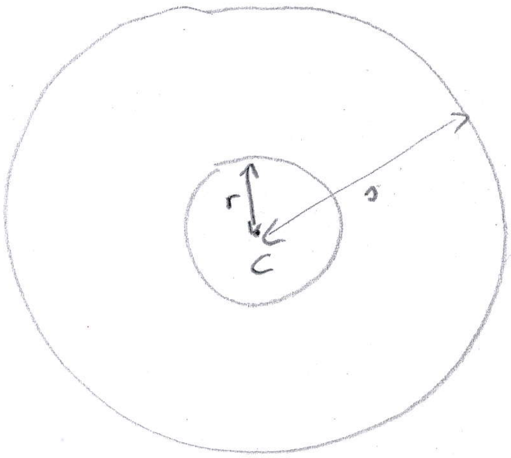
§5. Isolierte Singularitäten

1. <u>Def</u> Für $c \in \mathbb{C}$ und $0 \leq r < s \leq \infty$ ist der

<u>Kreisring</u>

$$K_{r,s}(c) = \{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-c| < s \}$$



Beacht: $K_{r,s}(c)$ ist ein Gebiet,

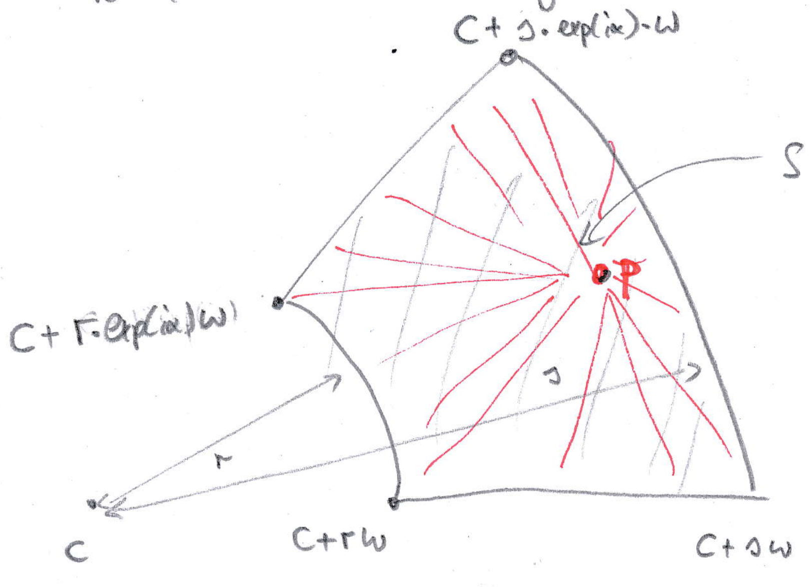
<u>denn</u>: $K_{r,s}(c)$ ist offen und nicht leer. Die Abbildung

$$(r,s) \times [0,\pi] \to K_{r,s}(c)$$

$$(t,\alpha) \mapsto c + t \cdot \exp(i\alpha)$$

ist surjektiv und stetig und $(r,s) \times [0,\pi]$ ist zush.

2. <u>Beobachtung</u> Sei $0 < r < s \leq \infty$. Für $\alpha > 0$ hinreichend klein ist das Segment S <u>sternförmig</u> bezüglich ein Punkt $p \in S$



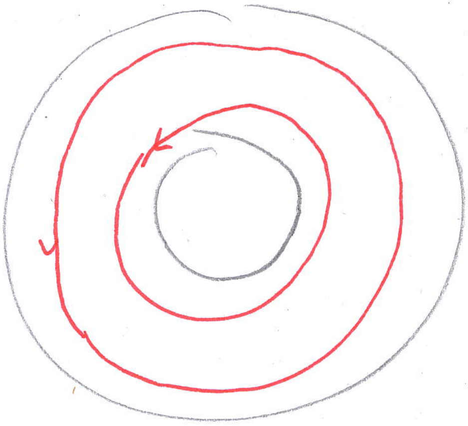
$$S = \{ c + t \exp(i\beta) w \mid r < t < s,\ 0 < \beta < \alpha \}$$

