§6 Residuen

1. <u>Def</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Das <u>Residuum</u> von f in c ist $\operatorname{Res}_c(f) = a_{-1}$, wobei $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ die Laurententwicklung von f auf $K_{0,s}(c) \subseteq \Omega$ ist, vgl. §5.8 (Entwicklungssatz von Laurent). Für $0<t<s$ gilt also

$$\operatorname{Res}_c(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=t} f(z)\,dz .$$

2. <u>Lemma</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Dann ist $a = \operatorname{Res}_c(f)$ die eindeutig bestimmte Zahl $a \in \mathbb{C}$, für die $g(z) = f(z) - \dfrac{a}{z-c}$ eine Stammfunktion auf $K_{0,s}(c) \subseteq \Omega$ hat.

<u>Beweis</u> $g(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq -1}}^{\infty} b_k (z-c)^k$, $b_{-1} = 0$, hat Stammfunktion $G(z) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{b_{k-1}}{k} (z-c)^k$ auf $K_{0,s}(c)$.

Weiter gilt $\displaystyle\int_{|z-c|=\varepsilon} \left(f(z) - \frac{\lambda}{z-c}\right) dz = 2\pi i (a_{-1} - \lambda)$

also hat $f(z) - \frac{\lambda}{z-c}$ keine Stammfunktion für $\lambda \neq a_{-1}$. $\square$ #

Wir stellen einige Rechenregeln für Residuen zusammen.

3. Beobachtungen

(i) Ist c ein Pol 1. Ordnung von f, so gilt

$$\mathrm{Res}_c(f) = \lim_{z \to c} (z-c) f(z).$$

Denn: $f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (z-c)^k \qquad a_{-1} \neq 0$ $\square$

(ii) Sind f, g holomorph in $B_\varepsilon(c)$, $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, $g'(c) \neq 0$

so gilt $\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(c)}{g'(c)}$

Denn: $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k (z-c)^k \qquad b_1 = g'(c)$

$$=: (z-c) g'(c) + (z-c)^2 \cdot \underbrace{\tilde{g}(z)}_{\text{holomorph}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1}{(z-c)} \underbrace{\frac{f(z)}{g'(c) + (z-c) \cdot \tilde{g}(z)}}_{\text{hol. nahe } c} \Rightarrow \text{Pol 1. Ordnung}$$

Nach (i) gilt $\mathrm{Res}_c\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f(c)}{g'(c)}$. $\square$

(iii) Ist $f(z) = (z-c)^{-m} \cdot g(z)$, $g \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(c))$, $m \geq 1$

so gilt $\mathrm{Res}_c(f) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot g^{(m-1)}(c)$

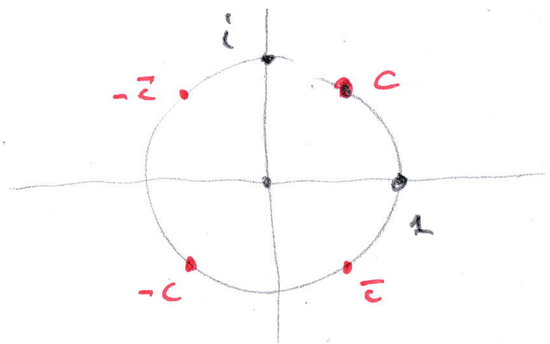
Denn: $f(z) = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k (z-c)^k$, $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-m} \cdot (z-c)^k$

$$\mathrm{Res}_c(f) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(c) \qquad \square$$

4. Beispiele

(a) $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ $\qquad c = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$c^2 = i$



$$1+z^4 = (z-c)(z-\bar{c})(z+c)(z+\bar{c})$$
$$= (z^2-i)(z^2+i)$$

$\Rightarrow f$ hat Pol 1. Ordnung in c

Nach §6.3(ii) gilt $\mathrm{Res}_c(f) = \frac{c^2}{4c^3} = \frac{i}{4ic} = \frac{1}{4c}$

$$= \frac{1}{4}\bar{c} = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1-i)$$

(b) $p \in \mathbb{R}$, $p > 1$, $f(z) = \frac{4z}{(z^2+2pz+1)^2}$

Pole in $c_\pm = -p \pm \sqrt{\underbrace{p^2-1}_{>0}}$

$$f(z) = \frac{4z}{(z-c_-)^2 \cdot (z-c_+)^2} = \frac{1}{(z-c_+)^2} \cdot \underbrace{\frac{4z}{(z-c_-)^2}}_{= g(z)}$$

