Geometrische Gruppentheorie

Konzept: Gruppen $\overset{\text{„schön"}}{\curvearrowright}$ Räume

$$G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$$

algebraische Eigenschaften — geometrische Eigenschaften

- Wir wollen Gruppen „geometrisch" verstehen.
- Gegeben eine Gruppe (z.B. $GL(V)$)

  $\rightsquigarrow$ konstruiere einen Raum auf welchem diese Gruppe „schön" wirkt.

In dieser Vorlesung: Räume $\rightsquigarrow$ Gebäude
(Verallgemeinerungen projektiver Räume)

Geplante Themen:

- projektive Geometrie
- Coxetergruppen
- Gebäude
- verallgemeinerte n-Ecke
- Gruppen mit Tits-Systemen
- Zur Klassifikation sphärischer und affiner Gebäude

Literatur:

- Ronan, Lectures on Buildings

...

§1 Projektive Geometrie

Im folgenden sei K ein Körper und V ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum über K.

<u>Idee:</u> $GL(V) \overset{\text{„schön"}}{\curvearrowright}$ Raum mit "viel" Struktur

$\rightsquigarrow$ konstruiere aus dem Vektorraum V einen Raum auf dem die Gruppe $GL(V)$ „schön" wirkt.

$\rightsquigarrow$ betrachte Unterräume von V.

Die <u>projektive Geometrie</u> <u>zu V</u> ist die durch „$\subseteq$" partiell geordnete Menge

$$PG(V) = \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum}, \; 0 \neq U \neq V \}$$

der echten nichttrivialen Unterräume.

Eine <u>Fahne</u> ist eine aufsteigende Kette von Unterräumen

$$0 \neq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \dots \subsetneq U_k \subsetneq V$$

Wir schreiben kurz: $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$.

Die <u>Länge</u> der Fahne ist k.

Offensichtlich ist $\underline{\underline{n}}$ die maximale Länge einer Fahne und jede Fahne ist in einer Fahne der Länge n enthalten. $\boxed{\text{ÜA}}$

Struktur maximaler Fahnen:

Ist $\{b_1, \dots, b_{n+1}\}$ eine Basis von V, so ist

$$\{ U_j := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_j\} \mid 1 \leq j \leq n \}$$ eine maximale Fahne.

und jede maximale Fahne entsteht so. $\boxed{\text{ÜA}}$

Bemerkung: Maximale Fahnen sind wichtige Bausteine und kriegen deshalb einen Namen. Maximale Fahnen nennen wir <u>Kammern</u>.

1. Definition

Der <u>Fahnenkomplex</u> $\Delta(V)$ ist die Menge aller Fahnen mit der Inklusion „$\subseteq$" von Fahnen als partielle Ordnung. Dabei erlauben wir die leere Fahne $\{\}$.

Kurze Zusammenfassung:

Wir haben aus dem Vektorraum V eine partiell geordnete Menge $\Delta(V)$ konstruiert.

Die Gruppe $GL(V)$ operiert auf $PG(V)$ und auf $\Delta(V)$ wie folgt:

$$GL(V) \times PG(V) \to PG(V)$$
$$(g, \ U = \langle u_1, \ldots, u_k \rangle) \longmapsto g(U) = \langle g(u_1), \ldots, g(u_k) \rangle$$

$$\Phi: GL(V) \times \Delta(V) \to \Delta(V)$$
$$(g, \ \{U_1, \ldots, U_k\}) \longmapsto \{g(U_1), \ldots, g(U_k)\}$$

Es gilt: $\ker(\Phi) = Z(GL(V)) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix} \ \middle| \ \lambda \in K^* \right\}$, $\boxed{\text{üA}}$

wobei wir hier $\Phi: GL(V) \to Sym(\Delta(V))$ betrachten.

<u>Also:</u> $$GL(V) / Z(GL(V)) =: PGL(V) \hookrightarrow Sym(\Delta(V)).$$

Weiteres Vorgehen: Untersuche $\Delta(V)$ auf weitere "schöne" Strukturen.

2. Definition

Sei X eine Menge und $\Delta \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Menge von endlichen Teilmengen von X. Wir nennen $(\Delta, \subseteq)$ einen Simplizialkomplex, wenn gilt:

$$\text{aus } a \subseteq b \in \Delta \text{ folgt stets } a \in \Delta,$$

d.h. Δ ist abgeschlossen unter Abstieg.

