$ wobei C_2 die zyklische Gruppe der Ordnung 2 ist und $C_2 \to \mathrm{Sym}(\mathbb{Z}/_{m\mathbb{Z}})$
$-1 \longmapsto [k \mapsto -k]$

Beweis:

zu (i) Zuerst zeigen wir, dass R ein Normalteiler in G ist.

Es gilt: $$g(gh)g^{-1} = g^2hg = hg = (gh)^{-1} \in R$$
$$h(gh)h^{-1} = hgh^2 = hg = (gh)^{-1} \in R,$$

also gilt: $R \trianglelefteq G$.

Weiter gilt: $g(gh) = h$, also $G = \langle \{g\}, R \rangle$.

Sei nun $w \in G$ bel. Dann ist $w = gh$ oder $w = h$

$w = gh$ $\quad w = hg$

$w = ghg$ $\quad w = hgh$

$w = ghgh \ldots$ $\quad w = hghg \ldots$

Also ist $G = \langle g \rangle \cdot R$.

Bleibt zu zeigen: $\langle g \rangle \cap R = \{1\}$.

A: $g \in R$, dann $\exists\, k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $g = (gh)^k$

$$\Leftrightarrow 1 = g\underbrace{gh \ldots gh}_{k\text{-mal}}$$

$$\Leftrightarrow 1 = h\underbrace{gh \ldots gh}_{k-1 \text{ mal}}$$

$$\Leftrightarrow h = (gh)^{k-1} \in R.$$

Da R abelsch ist, folgt
$$(gh)^2 = ghgh \overset{\text{abelsch}}{=} g^2h^2 = 1$$

$$\Rightarrow G \overset{h, g \in R}{=} R \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ ↯ da } g \neq h.$$

Insgesamt: $G = \langle g \rangle \ltimes R$.

zu ii) $\boxed{\text{üA}}$ $\square$

8. Bemerkung:

- $D_m \cong C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
- $D_\infty \cong C_2 \ltimes \mathbb{Z}$

geometrische Sicht

algebraische Sicht

(Harold Scott MacDonald Coxeter 1907-2003)

Coxetergruppen sind „gewisse" von Involutionen erzeugte Gruppen.

$\rightsquigarrow$ abstrakt definiert: via Erzeuger + Relatoren

Kurze Wiederholung:

Sei $V = \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionaler Vektorraum und $H \leq V$ eine Hyperebene.

Die **Spiegelung an der Hyperebene** H ist die folgende lineare Abbildung: $s_H : V \to V$

$$s_H\big|_H = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad s_H\big|_{H^\perp} = -\mathrm{id}$$

Also $s_H(v) = v - \dfrac{2 \cdot \langle v, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle} \cdot \alpha$ wobei $\langle \alpha \rangle = H^\perp$.

Es gilt: (i) $\mathrm{ord}(s_H) = 2$

(ii) $s_H \in O(V) = \{ A \in GL(V) \mid \langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle \ \forall v, w \in V \}$

Definition:

Sei $W \leq GL(V)$ eine Untergruppe. W heißt Spiegelungsgruppe, falls

$W = \langle s_H \mid H \in \mathcal{H} \rangle$, $\mathcal{H}$ ist eine Menge von Hyperebenen in V.

Bemerkung: W Spiegelungsgruppe $\Rightarrow$ $W \leq \underline{O(V)}$.

- $\# \mathcal{H} = 1 \quad \Rightarrow \quad W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
- $\# \mathcal{H} = 2 \quad \Rightarrow \quad W \cong \begin{cases} C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & , \ \mathrm{ord}(s_{H_1} s_{H_2}) = m \\ C_2 \ltimes \mathbb{Z} & , \ \mathrm{ord}(s_{H_1} s_{H_2}) = \infty \end{cases}$

  $\langle s_{H_1}, s_{H_2} \rangle$

Coxetergruppen sind „gewisse" von Involutionen erzeugte Gruppen. Diese sind zuerst abstrakt definiert:

Erzeuger + Relatoren

9. Erinnerung: freie Gruppen, Präsentierungen von Gruppen

Sei X eine Menge. Die <u>freie Gruppe über X, $F(X)$</u> ist die Menge aller endlichen Folgen (Wörter) $w = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ mit $x_i \in X$, $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ für $1 \leq i \leq n$. Die zugehörige Gruppenmultiplikation ist das Hintereinanderschreiben mit den Rechenregeln $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, dabei bezeichnet 1 das leere Wort, und zwei Wörter sollen äquivalent sein, wenn sie durch Anwenden der Rechenregeln auseinander hervorgehen.

Die freie Gruppe FX hat folgende <u>universelle Eigenschaft:</u>

Ist G eine Gruppe und $l: X \to G$ eine Abbildung, so gibt es genau einen Homomorphismus $F(l): F(X) \to G$, der l fortsetzt, d.h. $F(l)(x) = l(x)$ gilt für alle $x \in X$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "l"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & G \\ F(X) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, F(l)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{aligned} F(l): F(X) &\to G \\ x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} &\mapsto l(x_1)^{\varepsilon_1} \cdot \ldots \cdot l(x_n)^{\varepsilon_n} \end{aligned}$$

10. Präsentierungen von Gruppen

Sei X eine Menge und $R \subseteq F(X)$ eine Teilmenge. Mit $\langle\langle R \rangle\rangle$ bezeichnen wir den <u>normalen Abschluss</u> von R in $F(X)$,

$$\langle\langle R \rangle\rangle = \bigcap \{ N \trianglelefteq F(X) \mid R \subseteq N \}.$$

Man schreibt: $$F(X) / \langle\langle R \rangle\rangle = \langle X \mid R \rangle$$

und nennt $\langle X \mid R \rangle$ eine Präsentierung mit Erzeugern X und Relatoren R definierte Gruppe.

Bemerkung: Streng genommen sind Elemente in $F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle$ Restklassen. Wir schreiben für $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \langle\langle R \rangle\rangle$ trotzdem $x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ und streichen alle Ausdrücke in diesem Wort, die in $\langle\langle R \rangle\rangle$ sind. (*)

Universelle Eigenschaft von $\langle X \mid R \rangle$:

Ist G eine Gruppe und $\lambda: X \to G$ eine Abbildung und wenn für alle $r \in R$ gilt: $F(\lambda)(r) = 1$, so gibt es einen eindeutigen Homomorphismus $\varphi: \langle X \mid R \rangle \to G$ mit $\varphi \circ \pi = F(\lambda)$ wobei $\pi: F(X) \to \langle X \mid R \rangle$ die Projektion ist.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, hook] & G \\
F(X) \arrow[ur, dashed, "\exists!\, F(\lambda)"] \arrow[dr, "\pi"'] & \\
& F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle \arrow[uu, dashed, bend right, "\exists!\, \varphi"']
\end{tikzcd}$$

$$F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle = \langle X \mid R \rangle$$

[Homomorphiesatz: $\langle\langle R \rangle\rangle \subseteq \ker(F(\lambda))$]

11. Bemerkung

Jede Gruppe G läßt sich präsentieren:

Ist $X \subseteq G$ ein Erzeugendensystem für G (z.B.: $G = X$), so wähle $R \subseteq \ker\left(F(X) \xrightarrow[x \mapsto x]{F(\lambda)} G\right)$ mit $\langle\langle R \rangle\rangle = \ker(F(X) \to G)$

(z.B.: $R = \ker(F(X) \to G)$)

Es folgt: $F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle \cong G$

$$F(X)/\langle\langle R \rangle\rangle = \langle X \mid R \rangle$$

12. Beispiele:

(i) $F(\{a\}) \cong \mathbb{Z}$

(ii) $F(X) = \langle X \mid \emptyset \rangle$

(iii) $\langle a \mid a^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

13. Proposition

Sei $G = \langle X \mid R \rangle$, $H = \langle Y \mid S \rangle$ mit $X \cap Y = \emptyset$.

Sei $[X,Y] = \{ [x,y] = xyx^{-1}y^{-1} \mid x \in X, y \in Y \}$ und

$T := R \cup S \cup [X,Y]$.

Dann $G \times H \cong \langle X \cup Y \mid T \rangle$.

<u>Beweis:</u>

Definiere
$$\begin{aligned} \iota : X \cup Y &\to G \times H \quad \text{wie folgt} \\ x &\mapsto (x,1) \\ y &\mapsto (y,1)\,. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Fortsetzung von ι,

$$F(\iota) : F(X \cup Y) \to G \times H\,.$$

Nun wollen wir zeigen, dass für $r \in T$ bel. gilt: $F(\iota)(r) = 1_{G \times H} = (1_G, 1_H)$

Sei $r = a_1 \ldots a_\ell \in T$ $(a_i \in X \cup Y \cup X^{-1} \cup Y^{-1})$ bel.

Falls $r \in R$, dann $F(\iota)(r) = (1,1)$.

Falls $s \in S$, dann $F(\iota)(s) = (1,1)$

Falls $r \in [X,Y]$, dann $r = xyx^{-1}y^{-1}$. Also

$$\begin{aligned} F(\iota)(xyx^{-1}y^{-1}) &= \iota(x)\iota(y)\iota(x)^{-1}\iota(y)^{-1} \\ &= (x,1)(1,y)(x^{-1},1)(y^{-1},1) \\ &= (xx^{-1}, yy^{-1}) \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

Nach der univ. Eigenschaft von $\langle X \cup Y \mid T \rangle$ ex. genau ein Hom. $\varphi : \langle X \cup Y \mid T \rangle$ mit

$$\begin{tikzcd}
F(X \cup Y) \arrow[r, "F(\lambda)"] \arrow[dr, "\pi"'] & G \times H \\
& \langle X \cup Y \mid T \rangle \arrow[u, dashed, "\exists!\, \varphi"']
\end{tikzcd}$$

Weiter ist φ surjektiv, da $F(\lambda)$ surjektiv ist.

Bleibt z.z: $\ker(\varphi) = 1$.

Da $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ in $\langle X \cup Y \mid T \rangle$ für $x \in X$, $y \in Y$, kann jedes Element in $\langle X \cup Y \mid T \rangle$ wie folgt geschrieben werden:

$$w = x_1 x_2 \dots x_n y_1 \dots y_m \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} x_i \in X \cup X^{-1} \\ y_i \in Y \cup Y^{-1} \end{array}$$

Dann $\varphi(w) = (x_1 \dots x_n, y_1, \dots y_m)$.

Sei also $w \in \ker(\varphi)$. Dann $x_1 \dots x_n = 1_G$ und $y_1 \dots y_m = 1_H$

Also $x_1 \dots x_n \in \langle\langle R \rangle\rangle_{F(X)}$
$y_1 \dots y_m \in \langle\langle T \rangle\rangle_{F(Y)}$

Also $\begin{array}{l} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_m \end{array} \in \langle\langle T \rangle\rangle_{F(X \cup Y)}$

Folglich: $x_1 \dots x_n = 1_{\langle X \cup Y \mid T \rangle} = y_1 \dots y_m$. □

14. Proposition

Sei $G = \langle X \mid R \rangle$, $H = \langle Y \mid S \rangle$ mit $X \cap Y = \emptyset$

und $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Weiter sei $T = R \cup S \cup \{ y x y^{-1} (\varphi(y)(x))^{-1} \mid y \in Y, x \in X \}$.