Bem. § 6.3(iii)

$$g'(z) = \frac{4\cdot(z-c_-)^2 - 8z(z-c_-)}{(z-c_-)^4} = \frac{4(z-c_-) - 8z}{(z-c_-)^3} = \frac{-4z - 4c_-}{(z-c_-)^3} = -4 \cdot \frac{(z+c_-)}{(z-c_-)^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{c_+}(f) = g'(c_+) = -4\,\frac{(c_+ + c_-)}{(c_+ - c_-)^3} = -4\,\frac{-2p}{(2\sqrt{p^2-1})^3} = \frac{p}{(\sqrt{p^2-1})^3}$$

5. <u>Def</u> Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ein stückweise stetig diff'barer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Sei $c \in \mathbb{C} - \gamma([a,b])$. Der <u>Index</u> oder die <u>Windungszahl</u> von γ in c ist

$$\mathrm{Ind}_\gamma(c) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_\gamma \frac{1}{z-c}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - c}\,dt$$

6. Satz Die Windungszahl ist ganzzahlig,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-c}\,dz \in \mathbb{Z}$$

wenn γ stückweise stetig diff'bar ist, $\gamma(a) = \gamma(b)$
$c \notin \gamma([a,b])$.

Bew. Setze $h(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-c}\,ds$ $\Rightarrow$ h stetig und

$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-c}$$ (außer an den Stellen, wo γ nicht diff'bar ist)

Betrachte $\varphi(t) = \exp(-h(t))(\gamma(t)-c)$ stetig

$$\varphi'(t) = -h'(t)\exp(-h(t))(\gamma(t)-c) - \exp(-h(t))\,\gamma'(t) = 0$$ wo immer γ stetig diff'bar ist

$\Rightarrow$ $\varphi(t) = \text{const} = \gamma(a) - c$

$\Rightarrow$ $\exp(h(t)) = \frac{\gamma(t)-c}{\gamma(a)-c}$ $\Rightarrow$ $\exp(h(b)) = 1$

$\Rightarrow$ $h(b) = 2\pi i l$ für ein $l \in \mathbb{Z}$, vgl § 2.19 $\square$

7. **Def** Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig diff'bar, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Das Innere von γ ist

$$\operatorname{Inn}(\gamma) = \{ c \in \mathbb{C} \mid c \notin \gamma([a,b]),\ \operatorname{Ind}_\gamma(c) \neq 0 \}.$$

Ist $\operatorname{Inn}(\gamma) \neq \emptyset$ und ist $\operatorname{Ind}_\gamma(c) = 1$ für alle $c \in \operatorname{Inn}(\gamma)$, so heißt γ einfach geschlossener Weg.

Bsp (a) $\gamma(t) = r \cdot \exp(it)$ $\quad r > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\operatorname{Inn}(\gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \}$, vgl. §3.9

und γ ist einfach geschlossen

(b) $\gamma(t) = r \cdot \exp(-it)$ $\quad r > 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

$\operatorname{Inn}(\gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \}$

$\operatorname{Ind}_\gamma(c) = -1$ für alle $c \in \operatorname{Inn}(\gamma)$

(c) $\gamma(t) = r \cdot \exp(it)$, $r > 0$, $\quad 0 \leq t \leq 4\pi$

$\operatorname{Inn}(\gamma) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < r \}$

$\operatorname{Ind}_\gamma(c) = 2$ für alle $c \in \operatorname{Inn}(\gamma)$.

8. Def Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ ein stückweise stetig diff'barer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Falls für alle $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ gilt $\int_\gamma f(z)dz$, so heißt γ nullhomologer Weg.

Bsp Ω sternförmig $\Rightarrow$ jedes solche γ ist nullhomolog nach Cauchys Integralsatz §3.8

9. Theorem (Residuensatz) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig diff'bar, $\gamma(a) = \gamma(b)$ und sei γ nullhomolog.
Sei $E \subseteq \Omega$ endlich mit $E \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$.
Dann gilt für $f \in \mathcal{O}(\Omega - E)$ die Formel

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_{c \in E} \mathrm{Res}_c(f) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c)$$

Beweis Sei $E = \{c_1, \dots, c_m\}$, sei f_k der Nebenteil von f in c_k, $f_k \in \mathcal{O}(\mathbb{C} - \{c_k\})$, vgl. §5.5, $f_k(z) = \sum_{j=-1}^{-\infty} a_{k,j}(z - c_k)^j$

Setze $\tilde{f}_k(z) = \sum_{j=-2}^{-\infty} a_{k,j} \cdot (z-c)^j \Rightarrow \tilde{f}_k$ hat

Stammfunktion $\tilde{F}_k$ auf $\mathbb{C} - \{c_k\}$, also

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f_k(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{a_{k,-1}}{z-c_k}\,dz = \mathrm{Res}_{c_k}(f) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c_k)$$

Weiter ist $g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z)$ holomorph auf

$\Omega - E$ mit hebbaren Singularitäten in $c_1, \dots, c_m$

$\Rightarrow$ g hat holomorphe Fortsetzung $\tilde{g}$ auf Ω $\Rightarrow$

$$\int_\gamma g(z)\,dz = \int_\gamma \tilde{g}(z)\,dz = 0$$

$\uparrow$ γ nullhomolog.