Die Elemente von Δ heißen <u>Simplizes</u>. Die <u>Dimension</u> eines Simplex $a \in \Delta$ ist k, falls $\# a = k+1$ gilt.

Allgemeiner nennen wir eine partiell geordnete Menge auch Simplizialkomplex, wenn sie zu so einem $(\Delta, \subseteq)$ ordnungsisomorph ist.

Konstruktion:
Ist $(P, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, so ist ΔP die Menge aller endlichen aufsteigenden Ketten in P, $\{x_1 \lneq x_2 \lneq \ldots \lneq x_k\}$.
Offensichtlich ist $(\Delta P, \subseteq)$ ein Simplizialkomplex, insbesondere ist

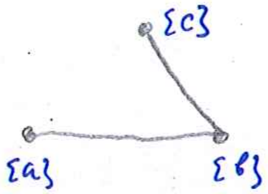
$$\Delta(V) = \Delta PG(V) \text{ ein } (n-1)\text{-dim. Simplizialkomplex.}$$

3. Definition

$\Delta' \subseteq \Delta$ heißt Unterkomplex, falls Δ' unter Abstieg abgeschlossen ist.

4. Beispiel / geometrische Interpretation

$$\Delta = \{ \{\}, \underbrace{\{a\}, \{b\}, \{c\}}_{\substack{0\text{-dim.}\\ \text{Simplizes}}}, \underbrace{\{a,b\}, \{b,c\}}_{\substack{1\text{-dim.}\\ \text{Simplizes}}} \}$$



Zurück zu $\Delta(V)$

$\rightsquigarrow$ wichtige Unterkomplexe

5. Definition

Ist $\{b_1, \dots, b_{n+1}\} = \mathcal{B}$ eine Basis von V, so sei $\Sigma(\mathcal{B})$ die Menge aller Fahnen $\{U_1, \dots, U_k\}$ für die gilt:

jedes U_j wird von einer Teilmenge von $\mathcal{B}$ aufgespannt.

Dann ist $\Sigma(\mathcal{B})$ ein Unterkomplex von $\Delta(V)$.

Wir nennen $\Sigma(\mathcal{B})$ ein Apartment.

6. Lemma

Seien $c = \{U_1, \dots, U_n\}$ zwei Kammern in $\Delta(V)$.
$c' = \{W_1, \dots, W_n\}$

Dann existiert ein Apartment $\Sigma(\mathcal{B})$ mit $c, c' \in \Sigma(\mathcal{B})$.

Genauer: Dann gibt es eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(n+1)$ und eine Basis $\{b_1, \dots, b_{n+1}\} = \mathcal{B}$ mit

$$U_j = \mathrm{span}\,\{b_1, \dots, b_j\}$$
$$W_j = \mathrm{span}\,\{b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}\} \qquad 1 \leq j \leq n.$$

<u>Beweis:</u> Induktion nach n.

<u>$n=1$</u> Also ist V ein 2-dim. Vektorraum und U_1, W_1 sind 1-dim. Untervektorräume.

<u>1. Fall:</u> $\underset{\langle b_1 \rangle}{\underset{\shortparallel}{U_1}} = W_1 \quad \rightsquigarrow \pi = \mathrm{id}$ wähle $b_2 \in V \setminus U_1$ und setze $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$.

<u>2. Fall:</u> $\underset{\langle b_1 \rangle}{\underset{\shortparallel}{U_1}} \neq \underset{\langle b_2 \rangle}{\underset{\shortparallel}{W_1}} \quad \rightsquigarrow V = U_1 \oplus W_1$

Setze $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ und $\pi = (1\,2)$

$n-1 \leadsto n$

1. Fall: $U_n = W_n$.

Dann sind $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$ Kammern in $\Delta(U_n)$.
$\{U_1, \ldots, W_{n-1}\}$

Nach IV gibt es $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ sowie Basis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von U_n mit

$$U_j = \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_j\} \qquad 1 \leq j \leq n-1$$
$$W_j = \mathrm{span}\{b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(j)}\}$$

Wähle $b_{n+1} \in V \setminus U_n$ und setze $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ und $\pi(n+1) = n+1$.

2. Fall: $U_n \neq W_n$

Setze $U_0 = W_0 = 0$ und $U_{n+1} = W_{n+1} = V$.

Wir betrachten nun: $\{U_0, U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}\}$
$\{W_0, W_1, \ldots, W_n, W_{n+1}\}$.