Dann $G \rtimes_\varphi H = \langle X \cup Y \mid T \rangle$.

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$

15. Beispiele

- $C_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \langle a \mid a^2 \rangle$
- $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle b \mid b^m \rangle$
- $D_m \cong C_2 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \langle a, b \mid a^2, b^m, \underbrace{aba^{-1}b}_{= abab} \rangle$

  $\varphi : C_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$

  $-1 \mapsto [k \mapsto -k]$

- $D_m \cong \langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle$

  Denn: $\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle \twoheadrightarrow D_m$

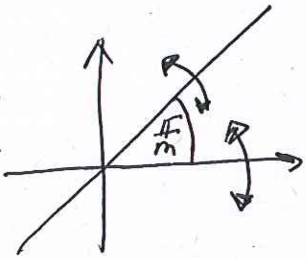
  $s \longmapsto$ Spiegelung an der x-Achse

  $t \longmapsto$ Spiegelung an der Geraden, die einen Winkel $\frac{\pi}{m}$ zur x-Achse hat.

$\Rightarrow s \neq t$ und $\mathrm{ord}(st) = m$

Also ist $\langle s, t \mid s^2, t^2, (st)^m \rangle$ eine Diedergruppe und diese ist ~~ino~~ isomorph zu $C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong D_m$.

Bis jetzt:

$$D_m = \langle$$  $$\rangle \cong C_2 \ltimes \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^m \rangle$$

16. Definition

Sei I eine (endliche) Menge. Eine <u>Coxetermatrix über I</u> ist eine Matrix $m = (m_{ij})_{i,j \in I}$ mit $m_{ij} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ für alle $i,j \in I$, welche $m_{ii} = 1$ und $m_{ij} = m_{ji} \geq 2$ für $i \neq j$ erfüllt.

$$W := \langle I \mid (ij)^{m_{ij}} \text{ für alle } i,j \in I \text{ mit } m_{ij} \neq \infty \rangle$$

ist die zugehörige <u>Coxetergruppe</u>.

Das Paar (W, I) nennt man <u>Coxetersystem</u>, und die Kardinalität $|I|$ heißt <u>Rang</u> von (W, I).

Wir nehmen immer an, dass $\# I < \infty$.

17. Beispiele

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad W = \langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^2, \cancel{(ba)^2} \rangle$

$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

denn: $abab = 1$
$\Leftrightarrow aba = b^{-1} = b$
$\Leftrightarrow ab = ba$
$\Leftrightarrow 1 = baba$.

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & \infty \\ \infty & 1 \end{pmatrix}$ $\quad W = \langle a, b \mid a^2, b^2 \rangle$

$\cong D_\infty$

Die Information, die in einer Coxetermatrix steckt, lässt sich anschaulicher durch den gewichteten Coxetergraphen kodieren:

- die Menge der Ecken ist $\underline{I}$
- zwischen zwei Ecken $i, j \in I$ $(i \neq j)$ gibt es

$$\begin{cases} \text{keine Kante, falls } m_{ij} = 2 & \overset{\bullet}{i} \quad \overset{\bullet}{j} \\ \text{eine mit } m_{ij} \text{ beschriftete Kante, falls } m_{ij} > 2 & \underset{i}{\bullet}\overset{m_{ij}}{\text{———}}\underset{j}{\bullet} \end{cases}$$

wobei Kanten $\bullet\overset{3}{\text{——}}\bullet$ der Einfachheit halber auch als $\bullet\text{——}\bullet$ (ohne Beschriftung) notiert werden.
(Solche Kanten treten in Anwendungen besonders oft auf.)

18. Beispiele

i) $\bullet\overset{\infty}{\text{———}}\bullet \qquad W \cong D_\infty$

ii) $\bullet\text{———}\bullet \qquad W \cong D_3$

iii) $\bullet \qquad \bullet \qquad W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

19. Definition

Ein Coxetersystem $(W, \underline{I})$ heißt <u>irreduzibel</u>, falls der zugehörige Coxetergraph aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht.

Beachte: liegen $i, j \in I$ in verschiedenen Zusammenhangskomponenten des Coxetergraphen, so erfüllen sie $(ij)^2$.

20. Lemma

Sei (W, I) ein Coxetersystem und Γ der zugehörige Coxetergraph. Weiter seien $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ die Zusammenhangskomponenten von Γ.

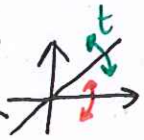
Dann gilt: $W \cong W_1 \times \ldots \times W_k$,

wobei wir mit W_i die Coxetergruppe zu dem Graph Γ_i bezeichnen.

<u>Beweis:</u> Wende Proposition 2.13 an.

$\#$

Kurze Wiederholung:

$D_m = \langle$  $\rangle \cong \underbrace{\langle a, b \mid a^2, b^2, (ab)^m \rangle}$

$\rightsquigarrow$ wir verallgemeinern diese Präsentierung

Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{ij}$

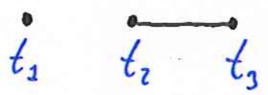
$\updownarrow$ 1:1

Coxetergraph Γ

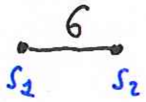
$\to$ Coxetergruppe

$W = \langle I \mid (ij)^{m_{ij}}$ für alle $i,j \in I$ mit $m_{ij} \neq \infty \rangle$

21. Beispiele

(i) $\begin{array}{c|ccc} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \hline t_1 & & & \\ t_2 & & & \\ t_3 & & & \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 

$W \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_3$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ 

$W \cong D_6$

$\boxed{\text{ÜA}}$ Zeige, dass gilt: $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_3 \cong D_6$

Beachte: Eine Coxetergruppe kann verschiedene Coxetersysteme haben, z.B.: $(D_6, \{s_1, s_2\})$

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times D_3, \{t_1, t_2, t_3\})$

$\cong$

D_6

Wenn Gruppen so abstrakt definiert werden (durch Erzeuger + Relatoren) ist es meistens schwer „etwas" über die Gruppe auszusagen.

<u>z.B:</u> Ist $G = \langle a, b \mid ab^2a^{-1}b^3, ba^2b^{-1}a^{-3} \rangle$ eine triviale Gruppe?

– Ja –

Coxetergruppen haben „gutartige" Präsentierungen. Wir werden sehen, dass man über Coxetergruppen <u>viel</u> aussagen kann.

22. Proposition

Sei (W, I) ein Coxetersystem. Es existiert genau ein Epimorphismus $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ mit $\varepsilon(i) = -1 \ \forall \ i \in I$.

Insbesondere hat jedes $i \in I$ Ordnung 2 in W und W ist damit keine triviale Gruppe.

<u>Beweis:</u> Wir definieren
$$\varepsilon': I \to \{\pm 1\} \text{ wie folgt}$$
$$i \longmapsto -1$$

Univ. Eig. von $F(I)$ $\Longrightarrow$ $\exists!$ $\varepsilon'': F(I) \to \{\pm 1\}$ mit $\varepsilon''(i) = \varepsilon'(i)$ für alle $i \in I$.

Seien nun $i, j \in I$ mit $m_{ij} \neq \infty$ bel. Dann:

$$\varepsilon''\left((ij)^{m_{ij}} \right) = \underbrace{(-1)\cdot(-1)\cdot \ldots \cdot(-1)\cdot(-1)}_{2 \cdot m_{ij} - \text{mal}} = 1$$

Univ. Eig von Präsen. $\Longrightarrow$ $\exists!$ $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ mit
$$\begin{tikzcd} F(I) \arrow[rr, "\varepsilon''"] \arrow[dr, "\pi"'] & \circlearrowleft & \{\pm 1\} \\ & W \arrow[ur, "\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

Weiter gilt: $\underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\operatorname{ord}(\varepsilon(i))} \leq \operatorname{ord}(i) \leq 2$, also $\operatorname{ord}(i) = 2$. $\square$

Bemerkung:

Der Gruppenhomomorphismus $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ ist die Verallgemeinerung von sign: $\mathrm{Sym}(n) \to \{\pm 1\}$.

Vorschau: Bausteine aus denen Coxetergruppen zusammengebaut werden, sind irreduzible Coxetersysteme. Unser nächstes Ziel ist es, endliche Coxetergruppen zu klassifizieren.

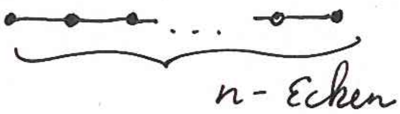
Gesucht sind also alle Coxetergruppen mit $\# W < \infty$.

$\overset{2.20}{\rightsquigarrow}$ alle irreduziblen Coxetersysteme (W, I) mit $\# W < \infty$.

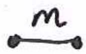
23. Theorem (Coxeter 1934) Klassifikation der irreduziblen endlichen Coxetergruppen.

Gegeben sei ein irreduzibles Coxetersystem (W, I). Sei weiter Γ der zugehörige Coxetergraph. Dann gilt:

$$\# W < \infty \iff \Gamma \text{ ist einer der fol. Graphen}$$

Typ	Coxetergraph
$A_n \ (n \geq 1)$	
$B_n = C_n \ (n \geq 2)$	
$D_n \ (n \geq 4)$	
E_6	
E_7	
E_8	
F_4	
G_2	
H_3	

H_4 

$I_2(m)$ 

$m \in \{5\} \cup \mathbb{N}_{\geq 7}$

<u>Beweisidee:</u>

(i) Wir überlegen uns, dass alle oben nicht aufgelisteten Coxetergraphen einen "verbotenen" Graphen als Untergraphen enthalten (z.B. )

(ii) Die aufgelisteten Graphen sind Coxetergraphen von endlichen Coxetergruppen

Um das Theorem 23 zu beweisen, brauchen wir weitere Methoden:
- Längenfunktion auf W
- Darstellung von W $[W \hookrightarrow GL(V)]$
- ...

Bevor wir uns damit befassen, betrachten wir den Coxetergraphen vom Typ A_n $(n \geq 1)$.

24. Satz

Es gilt: $\mathrm{Sym}(n+1) \cong \langle t_1, t_2, \ldots, t_n \mid t_1^2, \ldots, t_n^2, (t_i t_{i+1})^3 \text{ für } i = 1, \ldots, n-1, (t_i t_j)^2 \text{ für } |i-j| > 1 \rangle$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n:

<u>$n=1$</u> $\quad \langle t_1 \mid t_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $\mathrm{Sym}(2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$n \to n+1$

Definiere

$$\mathcal{G} := \langle t_1, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} \mid \underbrace{t_i^2 \text{ für } i = 1, \dots, n+1, \quad (t_i t_{i+1})^3 \text{ für } i = 1, \dots, n, \quad (t_i t_j)^2 \text{ für } |i-j| > 1}_{=: R} \rangle$$

Wir müssen also zeigen, dass gilt: $\mathrm{Sym}((n+1)+1) \cong \mathcal{G}$.