Lemma (Integralsatz für Kreisringe)

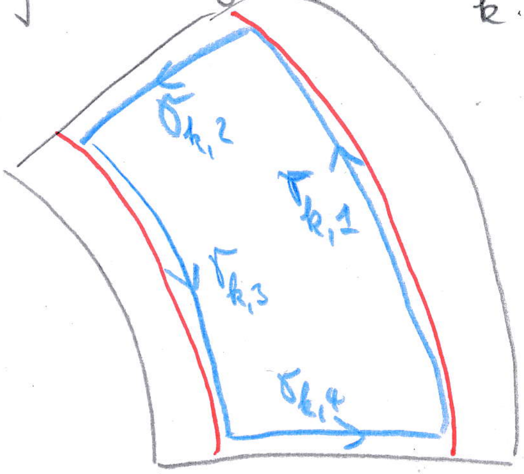
Sei $c \in \mathbb{C}$, sei $0 \leq r < s \leq \infty$ und seien $r', s' \in \mathbb{R}$ mit $0 < r < r' < s' < s$. Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$.

Dann gilt

$$\int_{|z-c|=r'} f(z)\,dz = \int_{|z-c|=s'} f(z)\,dz$$



Beweis Wir überdecken $K_{r,s}(c)$ durch m sternförmige Segmente $S_1, \ldots, S_m$ wie eben. In jedem Segment S_k gilt nun



$$0 = \int_{\gamma_{k,1}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{k,2}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{k,3}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{k,4}} f(z)\,dz$$

Wobei $\gamma_{k,2}$ in S_k und S_{k+1} liegt und γ_4 in S_k und S_{k-1}.

Also $$0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_{\gamma_{k,2}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{k,4}} f(z)\,dz \right)$$ da

die Wege entgegengesetzt durchlaufen werden

und folglich

$$0 = \sum_{k=1}^{m} \left(\int_{\gamma_{k,1}} f(z)\,dz + \int_{\gamma_{k,3}} f(z)\,dz \right)$$

$$= \int_{|z-c|=s'} f(z)\,dz - \int_{|z-c|=r'} f(z)\,dz$$

Vorzeichen, da der innere Weg im Uhrzeigersinn durchlaufen wird!

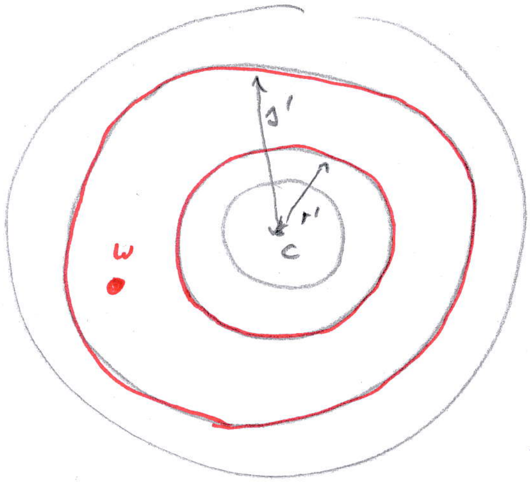
$\square$

3. Satz (Integralformel für Kreisring)

Sei $0 \le r < r' < s' < s \le \infty$, sei $c \in \mathbb{C}$ und sei $w \in \mathbb{C}$ mit $r' < |w-c| < s'$. Sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$.

Dann gilt

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=s'} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=r'} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$



Beweis Wir setzen

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(w)}{z-w} & z \neq w \\ f'(w) & z = w \end{cases}$$

Dann ist g nach dem Fortsetzungssatz §3.15 holomorph auf $K_{r,s}(c)$. Nach dem Integralsatz für Kreisschicht gilt

$$\int_{|z-c|=r'} g(z)\,dz = \int_{|z-c|=s'} g(z)\,dz \,,$$ dh

$$\int\limits_{|z-c|=r'} \frac{f(z)}{z-w}\,dz + \underbrace{\int\limits_{|z-c|=r'} \frac{f(w)}{z-w}\,dz}_{=2\pi i\cdot f(w)} = \int\limits_{|z-c|=\rho'} \frac{f(z)}{z-w}\,dz + \underbrace{\int\limits_{|z-c|=\rho'} \frac{f(w)}{z-w}\,dz}_{=0}$$

$\square$

4. <u>Notation</u> Wir setzen für $c \in \mathbb{C}$ und für $0 \leq r < s \leq \infty$

$$K^+_{r,s}(c) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-c| < s \}$$

$$K^-_{r,s}(c) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z-c| > r \}$$

also $K^+_{r,s}(c) \cap K^-_{r,s}(c) = K_{r,s}(c)$.