Weiter schneiden wir diese Mengen mit U_n:

$\{U_0 \cap U_n, \ldots, U_n \cap U_n, U_{n+1} \cap U_n\} = \{U_0, \ldots, U_n\}$

$\leadsto$ $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$ ist eine Kammer in $\Delta(U_n)$.

Setze $W_j' = W_j \cap U_n$ und $k := \max\{i \mid W_i \subseteq U_n\}$.

Es gilt: $0 \leq k < n$.

Weiter gilt: $W_k' \overset{\text{Def.}}{=} W_k \cap U_n \overset{\text{Def. v. } k}{=} \underbrace{W_k}_{k\text{-dim.}} \subseteq \underbrace{W_{k+1} \cap U_n}_{k\text{-dim.}} = W_{k+1}'$

$\Rightarrow W_k' = W_{k+1}'$.

Wir erhalten also:

$\{ W_0', W_1', \dots, W_k', W_{k+1}', \dots, W_{n+1}' \}$

$= \{ W_0, W_1, \dots, W_k, W_{k+2}', \dots, W_n', W_{n+1}' \}$

$\rightsquigarrow \{ W_1, \dots, W_k, W_{k+2}', \dots, W_n' \}$ ist eine Kammer in U_n.

Nach IV gibt es eine Basis $\{ b_1, \dots, b_n \}$ von U_n und $\pi \in \mathrm{Sym}(n)$ mit:

$$U_j := \mathrm{span}\{ b_1, \dots, b_j \} \qquad 1 \leq j \leq n-1$$
$$W_j = \mathrm{span}\{ b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \} = W_j' \qquad j \leq k$$
$$W_{j+1}' = \mathrm{span}\{ b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)} \} \qquad j \geq k$$

Wähle $b_{n+1} \in W_{k+1} \setminus U_n$, also $W_{k+1} = W_k \oplus b_{n+1} K$.

Es folgt: $W_{j+1} = \mathrm{span}\{ b_{\pi(1)}, \dots, b_{\pi(j)}, b_{n+1} \}$ $j \geq k$.

Setze $\mathcal{B} := \{ b_1, \dots, b_{n+1} \}$ und passe π an. $\square$

#

Zusammenfassung:

- Sei V ein $(n+1)$-dim. Vektorraum

$$PG(V) := \{ U \subseteq V \mid U \text{ Unterraum}, 0 \neq U \neq V \}$$

$$\Delta(V) = \{ \underbrace{\{U_1, \ldots, U_k\}}_{\text{Fahne}} \mid U_i \in PG(V),\ k \in \mathbb{N} \} \cup \{ \underbrace{\{\ \}}_{\text{leere Fahne}} \}$$

$$GL(V) \overset{\text{„natürlich"}}{\curvearrowright} \Delta(V)$$

- Struktur von $\Delta(V)$
  - Simplizialkomplex der Dimension $n-1$
  - Wichtige Elemente: Kammern
  - Wichtige Unterkomplexe: Apartments $\Sigma(\mathcal{B})$

6. Lemma:

Seien $c = \{U_1, \ldots, U_n\}$ zwei Kammern in $\Delta(V)$.
$c' = \{W_1, \ldots, W_n\}$

Dann gibt es eine Permutation $\pi \in \mathrm{Sym}(n+1)$ und eine Basis $\{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ von V mit

$$\left.\begin{aligned} U_j &= \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_j\} \\ W_j &= \operatorname{span}\{b_{\pi(1)}, \ldots, b_{\pi(j)}\} \end{aligned}\right. \quad 1 \leq j \leq n$$

Bemerkung: Man kann zeigen, dass π durch die beiden Kammern c, c' eindeutig bestimmt ist. $\boxed{\text{ÜA}}$

Wir bezeichnen mit $\operatorname{cham}(\Delta(V))$ die Menge aller Kammern in $\Delta(V)$.

Da π nicht von der Wahl der Basis abhängt, erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung:

$$\delta : \operatorname{cham}(\Delta(V)) \times \operatorname{cham}(\Delta(V)) \to \operatorname{Sym}(n+1)$$

$$(c, c') \longmapsto \pi$$

Beispiel:

- $V = \mathbb{F}_2^3$

$$c = \{ \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle}_{= U_1}, \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle}_{U_2} \}$$

$$c' = \{ \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle}_{W_1}, \underbrace{\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle}_{W_2}$$

Wähle Basis $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \}$ und def. $\pi := (2\ 3)$.