Es folgt $\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}_{c_k}(f) \cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c_k)$ $\square$

#

Ist Ω sternförmig, so ist jeder geschlossene stw. stetig diffbare Weg in Ω nullhomolog.

Wenn γ zusätzlich <u>einfach geschlossen</u> ist, wird die Formel im Residuensatz einfacher.

10. __Satz__ Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig diff'bar, mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Die Abbildung $w \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma(w)$ ist stetig auf $U = \mathbb{C} - \gamma([a,b])$.

Ist $r > 0$, $c \in \mathbb{C}$ mit $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(c)$, so gilt

$\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w-c| > r$.

__Beweis__ $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z-w}\, dz$ ist stetig auf $\mathbb{C} - \gamma([a,b])$ nach §5.6.

Ist $\gamma([a,b]) \subseteq B_r(c)$, so ist $\mathrm{Ind}_\gamma(w)$ stetig auf $\mathbb{C} - B_r(c)$ und ganzzahlig, also __konstant__, denn $X := \mathbb{C} - B_r(c)$ ist __wegzush.__:

$w_1, w_2 \in X \rightsquigarrow$ es gibt stetigen Weg $\lambda : [0,1] \to X$, $\lambda(0) = w_1$, $\lambda(1) = w_2$, $s \mapsto \mathrm{Ind}_\gamma \lambda(s)$ ist stetig und ganzzahlig, nach ZWS also konstant $\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(w_1) = \mathrm{Ind}_\gamma(w_2)$.

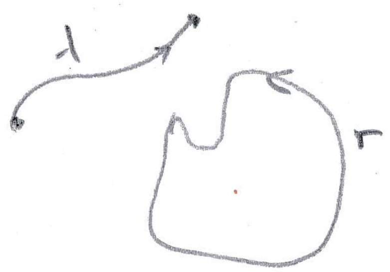
Es gilt $|\mathrm{Ind}_\gamma(w)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot L(\gamma) \cdot \max\left\{ \frac{1}{|z-w|} \;\middle|\; z \in B_r(c) \right\}$

und $|z-w| \geq |w-c| - r$. Es folgt

$\lim_{w \to \infty} |\mathrm{Ind}_\gamma(w)| = \infty$ und damit $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$ für $|w-c| > r$. $\square$

Korollar Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stw. stetig diffbar, $\gamma(a) = \gamma(b)$, und ist $\lambda : [0,1] \to \mathbb{C} - \gamma([a,b])$ stetig, so gilt

$$\mathrm{Ind}_\gamma(\lambda(0)) = \mathrm{Ind}_\gamma(\lambda(1))$$

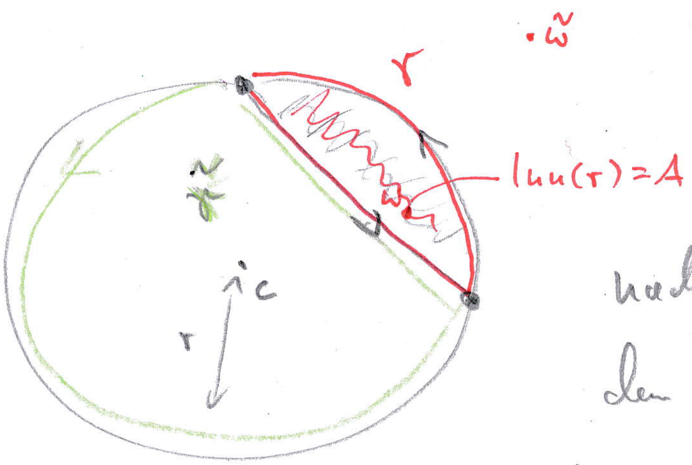


III. Einige einfach geschlossene Wege in $\mathbb{C}$.

(a) Für $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$ ist $\gamma(t) = c + r \cdot \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$ einfach geschlossen, mit $\mathrm{Inn}(\gamma) = B_r(c)$.

Das folgt aus §3.9, $$\int_{|z-c|=r} \frac{1}{z-w}\,dz = \begin{cases} 0 & |z-w| > r \\ 2\pi i & |z-w| < r \end{cases}$$

(b) Betrachte eine Sehne im Kreis und den zugehörigen Kreisabschnitt.