Wir def. eine Abbildung:

$$\lambda : \{t_1, \dots, t_{n+1}\} \to \mathrm{Sym}(n+2) \quad \text{wie folgt}$$
$$t_i \longmapsto (i, i+1)$$

Univ. Eig.

$$\Longrightarrow \quad \exists!\ \lambda' : F(\{t_1, \dots, t_{n+1}\}) \to \mathrm{Sym}(n+2)$$

mit $\lambda'(t_i) = \lambda(t_i)$ für alle $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Weiter ist λ' surjektiv, da die Transpositionen $(1,2), \dots, (n+1, n+2)$ die Gruppe $\mathrm{Sym}(n+2)$ erzeugen. $\boxed{\text{ÜA } 1.3\,b}$

Sei weiter $r \in R$. Dann rechnet man nach, dass gilt:

$$\lambda'(r) = \mathrm{id}.$$

Univ. Eig.

$\Longrightarrow \quad \exists!\ \lambda'' : \mathcal{G} \twoheadrightarrow \mathrm{Sym}(n+2)$ mit

$$\begin{tikzcd} F(\{t_1, \dots, t_{n+1}\}) \arrow[r, two heads, "\lambda'"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \mathrm{Sym}(n+2) \\ \mathcal{G} \arrow[ur, "\lambda''"'] & \end{tikzcd}$$

<u>Bem:</u> Da λ'' surjektiv ist, folgt: $\#\,\mathrm{Sym}(n+2) \leq \#\,\mathcal{G}$.

Bleibt zu zeigen: λ'' ist injektiv.

Für die Injektivität von λ'' reicht es zu zeigen, dass gilt:

$$|\mathcal{G}| \leq |\mathrm{Sym}(n+2)|.$$

1. Schritt:

Wir betrachten die Untergruppe $H := \langle t_2, \dots, t_{n+1} \rangle \subseteq G$.

Nach IV hat $\mathrm{Sym}(n+1)$ folgende Präsentierung:

$$\left\langle s_1, \dots, s_n \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1^2, \dots, s_n^2 \\ (s_i s_{i+1})^3 \text{ für } i = 1, \dots, n-1 \\ (s_i s_j)^2 \text{ für } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

Wir def. eine Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : \{s_1, \dots, s_n\} &\to H \\ s_i &\mapsto t_{i+1} \end{aligned}$$

Univ. Eig.

$\Rightarrow$ $\exists!\ \varphi' : F(\{s_1, \dots, s_n\}) \twoheadrightarrow H$ mit $\varphi'(s_i) = \varphi(s_i)\ \forall i = 1, \dots, n$

Univ. Eig.

$\Rightarrow$ $\exists!\ \varphi'' : \mathrm{Sym}(n+1) \twoheadrightarrow H$ mit $\circlearrowright$.

Folglich: $|H| \leq |\mathrm{Sym}(n+1)| = (n+1)!$

2. Schritt:

z.z: $[G : H] \leq n+2$

Setze $H_0 = H$

$H_i := H t_1 \dots t_i$ für $i = 1, \dots, n+1$.

Sei $w \in G$ bel. Dann $\exists\ t_{i_1}, \dots, t_{i_k} \in \{t_1, \dots, t_{n+1}\}$ mit

$$w = t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_k}$$

z.z: $w \in H_i$ für ein $i \in \{0, \dots, n+1\}$.

Vorüberlegung:

Sei $t_j \in \{t_1, \dots, t_{n+1}\}$ bel. und $i \in \{0, \dots, n+1\}$. Dann gilt:

- $H_i t_i = H_{i-1}$ $j = i$
- $H_i t_{i+1} = H_{i+1}$ $j = i+1$
- Für $j \geq i+2$:

$$H_i t_j = H t_1 \dots t_i t_j = H t_j t_1 \dots t_i \overset{t_j \in H}{=} H_i$$

- Für $j \leq i-1$:

$$H_i t_j = H t_1 \dots t_{j-1} t_j t_{j+1} \underbrace{t_{j+2} \dots t_i t_j}_{\text{kommutieren}}$$

$$= H t_1 \dots t_{j-1} (t_j t_{j+1} t_j) t_{j+2} \dots t_i$$

$$= H t_1 \dots t_{j-1} t_{j+1} t_j t_{j+1} t_{j+2} \dots t_i$$

$$= H t_{j+1} t_1 \dots t_{j-1} t_j t_{j+1} \dots t_i$$

$$\overset{t_{j+1} \in H}{=} H_i.$$

D.h., dass die Menge $H_0 \cup \dots \cup H_{n+1}$ abgeschlossen ist bzgl. der Multiplikation von rechts mit $t_1, \dots, t_{n+1}$.

Zurück zu unserem Element $w = t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_k}$.

1. Fall: $t_{i_1} \neq t_1$. Dann $t_{i_1} \in H$

Weiter ist $t_{i_1} t_{i_2} \in H_{j_2}$ für ein $j_2 \in \{0, \dots, n+1\}$

u.s.w.

2. Fall: $t_{i_1} = t_1$. Dann $t_{i_1} \in H t_1$ [illegible]. Verfahre wie in Fall 1.

Damit haben wir gezeigt, dass gilt:

$$G = H_0 \cup \ldots \cup H_{n+1},$$

folglich: $[G : H] \leq n+2$.

<u>3. Schritt:</u>

Es gilt: $|G| \overset{\text{Satz von Lagrange}}{=} |H| \cdot [G : H] \leq (n+1)! \cdot (n+2) = |\mathrm{Sym}(n+2)|$.

Insgesamt: $G \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}(n+2)$. $\square$

Die Coxetergruppe vom Typ A_n, also mit Coxetergraph

$$\underbrace{\bullet - \bullet - \bullet \cdots \bullet - \bullet}_{n\text{-Ecken}}$$

ist also die $\mathrm{Sym}(n+1)$.

25. Längenfunktion

In der geometrischen Gruppentheorie betrachtet man Gruppen (unter anderem) mit metrischen Methoden.

26. Definition

Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Für $g \in G - \{1\}$ ist die <u>Wortlänge von g bzgl. S</u> definiert als

$$\ell_S(g) = \min \{ n \mid g = s_1 \ldots s_n, \; s_i \in S \cup S^{-1} \}.$$

Wir setzen $\ell_S(1) = 0$.

27. Proposition

Es gilt:

(i) $\ell_S(g) = \ell_S(g^{-1}) \geq 0$

(ii) $\ell_S(g) = 0 \iff g = 1$

(iii) $\ell_S(gh) \leq \ell_S(g) + \ell_S(h)$

(iv) $\ell_S(gh) \geq \ell_S(g) - \ell_S(h)$

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$

Achtung: Die Wortlänge von g hängt von S ab.

28. Beispiel

$G = \mathbb{Z}$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2, 3\}$

Dann: $\ell_{S_1}(1) = 1$

$\ell_{S_2}(1) = 2$

Kurze Wiederholung:

Definition: Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ ein Erzeugendensystem. Für $g \in G - \{1\}$ ist die Wortlänge von g bzgl. S definiert als

$$\ell_S(g) = \min\{n \mid g = s_1 \dots s_n,\ s_i \in S \cup S^{-1}\}.$$

Wir setzen: $\ell_S(1) = 0$. Ist insbesondere (W, I) ein Coxetersystem, so haben wir auf W die Wortlänge bzgl. I. Notation: $\ell_I(\omega) = \ell(\omega)$.

29. Proposition

Der Homomorphismus $\varepsilon: W \to \{\pm 1\}$ aus 2.22 ist gegeben durch

$$\varepsilon(\omega) = (-1)^{\ell(\omega)} \text{ für } \omega \in W.$$

Beweis:

Sei $\omega \in W$ bel. Schreibe $\omega = i_1 \dots i_k$ mit $i_j \in I$ für $j = 1, \dots, k$ und $\ell(\omega) = k$.

Dann $\varepsilon(\omega) = \varepsilon(i_1) \cdot \ldots \cdot \varepsilon(i_k) = (-1)^k = (-1)^{\ell(\omega)}$. $\square$

30. Proposition

Es gilt: $\ell(\omega i) = \ell(\omega) \pm 1$, $\ell(i\omega) = \ell(\omega) \pm 1$ für $\omega \in W$, $i \in I$.

Beweis: $\boxed{\text{ÜA}}$

Viele Aussagen über Coxetergruppen werden via Induktion nach $\ell(\omega)$ bewiesen.

Wir wollen also die Längen $\ell(\omega)$, $\ell(i\omega)$, $\ell(\omega i)$ besser verstehen.

Wann gilt: $\ell(\omega i) > \ell(\omega)$

und wann $\ell(\omega i) < \ell(\omega)$?

$\rightsquigarrow$ wir brauchen eine "schöne" Darstellung von W.

$$W \hookrightarrow GL(V)$$

V: endlich dimensionaler reeller Vektorraum

31. Etwas Darstellungstheorie

Sei G eine Gruppe und K ein Körper

32. Definition

Eine <u>lineare Darstellung von G</u> ist ein Paar (φ, V), wobei V ein K-Vektorraum und $\varphi: G \to GL(V)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Man nennt $\dim(V)$ den <u>Grad von (φ, V)</u>.

Die Darstellung (φ, V) heißt <u>treu</u>, wenn φ injektiv ist.

Bemerkung:

$$G \longrightarrow GL(V)$$

G: abstrakte Gruppe

$GL(V)$: zahlreiche Werkzeuge aus LA; Geometrie

- Für eine abstrakte Gruppe G kann man auch z.B. glatte Darstellungen auf Mannigfaltigkeiten studieren: $G \to \mathrm{Diff}(M)$.
(stetige)

33. Beispiele

(i) Die <u>triviale Darstellung</u> von G ist (φ, K) mit

$$\varphi: G \to GL(K)$$
$$g \longmapsto \mathrm{id}_K$$

Diese Darstellung hat Grad 1 und Kern G.

(ii) Sind (φ_i, V_i) für $i = 1, \dots, n$ Darstellungen, so auch ihre <u>direkte Summe</u>:

$$\varphi_1 \oplus \dots \oplus \varphi_n : G \to GL(V_1 \times \dots \times V_n)$$
$$g \longmapsto \varphi_1(g) \oplus \dots \oplus \varphi_n(g):$$
$$(v_1, \dots, v_n) \longmapsto (\varphi_1(g)(v_1), \dots, \varphi_n(g)(v_n))$$

34. Definition

Eine Matrixdarstellung von G des Grades n über K ist ein Homomorphismus $\psi: G \to GL_n(K)$

Bemerkung:

Ist (φ, V) eine Darstellung von G und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, so erhält man eine Matrixdarstellung

$$\varphi': G \to GL_n(K)$$

$$g \mapsto \text{Matrix von } \varphi(g) \text{ bzgl. der Basis } b_1, \dots, b_n$$

(Ist also $\varphi(g)(b_j) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} \cdot b_i$ mit $\lambda_{ij} \in K$,

so ist $\varphi'(g) = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$)

Ist $\varphi': G \to GL_n(K)$ eine Matrixdarstellung, so erhält man eine lineare Darstellung

$$\varphi: G \to GL(K^n)$$

$$g \mapsto \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \varphi'(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]$$

Ab jetzt: $\dim(V) < \infty$

$$\text{Lineare Darstellungen} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \text{Matrixdarstellungen}$$

Wir unterscheiden nicht zwischen Matrixdarstellungen und linearen Darstellungen.