Dann $c = \{ \langle b_1 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle \}$ und

$$c' = \{ \langle b_{\pi(1)} \rangle, \langle b_{\pi(1)}, b_{\pi(2)} \rangle.$$

Lemma:
Bezeichne mit s_i die Transposition $(i, i+1) \in \operatorname{Sym}(n+1)$. Dann hat δ folgende Eigenschaften:

(i) Sind $c, c' \in \operatorname{cham}(\Delta(V))$, so definiert

$$c \underset{s_i}{\sim} c' :\Leftrightarrow \delta(c, c') \in \{ id, s_i \}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\operatorname{cham}(\Delta(V))$.

(ii) Sind $c = \{ U_1, \ldots, U_n \}$, $c' = \{ W_1, \ldots, W_n \} \in \operatorname{cham}(\Delta(V))$,

so gilt: $\delta(c, c') = s_i \Leftrightarrow U_j = W_j \ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$ und $U_i \neq W_i$

(iii) Sind $c, c' \in \text{cham}(\Delta(V))$ mit $\delta(c,c') = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}$,

so existieren $c_1, .., c_{m-1} \in \text{cham}(\Delta(V))$ mit

$$c \underset{s_{i_1}}{\sim} c_1 \sim \dots \sim \underset{s_{i_{m-1}}}{\sim} c_{m-1} \underset{s_{i_m}}{\sim} c'$$

Beweis: $\boxed{\text{üA}}$

Später: δ ist eine $\text{Sym}(n+1)$-wertige Abstandsfunktion, gibt den kürzersten Weg in $\text{cham}(\Delta(V))$ zwischen zwei Kammern an.

8. Definition

Ein Kammernsystem über einer Indexmenge I ist eine Menge K mit Äquivalenzrelationen $\underset{i}{\sim}$ für $i \in I$.

Die Elemente in K heißen Kammern (chamber).

Eine Gallerie in K ist eine endliche Folge von Kammern $(c_0, c_1, \dots, c_\ell)$, $c_{k-1} \neq c_k$ $\forall\, k, m \in \{0, \dots, \ell\}$, so dass gilt:

$$c_k \underset{i_{k+1}}{\sim} c_{k+1} \quad \forall\ 0 \leq k \leq \ell - 1 .$$

Sei $J \subseteq I$. Eine Gallerie $(c_0, .., c_\ell)$ heißt J-Gallerie, falls $i_k \in J$ für $0 \leq k \leq \ell - 1$.

K heißt zusammenhängend (J-zusammenhängend), falls je zwei Kammern durch eine Gallerie (J-Gallerie) verbunden werden können.

Die J- Zusammenhangskomponenten heißen <u>J- Residuen</u>.

Einem "schönen" Kammernsystem K über I kann man „natürlich" einen Simplizialkomplex zuordnen. Grobe Skizze:

<u>Kammernsystem K über I</u>		<u>Simplizialkomplex</u>
Elemente in K	$\rightsquigarrow$	Simplizes der Dimension $\#I$
$\{i\}$ - Residuum, $i \in I$	$\rightsquigarrow$	Simplizes der Kodimension 1
$\{i,j\}$ - Residuum, $i,j \in I$, $i \neq j$	$\rightsquigarrow$	Simplizes der Kodimension 2

<u>verschiedene Sichtweisen:</u>

<u>Simplizialkomplexe</u>

- werden aus kleinen Bausteinen zusammengebaut
  - 0- Simplizes
    $\rightsquigarrow$ 1- Simplizes

    ...

<u>Kammernsysteme</u>

- wir fangen mit Kammern an

Wann sind diese benachbart?

$\rightsquigarrow$ wenn sie äquivalent sind.

...

9. Beispiel:

$\mathrm{cham}(\Delta(V))$ ist ein Kammernsystem über

$$I := \{(1,2); \ldots; (n,n+1)\}.$$

10. „grobe" Definition:

Ein <u>Gebäude</u> $\mathcal{B}$ ist ein Kammernsystem über I ~~mit~~ mit einer „Abstandsfunktion" $\delta : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \to (W, I)$

Coxetersystem (-gruppe)