Für $w \in A$ gilt

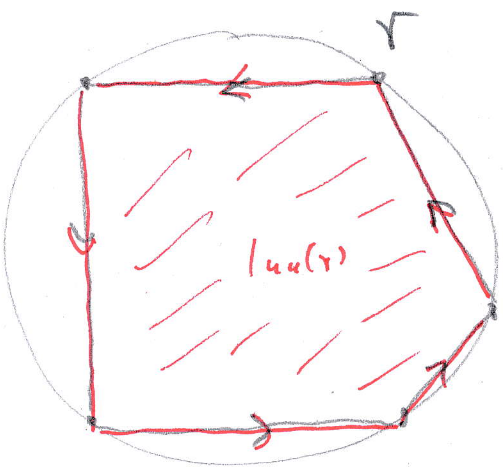
$$\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}}(w) = 0$$

nach dem Korollar oben, denn $\mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}}(w) = \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}}(\tilde{w})$ für $\tilde{w}$ mit $|\tilde{w} - c| > r$

Es gilt $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z-c|=r} \frac{1}{z-w}\,dz = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{1}{z-w}\,dz + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde\gamma} \frac{1}{z-w}\,dz}_{=0}$

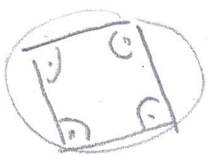
$\Rightarrow A \subseteq \mathrm{Inn}(\gamma)$. Da $\mathbb{C} - \bar{A}$ wegzush. ist, folgt $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 0$ für $w \in \mathbb{C} - \bar{A}$, also $\mathrm{Inn}(\gamma) = A$ und γ ist einfach geschlossen.

(c) Ist γ ein geschlossener Polygonzug, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, so ist γ einfach geschlossen und $\mathrm{Inn}(\gamma)$ ist das zugehörige Polygon.

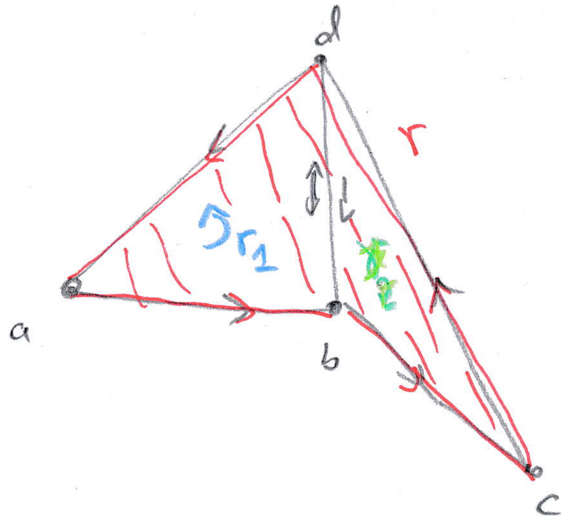


Das folgt aus (b) durch Addition

Insbesondere ist ein Weg längs <u>Dreiecksseiten</u> einfach geschlossen, genauso ein Weg längs der Seiten eines Rechtecks



(d) Durchläuft γ die Seiten eines Vierecks in $\mathbb{C}$ (gegen den Uhrzeigersinn), so ist γ einfach geschlossen und das Viereck ist das Innere von γ. Denn:



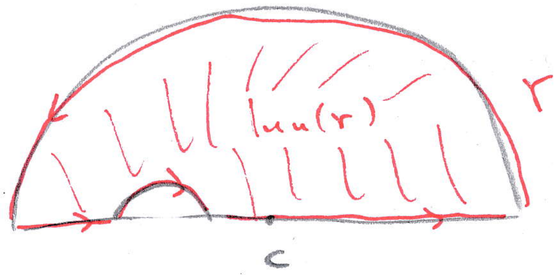
$\mathrm{Inn}(\gamma) \supseteq \mathrm{Inn}(\gamma_1) \cup \mathrm{Inn}(\gamma_2)$

$w \in \mathrm{Inn}(\gamma_1) \cup \mathrm{Inn}(\gamma_2)$

$\Rightarrow \mathrm{Ind}_\gamma(w) = 1$

Da Ind_γ stetig ist, folgt $\mathrm{Ind}_\gamma(w) = 1$, wenn w auf der Strecke $b\,d$ liegt

(e)



γ ist einfach geschlossen (mit (a)).

12. <u>Def</u> Sei $f \in \mathcal{O}(K_{0,s}(c))$ mit

Laurententwicklung $f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z-c)^k$, $a_m \neq 0$, $m \in \mathbb{Z}$

(also ohne wesentliche Singularität in c)

Ist $m \geq 0$, so heißt m <u>Nullstellenordnung</u> in c,

schreibe $m = n_c(f)$

Ist $m \leq -1$, so ist $-m$ die <u>Polstellenordnung</u> in c,

vgl. §5.10, schreibe $-m = p_c(f)$.

In jedem Fall gilt $f(z) = (z-c)^m \cdot \tilde{f}(z)$,

$\tilde{f} \in \mathcal{O}(B_s(c))$ und $\tilde{f}(c) \neq 0$.