35. Definition

Darstellungen (φ_1, V_1) und (φ_2, V_2) von G nennt man ähnlich, falls ein Isomorphismus $f: V_1 \to V_2$ existiert mit

$$\varphi_2(g) \circ f = f \circ \varphi_1(g) \quad \forall g \in G.$$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_1(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2(g)"] \\ V_1 \arrow[r, "f"] & V_2 \end{tikzcd}$$

Bemerkung:

(i) Ähnlichkeit von Darstellungen ist eine Äquivalenzrelation

(ii) In der Darstellungstheorie interessiert man sich für Darstellungen bis auf Ähnlichkeit.

36. Definition

Sei (φ, V) eine Darstellung von G. Einen Untervektorraum $U \subseteq V$ nennt man φ-invariant, falls $\forall g \in G, u \in U$ gilt:

$$\varphi(g)(u) \in U.$$

Man erhält dann eine Darstellung

$$\tilde{\varphi}: G \to GL(U)$$
$$g \longmapsto \varphi(g)|_U$$

vom kleineren Grad.

37. Beispiel

$G = Sym(3)$ und $\varphi: Sym(3) \to GL_3(\mathbb{R})$

$$\pi \longmapsto (e_{\pi(1)}, e_{\pi(2)}, e_{\pi(3)})$$

wobei $\{e_1, e_2, e_3\}$ ~~eine Basis~~ die Standardbasis ~~von~~ von $\mathbb{R}^3$ ist.

Wir def. $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$.

Dann ist U φ-invariant.

38. Definition

Eine Darstellung (φ, V) mit $V \neq \{0\}$ heißt <u>irreduzibel</u>, falls $\{0\}$ und V die einzigen φ-invarianten Untervektorräume sind.

Bausteine für lineare Darstellungen

$\rightsquigarrow$ irreduzible Darstellungen

39. Satz von Maschke

Sei G eine <u>endliche</u> Gruppe. Sei weiter $\mathrm{char}(K) \nmid |G|$.

Sei (φ, V) eine lineare Darstellung von G und

U ein φ-invarianter Untervektorraum von V.

Dann existiert ein φ-invarianter Untervektorraum $\tilde{U}$ von V mit $V = U \oplus \tilde{U}$.

Bemerkungen:

- Wählt man eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von U und eine Basis $d_1, \dots, d_m$ von $\tilde{U}$, so gilt für die Matrixdarstellung von φ bzgl. der Basis $\{b_1, \dots, b_n, d_1, \dots, d_m\}$ von V

$$\varphi(g) = \left(\begin{array}{c|c} \varphi_1(g) & 0 \\ \hline 0 & \varphi_2(g) \end{array}\right) \quad \text{für } g \in G$$

Folglich gilt: $\varphi \sim \varphi_1 \oplus \varphi_2$.

- Jede Darstellung von G ist also ähnlich zu einer direkten Summe irreduziblen Darstellungen.

Beweis:

1. Schritt: Wir wählen einen bel. Untervektorraum X von V mit

$$V = \mathcal{U} \oplus X$$

und definieren $\pi : V \to V$ als die Projektion auf $\mathcal{U}$.

$$v = u + x \longmapsto u$$

2. Schritt:

Wir definieren $f : V \to V$

$$v \longmapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)^{-1} \circ \pi \circ \varphi(g)$$

und $\tilde{\mathcal{U}} := \ker(f)$

3. Schritt:

Z.z: $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} = \{0\}$

Sei $v \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ bel. Dann $v \in \mathcal{U}$ und $v \in \tilde{\mathcal{U}}$.

$$v \in \mathcal{U} \Rightarrow f(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)^{-1} \circ \pi \circ \underbrace{\varphi(g)(v)}_{\in \mathcal{U}}$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)^{-1} \varphi(g)(v)$$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot |G| \, v$$

$$= v$$

$v \in \tilde{\mathcal{U}} \Rightarrow f(v) = 0$ Folglich: $v = 0$.

4. Schritt: z.z: $V = \mathcal{U} + \tilde{\mathcal{U}}$

Sei $v \in V$ bel. Wir schreiben:

$$v = \underbrace{f(v)}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{(v - f(v))}_{\in \tilde{\mathcal{U}}}$$

zeige, dann gilt: $f \circ f = f$

5. Schritt: z.z: $\tilde{\mathcal{U}}$ ist φ-invariant

Sei $v \in \tilde{\mathcal{U}}$, $h \in G$ bel. z.z: $\varphi(h)(v) \in \tilde{\mathcal{U}} = \ker f$

$$f(\varphi(h)(v)) \overset{\text{Def.}}{=} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g)^{-1} \circ \pi \circ \varphi(g)\,(\varphi(h)(v))$$

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(h)\,\varphi(h^{-1})\,\varphi(g^{-1}) \circ \pi \circ \varphi(gh)(v)$$

$$= \varphi(h) \underbrace{\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(h^{-1}g^{-1}) \circ \pi \circ \varphi(gh)(v)}_{= f(v)}$$

$$= \varphi(h)\,(f(v))$$

$$\overset{f(v)=0}{=} \varphi(h)(0)$$

$$= 0.$$

$\square$

Zurück zu Coxetersystemen (W, I)

40. Die kanonische Darstellung von W

Ziel: $\Phi : W \hookrightarrow GL_d(\mathbb{R})$ treue Darstellung von W.

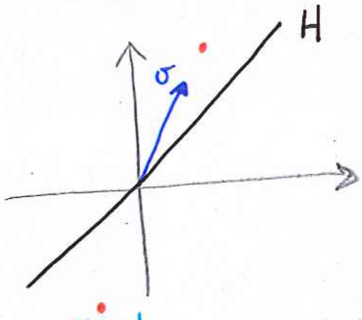
„Wunsch": $\Phi(i)$ ist Spiegelung für alle $i \in I$.

$\rightsquigarrow$ zu „viel" verlangt.

Wir ~~schränken~~ schwächen die Bedingungen an eine Spiegelung ab.

41. Definition

Eine lineare Abbildung $s \in GL_d(\mathbb{R})$ heisst <u>abstrakte Spiegelung</u>, falls es eine Hyperebene $H \leq \mathbb{R}^d$ ~~existiert~~ und $v \in \mathbb{R}^d - \{0\}$ existieren, sodass gilt:



(i) $s|_H = id$

(ii) $s(v) = -v$

(v muss nicht orthogonal zu H stehen).

42. Konstruktion von Φ

Gegeben sei ein Coxetersystem (W, I) mit Coxetermatrix $(m_{ij})_{ij}$.

Wir betrachten den Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$.

Weiter definieren wir auf V eine symmetrische bilineare Form

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$(b_i, b_j) \longmapsto \begin{cases} -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right), & m_{ij} \neq \infty \\ -1, & m_{ij} = \infty \end{cases}$$

Es gilt: (i) $B(b_i, b_i) = -\cos\left(\frac{\pi}{1}\right) = 1$

(ii) $B(b_i, b_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right) \leq 0$ für $i \neq j$

(iii) $B(b_i, b_j) = 0 \iff m_{ij} = 2$

Weiter definieren wir eine Abbildung

$$\varphi: I \to GL(V)$$
$$i \longmapsto \sigma_i : V \to V$$
$$v \longmapsto v - 2 \cdot B(b_i, v) \cdot b_i$$

42. Lemma

Für $i \in I$ ist σ_i eine abstrakte Spiegelung.

Beweis:

Wir definieren $H_i := \{v \in V \mid B(v, b_i) = 0\}$.

Dann ist H_i eine Hyperebene in V, denn:

wir betrachten die lineare Abb $f_i : V \to \mathbb{R}$
$v \longmapsto B(v, b_i)$

- f_i ist surjektiv, denn sei $\lambda \in \mathbb{R}$ bel.
Dann: $f_i(\lambda b_i) = B(\lambda b_i, b_i)$
$= \lambda B(b_i, b_i)$
$= \lambda$

- $\ker f_i = H_i$

Also $\dim H_i = \dim(V) - 1$

Sei weiter $v \in H_i$ bel. Dann

$$\sigma_i(v) = v - 2 \cdot \underbrace{B(b_i, v)}_{=0} \cdot b_i = v$$

Weiter gilt: $\sigma_i(b_i) = b_i - 2 \cdot \underbrace{B(b_i, b_i)}_{=1} \cdot b_i = -b_i$

$\square$

Kurze Wiederholung:

- Sei $V = \mathbb{R}^d$ ein d-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{R}$ und $H \leq V$ eine Hyperebene. Sei weiter $\langle -,- \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ das Standardskalarprodukt.

Es gilt: $V = H \oplus H^{\perp}$

$$H^{\perp} = \{ v \in V \mid \langle v, H \rangle = 0 \}$$

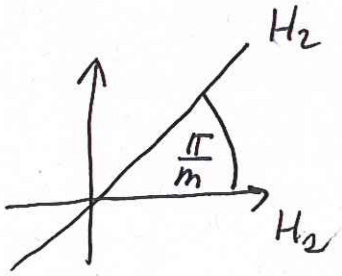
Wähle $\ell \in H^{\perp}$ mit $\|\ell\| = \sqrt{\langle \ell, \ell \rangle} = 1$. Dann $\langle \ell \rangle = H^{\perp}$.

Dann ist die Spiegelung an der Hyperebene H definiert wie folgt:

$$s_H : V \to V$$
$$v \mapsto v - 2 \cdot \langle v, \ell \rangle \cdot \ell$$

Def: $W \leq GL(V)$ heißt Spiegelungsgruppe, wenn W von Spiegelungen erzeugt wird.

Wichtiges Beispiel: $D_m := \langle s_{H_1}, s_{H_2} \rangle$



- Etwas abstrakter:

Sei $(-,-) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv definite Bilinearform, also ein Skalarprodukt.

Dann können wir wieder Spiegelungen bzgl. $(-,-)$ an der Hyperebene H und Spiegelungsgruppen bzgl. $(-,-)$ definieren.

Weiter können wir Winkel definieren:

$$(x,y) = \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} \cdot \cos \measuredangle x,y \qquad x,y \in V.$$

Haben wir zwei Spiegelungen $\tilde{s}_{H_1}, \tilde{s}_{H_2}$ bzgl. $(-,-)$.

Dann ist $\tilde{s}_{H_2} \circ \tilde{s}_{H_1}$ eine Drehung um den Winkel $\measuredangle x_1, x_2$, wobei $H_1 = \langle x_1 \rangle$ und $H_2 = \langle x_2 \rangle$.