5. <u>Satz</u> Sei $c \in \mathbb{C}$, sei $0 \leq r < s \leq \infty$ und sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$. Dann gibt es eindeutige Funktionen

$$f_+ \in \mathcal{O}(K^+_{r,s}(c))$$
$$f_- \in \mathcal{O}(K^-_{r,s}(c))$$

mit

(i) $f(w) = f_+(w) + f_-(w)$ für alle $w \in K_{r,s}(c)$

(ii) $\lim\limits_{z\to\infty} f_-(z) = 0$ [d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $R > 0$ so, dass $|f_-(z)| \leq \varepsilon$ für alle z mit $|z| \geq R$]

Beweis (a) Sei $w \in K^+_{r,s}(c)$. Wählt t so, dass $|w-c| < t < s$ gilt, setze

$$g_t(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-c|=t} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$$

Nach dem Entwicklungslemma § 3.11 gilt $g_t(w) \in \mathcal{O}(B_t(c))$. Ist $t < \tilde{t} < s$, so gilt nach § 5.2 $g_t(w) = g_{\tilde{t}}(w)$, d.h. g_t hängt nicht von $t > |w-c|$ ab. Wir setzen

$$f_+(w) = g_t(w) \Rightarrow f_+ \in \mathcal{O}(K^+_{r,s}(c)).$$

(b) Sei $w \in K^-_{r,s}(c)$. Wähle t so, dass $r < t < \min\{s, |w-c|\}$ gilt. Dann ist

$$h_t(w) = \frac{-1}{2\pi i} \int\limits_{|z-c|=t} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \quad \text{holomorph } (*)$$

auf $K^-_{t,s}(c)$ und wieder mit § 5.2 unabhängig von t.

Setze $f_-(w) = h_t(w)$. Mit § 5.3 erhalten wir

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-c|=\rho'} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-c|=r'} \frac{f(z)}{dt}$$

$= f_+(w) - f_-(w)$ für alle

$r < r' < |w-c| < \rho' < \rho$ und damit

$f(w) = f_+(w) - f_-(w)$ für alle $w \in K_{r,\rho}(c)$.

Weiter ist $|f_-(w)| \leq \frac{K}{|w-c|-t}$ $\quad K = \max\{\,|f(z)| \;\; |z-c| = t\}$

$r < t < \rho$ fest

$\Rightarrow \lim\limits_{w\to\infty} f_-(w) = 0.$

Zur Eindeutigkeit von f_+, f_-: wenn

$F = f_+ + f_- = \tilde{f}_+ + \tilde{f}_-$. Dann ist

$$h(w) = \begin{cases} f_+(w) - \tilde{f}_+(w) & w \in K^+_{r,\rho}(c) \\ \tilde{f}_-(w) - f_-(w) & w \in K^-_{r,\rho}(c) \end{cases}$$

holomorph auf $\mathbb{C}$ und beschränkt, also nach

Satz von Liouville konstant, $\lim\limits_{w\to\infty} h(w) = 0$

$\Rightarrow h = 0 \Rightarrow f_+ = \tilde{f}_+$ und $f_- = \tilde{f}_-$ $\quad\square$ #

Man nennt in §5.5 f_- den <u>Hauptteil</u> von f und f_+ den <u>Nebenteil</u> von f.