13. <u>Satz</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, sei $h \in \mathcal{O}(\Omega)$,

sei $c \in \Omega$ und $g \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$ <u>ohne</u> wesentliche

Singularität in c. Schreibe $g(z) = (z-c)^m \cdot \tilde{g}(c)$

$\tilde{g}(c) \neq 0$, $\tilde{g} \in \mathcal{O}(\Omega)$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}_c\left(h \cdot \frac{g'}{g}\right) = h(c) \cdot m = \begin{cases} h(c) \cdot n_c(f) & m \geq 0 \\ -h(c) \cdot p_c(f) & m < 0 \end{cases}$$

Denn $g'(z) = m(z-c)^{m-1} \cdot \tilde{g}(z) + (z-c)^m \cdot \tilde{g}'(z)$,

also
$$h(z)\frac{g'(z)}{g(z)} = \underbrace{h(z)\cdot\frac{m}{z-c}}_{\text{Pol 1. Ordnung in } c} + \underbrace{h(z)\cdot\frac{\tilde{g}'(z)}{\tilde{g}(z)}}_{\text{hol. auf } B_\varepsilon(c)}.$$

Mit §6.3 (c) folgt jetzt $\mathrm{Res}_c\left(h\cdot\frac{g'}{g}\right) = h(c)\cdot m$. $\square$

#

14. Satz Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ mit
$$P(f) = \{c \in \Omega \mid f(c) = \infty\}$$
$$N(f) = \{c \in \Omega \mid f(c) = 0\}$$
Sei $E = P(f) \cup N(f)$ endlich. Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stw. stetig diff'bar mit $\gamma(a) = \gamma(b)$ und sei γ nullhomolog in Ω. Sei $E \cap \gamma([a,b]) = \emptyset$. Dann gilt für jedes $g \in \mathcal{O}(\Omega)$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{c\in N(f)} n_c(f)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c)\cdot g(z)$$
$$- \sum_{c\in P(f)} p_c(f)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c)\cdot g(z).$$

Bew: Die Funktion $g(z)\cdot\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist holomorph auf $\Omega - E$. Nach dem Residuensatz § 6.9 gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{c\in E} \mathrm{Res}_c\left(g\cdot\frac{f'}{f}\right)\cdot \mathrm{Ind}_\gamma(c).$$

Bemerkung folgt § 6.13. $\square$

Korollar Sei f, γ wie im vorigen Satz, sei γ zusätzlich einfach geschlossen. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{c\in N(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} n_c(f) - \sum_{c\in P(f)\cap \mathrm{Int}(\gamma)} p_c(f)$$

$\square$

15. **Satz** (Satz von Rouché). Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ mit nur endlich viele Nullstellen in Ω.

Sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stw. stetig diff'bar, $\gamma(a) = \gamma(b)$, sei γ nullhomolog und einfach geschlossen. Falls für alle $t \in [a,b]$ gilt

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |g(\gamma(t))|,$$ so gilt

$$\sum_{c \in N(f) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n_c(f) = \sum_{c \in N(g) \cap \operatorname{Int}(\gamma)} n_c(g)$$

Beweis: Betrachte $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)}$ auf $\Omega - N(f)$.

Aus der Ungleichung oben folgt $f(\gamma(t)) \neq 0$, $g(\gamma(t)) \neq 0$ für $t \in [a,b]$.

Weiter ist $\left| h(\gamma(t)) - 1 \right| < 1$, OE $|h(z) - 1| < 1$ auf $\tilde{\Omega} = \{ z \in \Omega \mid |h(z) - 1| < 1 \}$

Betrachte $l(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n$ auf $B_1(1)$

$l'(z) = \dfrac{1}{z}$, vgl. § 2.20. Es folgt für $l \circ h$,

dann $(l \circ h)' = \dfrac{h'(z)}{h(z)} = \dfrac{f'(z)}{f(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz \qquad \square$$

<u>Korollar</u> (Hauptsatz der Algebra) Sei $n \geq 1$,
$p(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$, $a_n \neq 0$. Dann hat p eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

<u>Beweis</u> OE $a_n = 1$ (teile p durch a_n). Für $|z| \geq 1$

$$|p(z)| \geq |z|^n - |z|^{n-1} \underbrace{(|a_{n-1}| + \ldots + |a_0|)}_{=R} = |z|^{n-1} \cdot (|z| - R)$$

also $|p(z)| \geq 1$ für $|z| \geq 1 + R = r$.