Wenn $\measuredangle x_1, x_2 = \frac{\pi}{m}$, dann $\langle \tilde{s}_{H_1}, \tilde{s}_{H_2} \rangle \cong D_m$.

<u>Zurück zu Coxetersystemen:</u>

Sei (W, I) ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{i,j}$

<u>Ziel:</u> Konstruktion von $\Phi : W \to GL(V)$.

<u>Bis jetzt:</u>

- Wir betrachten den Vektorraum V über $\mathbb{R}$ mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$.
- symmetrische Bilinearform: $B : V \times V \to \mathbb{R}$
$$(b_i, b_j) \mapsto \begin{cases} -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}, & m_{ij} \neq \infty \\ -1, & m_{ij} = \infty \end{cases}$$
- $\varphi : I \to GL(V)$
$$i \mapsto \sigma_i : v \mapsto v - 2 \cdot B(b_i, v) \cdot b_i$$

43. Satz

Die Abbildung $\varphi: I \to GL(V)$ setzt sich fort zu einem Gruppenhomomorphismus $\Phi: W \to GL(V)$, der <u>geometrischen Darstellung von W.</u>

<u>Beweis:</u>

Univ. Eig. von $F(I)$: $\exists!\ \tilde{\varphi}: F(I) \to GL(V)$ der φ fortsetzt.

Nun wollen wir zeigen, dass $\tilde{\varphi}$ durch W faktorisiert.

Dazu reicht es z.z: Seien $i,j \in I$ mit $m_{ij} \neq \infty$ bel. Dann gilt: $\tilde{\varphi}(((ij))^{m_{ij}}) = id_V$.

<u>1. Fall:</u> $i=j$

σ_i ist eine abstrakte Spiegelung und hat Ordnung 2 in $GL(V)$.

Also:

$$\tilde{\varphi}(i^2) = \sigma_i \circ \sigma_i = id_V.$$

<u>2. Fall:</u> $i \neq j$

Wir betrachten die Untergruppe $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle \subseteq GL(V)$.

Weiter definieren wir: $V_0 := \mathbb{R}b_i \oplus \mathbb{R}b_j$.

<u>1. Schritt:</u> Der UVR V_0 ist $\langle \sigma_i, \sigma_j \rangle$-invariant. Denn

$$\sigma_i(b_i) = b_i - 2 \cdot B(b_i, b_i)\, b_i = -b_i \in V_0$$
$$\sigma_i(b_j) = b_j - 2 \cdot B(b_i, b_j)\, b_i \in V_0$$
$$\sigma_j(b_i) \in V_0$$
$$\sigma_j(b_j) \in V_0$$

Wir betrachten die Einschränkung von B auf V_0.
Die Gramsche Matrix von B bzgl. b_i, b_j lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} \\ -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} & 1 \end{pmatrix}$$

Nach dem Hauptminorenkriterium ist diese Matrix positiv definit, denn: $1 > 0$ und

$$\det\left(\quad \right) = 1 - \underbrace{\left(\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right)}_{<1}^{2} > 0 .$$

Also ist $B: V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $\sigma_i\big|_{V_0}, \sigma_j\big|_{V_0}$ sind Spiegelungen bzgl. B.

Wir def.: $H_k\big|_{V_0} := \{ v \in V_0 \mid B(v, b_k) = 0 \}$

- $H_i\big|_{V_0}$ ist also die Hyperebene, die zu der Spiegelung $\sigma_i\big|_{V_0}$ gehört

und

$H_j\big|_{V_0}$ — " — $\sigma_j\big|_{V_0}$ gehört.

Wir definieren: $v_0 := b_i - B(b_i, b_j)\, b_j \Rightarrow v \in H_j\big|_{V_0}$

$w := b_j - B(b_i, b_j)\, b_i \Rightarrow w \in H_i\big|_{V_0}$

Wir berechnen den Winkel zwischen v, w bzgl. B.

Also:

$$\cos \sphericalangle v, w = \frac{B(v,w)}{\sqrt{B(w,w)} \cdot \sqrt{B(v,v)}}$$

$$\overset{B(v,v) = B(w,w)}{=} \frac{B(v,w)}{B(v,v)}$$

$$\overset{\text{rechnen}}{=} \cos \frac{\pi}{m_{ij}}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle v, w = \frac{\pi}{m_{ij}}$$

Also ist $\langle \sigma_i|_{V_0}, \sigma_j|_{V_0} \rangle$ eine Diedergruppe, die zu $D_{m_{ij}}$ isomorph ist.

Insbesondere ist $\operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j |_{V_0}) = m_{ij}$.

<u>2. Schritt:</u>

<u>z.z:</u> Es gilt: $\sigma_i \circ \sigma_j |_{H_i \cap H_j} = id_V$

Sei $v \in H_i \cap H_j$ bel. Es gilt also: $B(v, b_i) = 0$ und $B(v, b_j) = 0$

Also:

$$\sigma_i \sigma_j (v) = \sigma_i (v - 2 \cdot \underbrace{B(v, b_j)}_{=0} b_j) = \sigma_i(v) = v - 2 \cdot \underbrace{B(v, b_i)}_{=0} b_i$$

$$= v$$

3. Schritt: z.z: Es gilt: $V_0 \oplus H_i \cap H_j = V$

zuerst zeigen wir, dass gilt: $V_0 \cap H_i \cap H_j = \{0\}$.

Sei $v \in V_0 \cap H_i \cap H_j$ bel.

Dann: $v = r_i b_i + r_j b_j$ für $r_i, r_j \in \mathbb{R}$.
$B(v, b_i) = 0$
$B(v, b_j) = 0$

Also: $B(r_i b_i + r_j b_j, b_i) = 0$ | $B(r_i b_i + r_j b_j, b_j) = 0$

$\Leftrightarrow r_i + r_j \left(-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = 0$ | $\Leftrightarrow r_j + r_i \left(-\cos\frac{\pi}{m_{ij}}\right) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} \\ -\cos\frac{\pi}{m_{ij}} & 1 \end{pmatrix}}_{\det(\quad) \neq 0} \begin{pmatrix} r_i \\ r_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r_i = 0$
$r_j = 0$.

Wir def. $f: V \to \mathbb{R}^2$ wie folgt:
$v \longmapsto (B(v, b_i), B(v, b_j))$

- f ist eine surjektive lineare Abbildung.

Folglich: $\underbrace{\dim \ker f}_{= \dim H_i \cap H_j} + \underbrace{\dim \operatorname{im} f}_{= 2} = \dim V$

$\Rightarrow \dim H_i \cap H_j = \dim V - 2$

Insgesamt:

$$\dim(V_0 + H_i \cap H_j) = \dim V_0 + \dim(H_i \cap H_j)$$
$$- \dim(V_0 \cap H_i \cap H_j$$
$$= 2 + \dim V - 2 - 0$$
$$= \dim V$$

<u>Also:</u> $V_0 + H_i \cap H_j \subseteq V$
und
$\dim(V_0 + H_i \cap H_j) = \dim V$ $\Big\} \Rightarrow V_0 + H_i \cap H_j = V.$

<u>4. Schritt:</u>

Wir haben also: $V = V_0 \oplus H_i \cap H_j.$

und $\operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j |_{V_0}) = m_{ij}$

$\operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j |_{H_i \cap H_j}) = 1$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j) = m_{ij}$

<u>5. Schritt:</u>

Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{tikzcd}
F(I) \arrow[rr, "\tilde{e}"] \arrow[dr, "\pi"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & SL(V) \\
& W \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

44. Korollar

Sei (W, I) ein Coxetersystem und $(m_{ij})_{i,j}$ die dazugehörige Coxetermatrix. Seien weiter $i, j \in I$, $i \neq j$ bel.

Dann gilt: $\operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$

Beweis:

Wir betrachten die geometrische Darstellung von W.

$$\Phi : W \to GL(V)$$

1. Fall: $m_{ij} < \infty$.

Dann: $\operatorname{ord}(\Phi(ij)) \leq \operatorname{ord}(ij) \leq m_{ij}$

$$\operatorname{ord}(\Phi(ij)) = \operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j) = m_{ij}$$

$\Rightarrow \operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$

2. Fall: $m_{ij} = \infty$

Es gilt:

$$(\sigma_i \sigma_j)^n (b_i) \underset{\uparrow}{=} b_i + 2n \cdot (b_i + b_j) \neq b_i \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\boxed{\text{ÜA}}$ Induktion nach n.

Folglich: $\operatorname{ord}(\Phi(ij)) = \operatorname{ord}(\sigma_i \sigma_j) = \infty$.

Wir haben wieder:

$$\infty = \operatorname{ord}(\Phi(ij)) \leq \operatorname{ord}(ij).$$

Also $\operatorname{ord}(ij) = \infty$ $\square$

45. Proposition

Sei $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W.

Dann gilt:

$$B(\Phi(\omega)v_1, \Phi(\omega)v_2) = B(v_1, v_2) \quad \forall\ \omega \in W \quad \forall\ v_1, v_2 \in V$$

Beweis: $\boxed{\text{üA}}$

Kurze Wiederholung:

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $(m_{ij})_{i,j}$ die dazugehörige Coxetermatrix.

- $\Phi: W \to GL(V)$

reeller Vektorraum mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$

$$i \longmapsto [\sigma_i : v \mapsto 2 \cdot B(v, b_i) \cdot b_i]$$

- Seien $i,j \in I$, $i \neq j$ bel. Dann ist $\operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$.

Wir def. $J := \{i,j\}$ und $W_J := \langle i,j \rangle \subseteq W$.

Es gilt: $i \neq j$ und $\operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$. Folglich ist W_J eine Diedergruppe, die zu $D_{m_{ij}}$ isomorph ist.

(Satz 2.7)

- B ist W-invariant, d.h. $B(\Phi(\omega)v_1, \Phi(\omega)v_2) = B(v_1, v_2)$ $\forall\, \omega \in W, v_1, v_2 \in V$

noch 2.7:

- Die geometrische Darstellung Φ ist treu.

$\rightsquigarrow$ via Wurzelsysteme

46. Wurzelsysteme

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W. mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$.

Wir schreiben für $\Phi(\omega)(b_i) =: \omega(b_i)$.

47. Definition

Das <u>Wurzelsystem von (W,I)</u> ist definiert wie folgt:

$$\tilde{\Phi} := \{\omega(b_i) \mid \omega \in W, i = 1, \ldots, \# I\}.$$

Die Elemente aus $\tilde{\Phi}$ heißen Wurzeln.

Bemerkungen:

(i) Für $v \in \tilde{\Phi}$ gilt: $B(v,v) = 1$.

Denn: $B(v,v) \underset{\uparrow}{=} B(\omega(b_i), \omega(b_i)) \overset{2.45}{=} B(b_i, b_i) = 1$.

$\exists\, \omega \in W,\ i \in \{1, \dots, \#I\}$ mit $v = \omega(b_i)$

(ii) Für $v \in \tilde{\Phi}$ ist auch $-v \in \tilde{\Phi}$.