11. Beispiel:

$\mathrm{cham}(\Delta(V))$ ist ein Gebäude, wobei

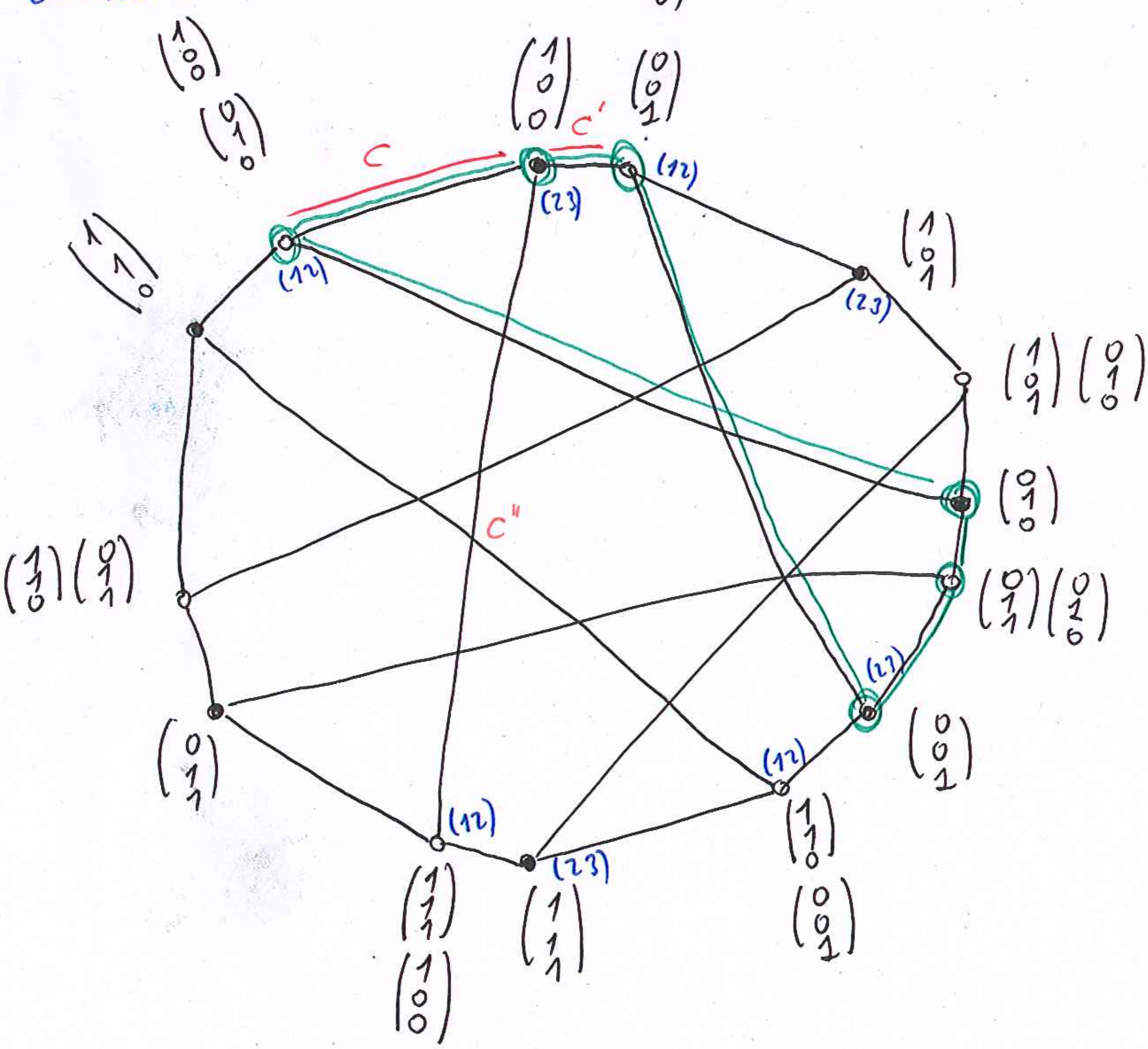
$$\delta : \mathrm{cham}(\Delta(V)) \times \mathrm{cham}(\Delta(V)) \to (\mathrm{Sym}(n+1), \{(1\,2), \ldots, (n, n+1)\}).$$

Bevor wir Gebäude exakt definieren können, müssen wir uns mit der Theorie der Coxetergruppen auseinander setzen.

Beispiel

$K = \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, $V = \mathbb{F}_2^3$

- $\Delta(V)$ ist ein 1-dim. Simplizialkomplex.
- $\Delta(V)$ hat 14 Ecken und 21 Kanten.
- Jede Ecke in $\Delta(V)$ ist vom Grad 3, d.h. jeder 2-dim. UVR hat genau drei eindim. UVR und jeder eindim. UVR liegt in genau drei zweidim. UVR.



$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\Sigma(\mathbb{B}) =$ 

$c = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ $c' = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \subseteq \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ $\delta(c, c') = (23)$