Mit dem Identitätssatz folgt: $p(z)$ hat höchstens endlich viele Nullstellen in $B_r(0)$ (weil $\overline{B}_r(0)$ kompakt ist)

Weiter ist
$$|p(z) - z^n| = |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0| \leq |z|^{n-1} \cdot R < |z^n|$$
für $|z| = r$. Setze $\gamma(t) = r \cdot \exp(it)$ $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\Rightarrow \sum_{c \in N(f) \cap B_r(0)} n_c(p) = n$$ □

<u>Korollar</u> Sei $s > 1$, sei $h \in \mathcal{O}(B_s(0))$.
Falls für alle z mit $|z| = 1$ gilt $|h(z)| < 1$, so gibt es w mit $|w| < 1$ und $h(w) = w$.

<u>Beweis</u> Betrachte $f(z) = h(z) - z$, $g(z) = -z$.

<u>Beh</u>: f hat Nullstelle in $B_1(0)$.

Denn sonst wende Rouché an auf f, g, $\gamma(t) = \exp(it)$, $0 \le t \le 2\pi$

$$|f(z) - g(z)| < 1 = |g(z)| \quad \text{für } |z| = 1$$

$$\Rightarrow 0 = \sum_{c \in N(f) \cap B_1(0)} n_c(f) = \sum_{c \in N(g) \cap B_1(0)} n_c(g) = 1 \quad \lightning$$

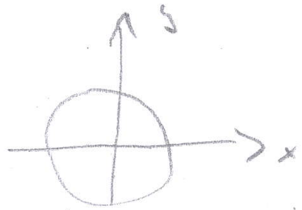
$\square$

Wir betrachten zum Abschluss die Berechnung von Integralen als Anwendung des Residuensatzes.

16. Trigonometrische Integrale

Sei $R(x,y)$ eine komplexe rationale Funktion (d.h. es gibt komplexe Polynome $p(x,y)$, $q(x,y) \neq 0$ mit $R(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$)

Wir nehmen an, dass $R(x,y)$ stetig ist auf der Menge $\underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}}_{\text{Einheitskreis}}$



Setze $\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\right)$.

Dann gilt
$$\int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\, dt = 2\pi \sum_{c \in P(\tilde{R}) \cap B_1(0)} \operatorname{Res}_c \tilde{R}$$

Beweis: Sei $\gamma(t) = \exp(it)$ $\quad 0 \le t \le 2\pi$. $\quad \gamma'(t) = i \cdot \gamma(t)$

$$\cos(t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\right)}_{= \mathrm{Re}(\gamma(t))} \qquad \sin(t) = \underbrace{\frac{1}{2i}\left(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\right)}_{= \mathrm{Im}(\gamma(t))}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} R(\cos(t), \sin(t))\,dt = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(\gamma(t) + \frac{1}{\gamma(t)}\right), \frac{1}{2i}\left(\gamma(t) - \frac{1}{\gamma(t)}\right)\right) dt$$

$$= \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \underbrace{R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \cdot \frac{1}{z}}_{= \tilde{R}(z)}\, dz$$

$$= 2\pi \cdot \sum_{c \in B_1(0) \cap P(\tilde{R})} \mathrm{Res}_c(\tilde{R})$$

$\square$

Beispiel (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{\underbrace{1 - 2a\cos(t) + a^2}_{= R(\cos(t), \sin(t))}}\,dt \qquad a \in \mathbb{C}, \; |a| \neq 1$

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - az - a/z + a^2} = \frac{1}{z - az^2 - a + a^2 z}$$

$$= \frac{1}{(z-a)(1-az)}$$

Ist $|a| < 1$, so Pol in $c = a$, $\mathrm{Res}_a(\tilde{R}) = \dfrac{1}{1-a^2}$

Ist $|a| > 1$, so Pol in $c = \frac{1}{a}$, $\mathrm{Res}_{\frac{1}{a}}(\tilde{R}) = \dfrac{1}{a^2-1}$

Also $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos(t)+a^2}\,dt = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-a^2} & |a|<1 \\ \frac{2\pi}{a^2-1} & |a|>1 \end{cases}$$

#

(b) $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(p+\cos(t))^2}\,dt \qquad p>1, \quad R(x,y) = \frac{1}{(p+x)^2}$$

$$\tilde{R}(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(p+\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}))^2} = \frac{4z}{(z^2+2pz+1)^2}$$

vgl. §5.4 (b), Pole in $c_\pm = -p \pm \sqrt{p^2-1}$

einziger Pol in $B_1(0)$ ist c_+, mit Residuum

$$\operatorname{Res}_{c_+}(\tilde{R}) = \frac{p}{(\sqrt{p^2-1})^3} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{(p+\cos(t))^2}\,dt = \frac{2\pi p}{(\sqrt{p^2-1})^3}, \quad p>1$$

Nun betrachten wir noch <u>uneigentliche Integrale</u>.

Erinn.: sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Man setzt für $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^\infty f(s)\,ds = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(s)\,ds \,,$$ falls der Grenzwert rechts existiert.