Denn: $v \in \tilde{\Phi} \Rightarrow \exists\, \omega \in W,\ i \in \{1, \dots, \#I\}$ mit $v = \omega(b_i)$.

Es gilt:
$$
\begin{aligned}
-v = -\omega(b_i) &= -\Phi(\omega)(b_i) \\
&= \Phi(\omega)(-b_i) \\
&= \Phi(\omega)(\sigma_i(b_i))
\end{aligned}
$$

$\sigma_i(b_i) = -b_i$

$$
\begin{aligned}
&= \Phi(\omega)\Phi(i)(b_i) \\
&= \omega i\,(b_i) \in \tilde{\Phi}.
\end{aligned}
$$

48. Beispiel

Wir betrachten die Gruppe $W = D_3 = \langle i, j \mid i^2, j^2, (ij)^3 \rangle$

$\Phi : D_3 \to GL(\mathbb{R}^2)$

mit Basis b_i, b_j

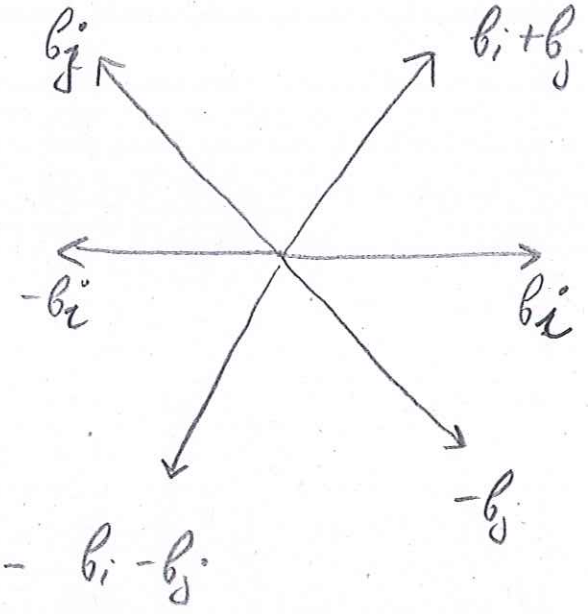
$$
i \longmapsto \Big[\sigma_i : \begin{array}{l} b_i \longmapsto -b_i \\ b_j \longmapsto b_j - 2 \cdot B(b_i, b_j) \cdot b_i \end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= b_j + 2 \cdot \cos \tfrac{\pi}{3} \cdot b_i \\
&= b_j + b_i
\end{aligned}
$$

$$
j \longmapsto \Big[\sigma_j : \begin{array}{l} b_i \longmapsto b_i + 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \cdot b_j = b_i + b_j \\ b_j \longmapsto -b_j \end{array}
$$

...

$\tilde{\Phi} = \{\pm b_i, \pm b_j, \pm(b_i+b_j)\}$ $\boxed{\text{ÜA}}$



$$\cos \measuredangle b_{i,j} = B(b_i,b_j) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \measuredangle b_i, b_j = 120°.$$

49. Definition

(i) Die Menge der <u>positiven Wurzeln von (W,I)</u> ist definiert wie folgt:

$$\tilde{\Phi}^+ := \tilde{\Phi} \cap (\mathbb{R}_{\geq 0} b_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0} b_{\# I})$$

Für $v \in \tilde{\Phi}^+$ schreiben wir $v > 0$.

(ii) Die Menge der <u>negativen Wurzeln von (W,I)</u> ist definiert wie folgt:

$$\tilde{\Phi}^- := \tilde{\Phi} \cap (\mathbb{R}_{\leq 0} b_1 + \dots + \mathbb{R}_{\leq 0} b_{\# I})$$

Für $v \in \tilde{\Phi}^-$ schreiben wir $v < 0$.

50. Beispiele

(i) Wir betrachten wieder D_3.

Es gilt: $\tilde{\Phi}^+ = \{ b_i, b_j, b_i + b_j \}$

$\tilde{\Phi}^- = \{ -b_i, -b_j, -b_i - b_j \}$

Und es gilt auch: $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^+ \dot{\cup} \tilde{\Phi}^-$

wir werden später sehen, dass diese Gleichheit für eine bel. Coxetergruppe gilt.

(ii) Wir betrachten die Coxetergruppe

$$D_\infty = \langle i, j \mid i^2, j^2 \rangle \overset{2.7}{=} \langle i \rangle \cdot \underset{\langle ij \rangle}{\underset{\shortparallel}{R}}$$

Jedes Element aus D_∞ hat also die Form:

$(ij)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$ oder $i \cdot (ij)^k$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Da $(ij)^{-1} = ji$, hat jedes Element aus D_∞ die Form:

$(ij)^n$ oder $(ji)^n$ oder $i \cdot (ij)^n$ oder $i \cdot (ji)^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Nun betrachten wir die geometrische Darstellung von D_∞, also

$$\Phi : D_\infty \to GL(\mathbb{R}^2), \quad \mathbb{R}^2 \text{ mit Basis } b_i, b_j$$

$$i \longmapsto [\sigma_i : v \mapsto v - 2 \cdot B(v, b_i) b_i]$$

$$j \longmapsto [\sigma_j : v \mapsto v - 2 \cdot B(v, b_j) b_j]$$

Wie sieht das Wurzelsystem von D_∞ aus?

Es gilt:

(i) $(ij)^n(b_i) = (\sigma_i\sigma_j)^n(b_i) \overset{\boxed{\text{ÜA}}}{=} (2n+1)b_i + 2nb_j$ für $n \geq 0$.

Also ist $(ij)^n(b_i) \in \tilde{\Phi}^+$ für $n \geq 0$.

(ii) $i\cdot(ij)^n(b_i) = \sigma_i\left((\sigma_i\sigma_j)^n(b_i)\right)$

$$= \sigma_i\left((2n+1)b_i + 2nb_j\right)$$

$$= (2n+1)\sigma_i(b_i) + 2n\,\sigma_i(b_j)$$

$$= -2nb_i - b_i + 2n\,(b_j - 2\cdot\underbrace{B(b_i,b_j)}_{=-1}b_i)$$

$$= -2nb_i - b_i + 2nb_j + 4nb_i$$

$$= (2n-1)b_i + 2nb_j$$

Also ist $i\cdot(ij)^n(b_i) \in \tilde{\Phi}^-$ für $n=0$ und

$i\cdot(ij)^n(b_i) \in \tilde{\Phi}^+$ für $n>0$.

Rest $\boxed{\text{ÜA}}$

51. Beispiel

Wir betrachten die Coxetergruppe

$$D_m = \langle i,j \mid i^2, j^2, (ij)^m \rangle.$$

Sei $w \in D_m$ bel.

Dann gilt: (i) $\ell(w) \leq m$

(ii) Wenn jede reduzierte Darstellung von w nicht mit i endet, dann gilt:

$\ell(w) \leq m-1$ und

$w(b_i) > 0$ $\boxed{\text{ÜA}}$

52. Theorem

Sei $w \in W$, $i \in I$ beliebig. Es gilt:

(i) $\ell(wi) = \ell(w)+1 \iff w(b_i) > 0$

(ii) $\ell(wi) = \ell(w)-1 \iff w(b_i) < 0$

Bevor wir das Theorem beweisen, ein Korollar:

53. Korollar

Die geometrische Darstellung $\Phi : W \to GL(V)$ ist treu.

Beweis:

Sei $w \in \ker \Phi$.

A: $w \neq 1$. Dann können wir w wie folgt schreiben:

$w = i_1 \dots i_k$, $i_j \in I$ für $j = 1, \dots, k$ und $\ell(w) = k > 0$.

Es gilt: $\ell(wi_k) = \ell(w) - 1$

$\overset{\text{Theorem 52}}{\Longrightarrow} w(b_{i_k}) < 0$ ↯ zu

$w(b_{i_k}) = b_{i_k} \in \tilde{\Phi}^+$

□

Beweis (Theorem 52):

Vorüberlegungen: Seien $i, j \in I$ mit $i \neq j$ beliebig.

Wir definieren $J := \{i, j\}$ und bezeichnen mit W_J die Untergruppe von W, die von den Elementen i und j erzeugt wird.

Da $\operatorname{ord}(ij) = m_{ij}$, ist W_J isomorph zu $D_{m_{ij}}$.

Weiter gilt: Sei $w \in W_J$. Dann:

$$\ell(w) = \ell_I(w) \leq \ell_J(w).$$

1. Schritt:

Wir zeigen zuerst, dass gilt:

$$\ell(wi) = \ell(w) + 1 \Rightarrow w(b_i) > 0.$$

Induktion nach $\ell(w)$:

IA: $\ell(w) = 0 \Rightarrow w = 1$ und wir haben: $w(b_i) = b_i > 0$.

IS: Sei nun $\ell(w) > 0$. Wir schreiben

$$w = i_1 \dots i_k \quad \text{mit } i_j \in I \text{ für } j = 1, \dots, k$$
$$\text{und } \ell(w) = k.$$

Dann: $\ell(w i_k) = \ell(w) - 1$.

Es gilt: $\ell(wi) > \ell(w)$, folglich gilt: $i \neq i_k$.

Wir definieren $J := \{i, i_k\}$ und betrachten die Untergruppe W_J.

Weiter definieren wir eine Menge

$$A := \{v \in W \mid v^{-1}w \in W_J \text{ und } \ell(v) + \ell_J(v^{-1}w) = \ell(w)\}$$

Es gilt: $A \neq \emptyset$, denn $w \in A$.

Nun wählen wir $v \in A$ mit minimalster Länge $\ell(v)$.

Weiter definieren wir $v_0 := v^{-1}w \in W_J$.

Es gilt: $w = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{"schöne" Zerlegung}}}{v\, v_0}$ und $\ell(w) = \ell(v) + \ell_J(v^{-1}w)$

Wir wollen die IV auf v und i anwenden, dazu müssen wir zeigen:
- $\ell(v) < \ell(w)$
- $\ell(vi) = \ell(v) + 1$

[Beh.: $wi_k \in A$

Beweis: $(wi_k)^{-1} w = i_k \in W_J$

$\ell(wi_k) + \ell_J((wi_k)^{-1} w) = \ell(w) - 1 + 1 = \ell(w)$ #]

Nach der Wahl von v, gilt also:

$$\ell(v) \le \ell(wi_k) = \ell(w) - 1, \text{ d.h. } \ell(v) < \ell(w) \checkmark$$

Noch z.z.: $\ell(vi) = \ell(v) + 1$

A: nicht, dann $\ell(vi) = \ell(v) - 1$.

Weiter gilt:
$$\begin{aligned}
\ell(w) &\overset{w = vv_0}{=} \ell(v i i v_0) \\
&\overset{v_0 = v^{-1}w}{=} \ell(v i i v^{-1} w) \\
&\le \ell(vi) + \ell(\underbrace{i v^{-1} w}_{\in W_J}) \\
&\le \ell(v) - 1 + \ell_J(i v^{-1} w) \\
&\le \ell(v) - 1 + \ell_J(i) + \ell_J(v^{-1} w) \\
&= \ell(w)
\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ überall Gleichheit

$\Rightarrow \ell(w) = \ell(vi) + \ell_J(i v^{-1} w)$

$\Rightarrow v i \in A$ ⚡ zu Minimalität von v. #

Insgesamt haben wir: $\ell(v) < \ell(w)$ und

$$\ell(vi) = \ell(v) + 1$$

$$\overset{IV}{\Longrightarrow} \boxed{v(b_i) > 0}$$

Analog zeigt man: $\ell(v i_k) = \ell(v) + 1$

$$\overset{IV}{\Longrightarrow} \boxed{v(b_{i_k}) > 0}$$

<u>Zurück zu $w(b_i)$:</u>

$$w(b_i) \overset{w = v v_0}{=} \underbrace{v \underbrace{v_0}_{\in W_J} (b_i)}_{\in \mathbb{R} b_i + \mathbb{R} b_{i_k}}$$

Folglich ex. $x, y \in \mathbb{R}$ mit $v_0(b_i) = x b_i + y b_{i_k}$.

Also: $$w(b_i) = v(x b_i + y b_{i_k})$$
$$= x \underbrace{v(b_i)}_{>0} + y \underbrace{v(b_{i_k})}_{>0}$$

Bleibt z.z: $x, y \geq 0$.

Wir haben nun alles auf eine Rechnung in W_J reduziert.

<u>z.z:</u> $v_0(b_i) = x b_i + y b_{i_k} > 0$.

Wir zeigen zuerst, dass jede reduzierte Darstellung von v_0 nicht mit i endet.

<u>Beh:</u> $\ell_J(v_0 i) > \ell_J(v_0)$

A: nicht, dann:

$$\begin{aligned}
\ell(wi) &= \ell(vv^{-1}wi) \\
&\le \ell(v) + \ell(\underbrace{v^{-1}w}_{v_0}i) \\
&= \ell(v) + \ell(v_0 i) \\
&\le \ell(v) + \ell_J(v_0 i) \\
&< \ell(v) + \ell_J(v_0) \\
&= \ell(w) \quad ⚡.
\end{aligned}$$

<u>1. Fall:</u> $m_{ii_k} = \infty$

Dann hat v_0 folgende Form:

$v_0 = (ii_k)^n$ für $n \geq 0$ oder $v_0 = i \cdot (ii_k)^n$ für $n \geq 1$

Also:

$$(ii_k)^n (b_i) \overset{\text{Beispiel 2.50(ii)}}{=} (2n+1)b_i + 2n\, b_{i_k} > 0 \quad \text{für } n \geq 0$$

$$i(ii_k)^n(b_i) = (2n-1)b_i + 2n\, b_{i_k} > 0 \quad \text{für } n \geq 1.$$

<u>2. Fall:</u> $m_{ii_k} \neq \infty$

siehe Beispiel 2.51

2. Schritt:

Nun zeigen wir, dass gilt:

$$\ell(wi) = \ell(w) - 1 \Rightarrow w(b_i) < 0.$$

Wir definieren $w' = wi$.

Es gilt: $\underset{\ell(w)}{\underset{\shortparallel}{\ell(w'i)}} = \underset{\ell(wi)}{\underset{\shortparallel}{\ell(w')}} + 1 \overset{\text{1. Schritt}}{\Rightarrow} w'(b_i) > 0$

$$\Leftrightarrow wi(b_i) > 0$$

$$\Rightarrow w(-b_i) > 0$$

$$\Rightarrow -w(b_i) > 0$$

$$\Rightarrow w(b_i) < 0 \qquad \square.$$

Kurze Wiederholung

Sei (W, I) ein Coxetersystem und $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W. mit Basis $\{b_i \mid i \in I\}$

52. Theorem:

Sei $w \in W$, $i \in I$ bel. Es gelten folgende Äquivalenzen:

(i) $\ell(wi) = \ell(w) + 1 \iff w(b_i) > 0$

(ii) $\ell(wi) = \ell(w) - 1 \iff w(b_i) < 0$

Beweisstrategie zu (i): Induktion nach $\ell(w)$

- Wir ~~zer~~zerlegen w "schön":

$$w = \underbrace{v}_{} \cdot \underbrace{v_0}_{\in W_J \text{ ist eine Diedergruppe}}$$

auf v können wir die IV anwenden

Also: $w(b_i) = v \cdot v_0 (b_i) = v(\underbrace{x b_i + y b_{i_k}}_{>0})$

Rechnung in der Diedergruppe W_J

$$= \underbrace{x \cdot \underbrace{v(b_i)}_{\overset{IV}{>}0} + y \cdot \underbrace{v(b_{i_k})}_{\overset{IV}{>}0}}_{>0}$$

Zu (ii): Nun zeigen wir, dass gilt:

$$\ell(wi) = \ell(w) - 1 \Rightarrow w(b_i) < 0.$$

Wir definieren $w' = wi$.

Dann: $\ell(w'i) = \ell(w') + 1 \overset{(i)}{\Rightarrow} w'(b_i) > 0$

$\Rightarrow wi(b_i) > 0$

$\Rightarrow w(-b_i) > 0$

$\Rightarrow -w(b_i) > 0$

$\Rightarrow w(b_i) < 0$ $\square$

54. Korollar

Jede Wurzel $v \in \tilde{\Phi}$ ist entweder positiv oder negativ, d.h.

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}^+ \dot{\cup} \tilde{\Phi}^-$$

Beweis:

Sei $v \in \tilde{\Phi}$ bel. Dann ex. $w \in W$ und $b_j \in \{b_i \mid i \in I\}$ mit $v = w(b_j)$.

Es gilt: $\ell(wj) = \ell(w) + 1 \Rightarrow w(b_j) > 0$

oder

$\ell(wj) = \ell(w) - 1 \Rightarrow w(b_j) < 0$. $\square$

55. Parabolische Untergruppen

Gegeben sei ein Coxetersystem (W, I) mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{i,j}$. Für $J \subseteq I$ heißt die von J erzeugte Untergruppe $W_J := \langle J \rangle \subseteq W$ eine standard parabolische Untergruppe von W.

Wir werden gleich sehen, dass die standard parabolische Untergruppe W_J eine "schöne" Präsentierung hat. $W_J = \langle J \mid (ij)^{m_{ij}}, \ i,j \in J \rangle$, d.h. (W_J, J) ist ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m|_{J \times J}$

Achtung: für eine bel. Gruppe ist diese Aussage i.A. falsch.

z.B.: $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \langle x, y \mid x^{-5}y^{2}, x^{6}y^{-3} \rangle$

Nun betrachten wir die Untergruppe, die von x erzeugt wird.

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \supseteq \langle x \rangle \ncong \langle x \mid \emptyset \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

56. Satz

Sei (W, I) ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m = (m_{ij})_{i,j}$ und $J \subseteq I$ bel. Dann ist (W_J, J) ein Coxetersystem mit Coxetermatrix $m|_{J \times J}$.

Beweis: Sei $(\overline{W_J}, J)$ das Coxetersystem mit Coxetermatrix $m|_{J \times J}$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\overline{W_J} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr, "\pi"'] & GL(V|_{\langle \{e_j \mid j \in J\} \rangle}) \arrow[r, hook] & GL(V) \\
 \arrow[ur, phantom, "\circlearrowright"] & W_J \arrow[u, "\Psi"'] \arrow[r, hook] & W \arrow[u, "\text{geom. Darst.}"']
\end{tikzcd}$$

Es gilt: $\Psi \circ \pi = \Phi$, da Φ injektiv ist, ist auch π injektiv. Damit folgt: $\overline{W_J} \cong W_J$.

$\square$

57. Satz

Sei (W,I) ein Coxetersystem und $J \subseteq I$ bel.
Sei weiter $w \in W_J$ bel. Dann gilt:

$$\ell(w) = \ell_I(w) = \ell_J(w).$$

<u>Beweis:</u> Induktion nach $\ell(w)$.

<u>IA:</u> $\ell(w) = 0 \Leftrightarrow w = 1 \Leftrightarrow \ell_J(w) = 0$

<u>IS:</u> Sei $\ell(w) > 0$.

Wir schreiben $w = i_1 \ldots i_k$ mit $i_\ell \in J$ für $\ell = 1, \ldots, k$
und $\ell_J(w) = k > 0$

Es gilt: $\ell_J(\underbrace{w \cdot i_k}_{\substack{!! \\ w'}}) < \ell_J(w)$

<u>Also:</u> $\ell_J(w' i_k) = \ell_J(w) \overset{*}{=} \ell_J(w') + 1$

Theorem 52 für (W_J, J)
$\Rightarrow$ $w'(b_{i_k}) > 0$

Theorem 52 für (W,I)
$\Rightarrow$ $\ell(w' i_k) = \ell(w') + 1$.

<u>Also:</u> $\ell(w) = \ell(w' i_k) = \ell(w') + 1 \overset{IV}{=} \ell_J(w') + 1 \overset{*}{=} \ell_J(w)$ $\square$

Zurück zu der Klassifikation der irr. endlichen Coxetergruppen.

<u>Theorem 2.23:</u> Gegeben sei ein irred. Coxetersystem (W, I) mit Coxetergraph Γ. Dann gilt:

$$\# W < \infty \iff \Gamma \text{ ist vom Typ:}$$
$$A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)$$

Heute zeigen wir „$\Leftarrow$"

Hilfsmittel: die geometrische Darstellung von W

58. Theorem:
Sei (W, I) ein irr. Coxetersystem und $\Phi: W \to GL(V)$ die geom. Darstellung von W bzgl. der Bilinearform B. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) B ist positiv definit

(ii) $\# W < \infty$.

<u>Beweisstrategie zu (i) $\Rightarrow$ (ii):</u> Topologischer Beweis

Erinnerung: Sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G. Wenn die Abb: $G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ stetig ist, so heißt $(G, \mathcal{T})$ <u>topologische Gruppe</u>.

<u>1. Schritt:</u> Da B positiv definit ist, ist B ein Skalarprodukt. Wir wählen eine orthonormal Basis von V und identifizieren $GL(V)$ mit $GL_n(\mathbb{R})$. Wir betrachten $GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ mit der von $\mathbb{R}^{n^2}$ induzierten Topologie.

Weiter gilt:

$$\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = id\}.$$

Die Gruppe $O_n(\mathbb{R})$ ist mit der induzierten Topologie von $GL_n(\mathbb{R})$ eine topologische Gruppe.

<u>2. Schritt:</u> z.z: $O_n(\mathbb{R})$ ist eine kompakte Teilmenge aus $GL_n(\mathbb{R})$.

Wir wenden Heine-Borel an: z.z: $O_n(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen und beschränkt.