Weiter setzt man $$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds = \int_{-\infty}^{0} f(s)\,ds + \int_0^\infty f(s)\,ds$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_t^0 f(s)\,ds + \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(s)\,ds.$$

Achtung: das ist nicht unbedingt das Gleiche wie

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(s)\,ds \,,$$ betrachte etwa $f(s) = s \Rightarrow$

$$\int_{-t}^{t} s\,ds = \frac{1}{2} s^2 \Big|_{-t}^{t} = 0 \,,$$ also $\lim\limits_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} s\,ds = 0$, aber

$\int_{-\infty}^{\infty} s\,ds$ existiert <u>nicht</u>, weil $\lim\limits_{t\to\infty} \int_0^t s\,ds = \infty$.

17. Lemma (Existenzkriterium für uneigentliche Integrale)

Ist $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig und gibt es $p > 1$, $L \geq 0$ so, dass $|s^p \cdot f(s)| \leq L$ für alle $a \leq s < \infty$, so existiert

$$\int_a^\infty f(s)\,ds = \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(s)\,ds.$$

__Beweis__ Für $s > 0$ gilt $|f(s)| \leq \frac{L}{s^p}$, folglich für $t_1, t_2 > 0$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds \right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s)|\,ds \leq \int_{t_1}^{t_2} s^{-p}\,ds = \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{t_1^{\,p-1}} - \frac{1}{t_2^{\,p-1}} \right)$$

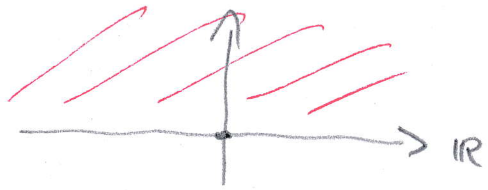
$$\leq \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{t_1^{\,p-1}}$$

Ist t_1 groß genug, so folgt $\left| \int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds \right| \leq \varepsilon$ für alle $t_2 > t_1$

$$\Rightarrow \lim_{t_2 \to \infty} \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds \right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left| \int_{t_1}^{\infty} f(s)\,ds \right| \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \int_a^t f(s)\,ds \text{ existiert.} \quad \square$$

Wir setzen $H = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0 \}$, die obere Halbebene.

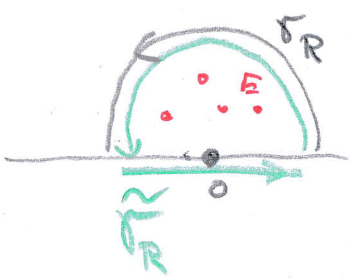


18. Satz Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $H \cup \mathbb{R} \subseteq \Omega$. Sei $E \subseteq \Omega$ endlich, $E \cap \mathbb{R} = \emptyset$. Sei $f: \Omega - E \to \mathbb{C}$ holomorph. Falls $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds$ existiert und falls gilt

$\lim_{z \to \infty} z f(z) = 0$, so gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(s)ds = 2\pi i \cdot \sum_{c \in E \cap H} \mathrm{Res}_c(f)$$

Beweis Wir wählen $R > 0$ so, dass gilt $E \subseteq B_R(0)$.



Sei $\gamma_R(t) = R \cdot \exp(it) \qquad 0 \le t \le \pi$

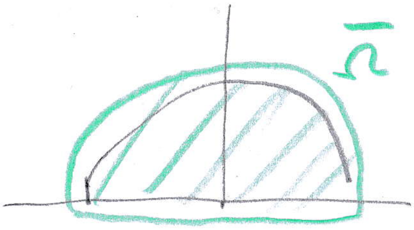
$$\tilde{\gamma}_R(t) = \begin{cases} \gamma(t) & 0 \le t \le \pi \\ -R+t-\pi & \pi \le t \le \pi + 2R \end{cases}$$

Dann gilt

$$\int_{-R}^{R} f(s)\,ds + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{c \in E} \mathrm{Ind}_{\tilde{\gamma}_R}(c) \cdot \mathrm{Res}_c(f)$$

$$= 2\pi i \sum_{c \in E \cap H} \mathrm{Res}_c(f)$$, da $\tilde{\gamma}_R$ ist einfach geschlossen und nullhomolog.