<u>zu Abgeschlossenheit:</u> Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $A_k \in O_n(\mathbb{R})$ $\forall k \in \mathbb{N}$ eine konvergente Folge die gegen $A \in GL_n(\mathbb{R})$ konvergiert, (d.h. alle Koordinaten konvergieren.)

$$A^T \cdot A = \left(\lim_{k \to \infty} A_k^T\right) \cdot \left(\lim_{k \to \infty} A_k\right) = \lim_{k \to \infty} \left(A_k^T \cdot A_k\right)$$
$$= id.$$

$$\Rightarrow A \in O_n(\mathbb{R}).$$

<u>zu Beschränktheit:</u> Da alle Normen auf $\mathbb{R}^{n^2}$ äquivalent sind, reicht es die Beschränktheit bzgl. der Zeilensummennorm zu zeigen.

Sei $A \in O_n(\mathbb{R})$ bel. $\quad \exists K > 0$

Dann $\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \{ \|A_j\|_1 \} \leq K \cdot \max_{j=1,\dots,n} \{ \|A_j\|_2 \}$ $\uparrow$ ONB

$= K \cdot 1$

$\Rightarrow \quad A \in B_{K+1}(0).$

<u>3. Schritt:</u> <u>z.z.</u>: $\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Teilmenge.

Beweis: später

<u>4. Schritt:</u> z.z.: $\underbrace{\Phi(W)}_{\overset{!!}{H}} \subseteq \underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\overset{!!}{G}}$ ist abgeschlossen

Sei $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in H die gegen $g \in G$ konvergiert. <u>z.z.</u>: $g \in H$.

Wir betrachten die Folge $(h_k g^{-1})_{k \in \mathbb{N}}$. Es gilt: $h_k g^{-1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 1$.

Da H diskret ist, ex. eine offene Teilmenge $U \subseteq G$ von 1 mit $U \cap H = \{1\}$.

Da $G \times G \xrightarrow{\varphi} G$, $(g,h) \mapsto gh^{-1}$ stetig ist, ist $\varphi^{-1}(U) = \bigcup U_i \times U_j$ offen.

Weiter ex. $U_1 \times U_2$ mit $1 \in U_1$ und $1 \in U_2$ mit $U_1 \times U_2 \subseteq \bigcup U_i \times U_j$.

Da U_1, U_2 offene Umgebungen um 1 sind, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$h_k g^{-1} \in U_1, U_2 \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Dann gilt: $(h_k g^{-1}) \cdot (h_l g^{-1})^{-1} = h_k \cdot h_l^{-1} \in U \quad \forall\, k, l \geq n_0$

$$\Rightarrow \quad h_k = h_l \quad \forall\, k \geq n_0$$

Wir def. $h := h_k$ für $k = n_0$.

Dann $h_k \xrightarrow[k \to \infty]{} h$. Da der Limes eindeutig ist, folgt

$$g = h \in H.$$

5. Schritt: Jede diskrete und abgeschlossene Teilmenge Y eines kompakten topol. Raumes X ist endlich.

Beweis: Sei $y \in Y$ bel. Dann $\exists$ eine offene Umgebung U_y von y mit $U_y \cap Y = \{y\}$.

Dann: $$X = \underbrace{(X \setminus Y)}_{\text{offen}} \cup \left(\bigcup_{y \in Y} U_y \right)$$

$\overset{X \text{ kompakt}}{\Rightarrow}$ $\exists\, Y_0 \subseteq Y$, $\#Y_0 < \infty$: $$(X \setminus Y) \cup \left(\bigcup_{y \in Y_0} U_y \right)$$

Dann: $$Y = \left(\bigcup_{y \in Y_0} U_y \right) \cap Y = \bigcup_{y \in Y_0} (U_y \cap Y) = \bigcup_{y \in Y_0} \{y\} = Y_0.$$ $\square$

6. Schritt: $$W \cong \underbrace{\Phi(W)}_{\substack{\text{diskret} \\ + \text{ abgeschlossen}}} \subseteq \underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\text{kompakt}} \subseteq GL_n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow W$ ist endlich.

Kurze Wiederholung

58. Theorem:
Sei (W, I) ein irr. Coxetersystem und $\Phi: W \to GL(V)$ die geometrische Darstellung von W bzgl. der Bilinearform B.
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) B ist positiv definit

(ii) $\# W < \infty$

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii) topologischer Beweis

1. Schritt:
- $\Phi: W \longrightarrow GL(V) \overset{\text{ONB von } V}{\cong} GL_n(\mathbb{R})$
- $\Phi(W) \underset{\substack{\uparrow \\ B \text{ ist } W\text{-invariant}}}{\subseteq} O_n(\mathbb{R})$

2. Schritt: $O_n(\mathbb{R}) \subseteq GL_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$.
kompakt (mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}^{n^2}$).

3. Schritt: z.z.: $\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R})$ ist eine diskrete Teilmenge,

d.h.: sei $w \in W$ bel. Dann ex. eine offene Umgebung $U_{\Phi(w)}$ von $\Phi(w)$ s.d. gilt: $U_{\Phi(w)} \cap \Phi(W) = \{\Phi(w)\}$.

4. Schritt: $\Phi(W) \subseteq O_n(\mathbb{R})$ ist abgeschlossen

5. Schritt: Jede diskrete und abgeschlossene Teilmenge Y eines kompakten topol. Raumes X ist endlich.

6. Schritt:
$$W \cong \underbrace{\Phi(W)}_{\substack{\text{diskret} \\ + \text{abgeschlossen}}} \subseteq \underbrace{O_n(\mathbb{R})}_{\text{kompakt}} \overset{\text{5. Schritt}}{\Longrightarrow} W \text{ endlich.}$$

Zu Schritt 3: Z.Z.: $\Phi(W)$ ist diskret.

Wir betrachten die duale geometrische Darstellung von W

$$\Phi^*: W \to GL(V^*) \quad \text{wobei } V^* = \{f: V \to \mathbb{R} \mid f \text{ linear}\}$$

$$w \longmapsto \Phi^*(\omega): f \longmapsto [v \mapsto f(\Phi(\omega^{-1})(v))]$$

Weiter betrachten wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} & GL(V) \arrow[d, "\Theta"] \\ W \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] \arrow[dr, "\Phi^*"'] & {} \\ & GL(V^*) \end{tikzcd}$$

$$\Theta: GL(V) \to GL(V^*)$$
$$t \longmapsto [f \longmapsto [v \mapsto f \circ t^{-1}(v)]]$$

Es gilt: Sei $\omega \in W$ bel. Dann:

$$\Theta \circ \Phi(\omega)(f)(v) = f(\Phi(\omega)^{-1}(v)) \overset{\text{Def.}}{=} \Phi^*(\omega)(f)(v)$$

Also: $\Theta \circ \Phi = \Phi^*$

$\uparrow$

Homöomorphismus

Insbesondere: $\Theta: \Phi(W) \overset{\cong}{\to} \Phi^*(W)$.

Folglich: $\Phi(W)$ diskret $\Leftrightarrow$ $\Phi^*(W)$ diskret

Bemerkung: Sei G eine top. Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. H ist genau dann diskret, wenn es eine offene Umgebung U_1 von 1 ex. mit $U_1 \cap H = \{1\}$.

Denn: „$\Rightarrow$" klar

„$\Leftarrow$" Sei $h \in H$ bel. Dann ist $h \cdot \mathcal{U}_1$ eine offene Umgebung um h. Weiter gilt:

$$h \cdot \mathcal{U}_1 \cap H = \{h\}.$$

A: $\exists\ \tilde{h} \in H$ und $\tilde{h} \in h \cdot \mathcal{U}_1$.

Dann $\exists\ u_1 \in \mathcal{U}_1$ mit $\tilde{h} = h \cdot u_1$

$\Leftrightarrow\ h^{-1}\tilde{h} = u_1$

$\Rightarrow\ h^{-1} \cdot \tilde{h} \in \mathcal{U}_1$

Da $H \cap \mathcal{U}_1 = \{1\}$, folgt

$h^{-1} \cdot \tilde{h} = 1$

$\Leftrightarrow\ \tilde{h} = h.$

$\lrcorner$

Wir suchen also eine offene Umgebung $\mathcal{U}_{id}$ von $id \in \Phi^*(W)$ mit $\mathcal{U}_{id} \cap \Phi^*(W) = \{id\}$.

Wir definieren folgende Teilmengen:

$$H_i^+ = \{ f \in V^* \mid f(b_i) > 0\} \overset{\text{offen}}{\subseteq} V^*$$

$$H_i^- = \{ f \in V^* \mid f(b_i) < 0\} \overset{\text{offen}}{\subseteq} V^*$$

$$C := \bigcap_{i=1}^{n = \#I} H_i^+ \underset{\text{offen}}{\subseteq} V^*$$

Sei $\xi \in C$ bel. Wir def. $\Psi: GL(V^*) \to V^*$

$$g \mapsto g(\xi)$$

Ψ ist stetig und damit ist $\Psi^{-1}(C)$ offen.

Weiter definieren wir:

$$U_{id} := \Psi^{-1}(C) = \{ g \in GL(V^*) \mid g(\xi) \in C \} \overset{\text{offen}}{\subseteq} GL(V^*)$$

z.z: $U_{id} \cap \Phi^*(W) = \{id\}$.

A: nicht, dann $\exists \overset{w \in W,}{w \neq 1}$ mit $\Phi^*(w) \in U_{id}$.

Wir schreiben $w = i_1 \dots i_k$ mit $i_\ell \in I$ für $\ell = 1, \dots, k$
und $\ell(w) = k > 0$.

Dann: $\ell(i_1 w) < \ell(w)$

$$\Rightarrow \ell(w^{-1} i_1) < \ell(w)$$

$$\Rightarrow w^{-1}(b_{i_1}) \overset{*}{<} 0$$

Weiter haben wir:

$$\Phi^*(w)(\xi)(b_{i_1}) \overset{\text{Def.}}{=} \xi(\underbrace{\Phi(w^{-1})(b_{i_1})}_{\overset{*}{<} 0})$$

[Also $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_{\leq 0}$ mit
$\Phi(w^{-1})(b_{i_1}) = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$]

$$= \xi(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n)$$

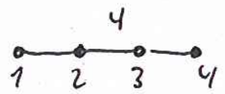
$$= \lambda_1 \underbrace{\xi(b_1)}_{>0} + \dots + \lambda_n \underbrace{\xi(b_n)}_{>0}$$

$$< 0 \Rightarrow \Phi^*(w) \notin U_{id}.$$

□

ÜA Gegeben sei ein Coxetersystem (W, I) mit Coxetergraph Γ vom Typ A_n ($B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(m)$). Dann ist W endlich.

Beispiel:

F_4 

Coxetermatrix $(m_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Gram-Matrix $(B(b_i, b_j))_{ij} = \left(-\cos \frac{\pi}{m_{ij}}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

- B ist positiv definit $\Leftrightarrow$ Gram-Matrix von B ist positiv definit
  $\Leftrightarrow$ Alle Hauptminoren von der Gram-Matrix sind positiv

Also: $\det(1) = 1$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$\det\left((B(b_i, b_j))_{ij} \right) > 0$$

$\overset{\text{Theorem 58.}}{\Longrightarrow}$ Die Coxetergruppe vom Typ F_4 ist endlich.