(ein Fach geschlossener nach §6.11, null homolog, weil es ein Gebiet $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$ gibt, das sternförmig ist)



Nun gilt $\left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| \le \pi \cdot R \cdot \max\{ |f(z)| \mid |z|=R \}$

Für $\varepsilon > 0$ gibt es R so, dass $|R \cdot f(z)| \le \varepsilon$ für alle $|z|=R \Rightarrow \lim_{R\to\infty} \left| \int_{\gamma_R} f(z)\,dz \right| = 0$, damit

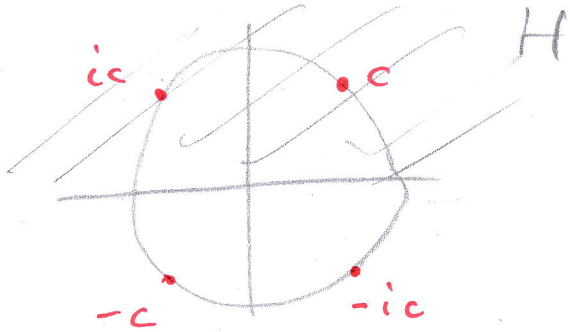
$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(s)\,ds = 2\pi i \sum_{c \in E \cap H} \operatorname{Res}_c(f) \qquad \square$$

<u>Beispiel</u> $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$ $\qquad |s^2 \cdot f(s)| = \dfrac{s^4}{1+s^4} \le 1$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(s)\,ds$ existiert.

Sei $c = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, die Nullstellen von z^4+1 sind

$c, ic, -c, -ic$



$\operatorname{Res}_c(f) = \dfrac{c^2}{4c^3} = \dfrac{1}{4c}$

↑ §6.3(iii)

$\operatorname{Res}_{ic}(f) = \dfrac{(ic)^2}{4(ic)^3} = \dfrac{1}{4ic} = \dfrac{-i}{4c}$

Also $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{s^2}{1+s^4}\,ds = 2\pi i \left(\frac{1}{4c} - \frac{i}{4c} \right) = \frac{1}{2}\pi \frac{i+1}{c}$

$$= \frac{1}{2}\pi \frac{i+1}{1+i}\sqrt{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Ähnlich kann man viele weitere uneigentliche Integrale berechnen.

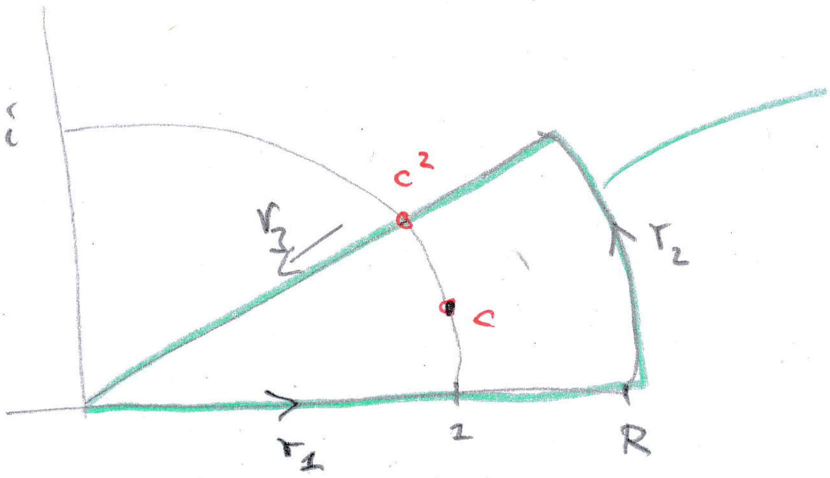
Manchmal helfen auch Symmetrieüberlegungen.

<u>Bsp</u> $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{s^{m-1}}{1+s^n}\,ds \qquad 0<m<n, \; m,n \in \mathbb{N}$

Nach §6.17 existiert das Integral.

Die Nullstellen von z^n+1 sind $\exp(k\frac{1}{n}\pi i)$

$k = 1,3,5,\dots,2n-1$. Setze $c = \exp(\frac{1}{n}\pi i)$



nullhomolog und einfach geschlossen!

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}, \quad \mathrm{Res}_c(f) = \frac{c^{m-1}}{n c^{n-1}} = -\frac{c^m}{n}$$

nach §6.3 (ii), $\quad c^n = -1$

also $$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{-c^m}{n}$$

$$-\gamma_3(t) = c^2(R-t) \qquad 0 \le t \le R$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_0^R \frac{t^{m-1} \cdot c^{2m-2}}{1+t^n c^{2n}} \cdot c^2 dt \qquad c^{2n} = 1$$

$$= -c^{2m} \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt = -c^{2m} \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)dz \right| \le \frac{2\pi}{n} \cdot R \cdot \max\{ |f(z)| \mid |z| = R \}$$

$$\left| \frac{z^{m-1}}{1+z^n} \right| \le R^{m-1} \cdot \frac{1}{|R^n| - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} (c^{2m} - 1) \int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \cdot \frac{c^m}{n}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{s^{m-1}}{1+s^n} ds = \frac{2\pi i}{n} \frac{c^m}{c^{2m}-1} = \frac{2\pi i}{n} \left(c^m - c^{-m}\right)^{-1}$$

$$= \frac{2\pi i}{n} \left(2i \cdot \sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)\right)^{-1} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)}$$