<u>Bsp</u> $r=0$, $s=\infty$, $K_{r,s}(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$

$f(z) = z^n$. Es folgt aus der <u>Eindeutigkeit</u>

$n \geq 0 \Rightarrow f_+ = f \;, f_- = 0$

$n < 0 \Rightarrow f_+ = 0 \;, f_- = f$

Im Beweis von §5.5 müssen wir noch (*) nachtragen

6. <u>Lemma</u> (<u>Das allgemeine Entwicklungslemma, vgl §3.11</u>)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $\gamma : [a,b] \to \Omega$ stückweise stetig diffbar, sei $K = \gamma([a,b]) \subseteq \Omega$ und sei $\varphi : K \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist die Funktion

$$f(w) = \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{z-w}\, dz \qquad \text{in jedem } w \in \Omega - K$$

stetig und komplex differenzierbar.

<u>Beweis</u> Wähle $\delta > 0$ so, dass $B_\delta(w) \cap K = \emptyset$ (K ist kompakt, also abgeschlossen!). Für $z \in B_{\frac{\delta}{2}}(w)$ und $t \in [a,b]$ ist dann $|\gamma(t) - z| > \frac{\delta}{2}$

Nun gilt für $|h| < \frac{\delta}{2}$

$$f(w+h) - f(w) = \int_\gamma \frac{h \cdot \varphi(z)}{(z-w-h)(z-w)}\, dz \quad \text{, also}$$

$$|f(w+h) - f(w)| \leq |h| \cdot \frac{2}{\delta^2} \cdot L \cdot M \quad , \quad M = \max\{ |\varphi(z)| \mid z \in K \}$$

$$L = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$$

Damit ist f stetig in w.

Weiter gilt für $h \neq 0$

$$\frac{f(w+h) - f(w)}{h} = \int_\gamma \frac{\varphi(z)}{(z-w-h)(z-w)}\, dz$$

$$= \int_\gamma \frac{\psi(z)}{z-w-h}\, dz \qquad \psi(z) = \frac{\varphi(z)}{z-w}$$

Die rechte Seite ist stetig in $h=0$ nach obiger Rechnung (angewandt auf ψ!), also ist f komplex diff'bar in w. $\square$

7. Def Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen, $c\in\mathbb{C}$,

so heißt die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-c)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-c)^k$$

eine Laurent-Reihe (um c)

Erinnerung an §2.11 (Abels Theorem)

Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$,

so konvergiert die Folge der Partialsummen

$F_m(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k(z-c)^k$ gleichmäßig auf jeder Kreisscheibe $B_r(c)$ für $r < R$. Es folgt für $F(z) = \lim_{m\to\infty} F_m(z)$,

dass
$$\int_{|z-c|=r} F(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{|z-c|=r} a_k(z-c)^k\,dz = 0$$

Sei nun $\tilde{R}$ der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k w^k$,

$b_k = a_{-k}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k(z-c)^k$

gleichmäßig auf jeder kompakten Menge $N \subseteq \mathbb{C}$

mit $N \cap \overline{B}_{1/\tilde{R}}(c) = \emptyset$ (substituiere $w = (z-c)^{-1}$,

$|w| < \tilde{R} \Leftrightarrow |z-c| > 1/\tilde{R}$)

Ist $r > \frac{1}{\tilde{R}}$, so folgt für $g(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-c)^k$,

dann $\int_{|z-c|=r} g(z)\,dz = \sum_{k=-1}^{-\infty} \int_{|z-c|=r} a_k (z-c)^k dz =$

$$\int_{|z-c|=r} a_{-1} (z-c)^{-1} dz = 2\cdot\pi\cdot i\cdot a_{-1} .$$

8. __Theorem__ (__Entwicklungssatz von Laurent__)

Sei $0 \leq r < s \leq \infty$, sei $c \in \mathbb{C}$ und sei $f \in \mathcal{O}(K_{r,s}(c))$ mit Nebenteil $f_+ \in \mathcal{O}(K^+_{r,s}(c))$ und Hauptteil $f_- \in \mathcal{O}(K^-_{r,s}(c))$. Dann gibt es eindeutig komplexe Zahl $a_k \in \mathbb{C}$, für $k \in \mathbb{Z}$, so dass gilt

$$f_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k \qquad z \in K^+_{r,s}(c)$$

$$f_-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-c)^k \qquad z \in K^-_{r,s}(c)$$

also $F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ für $z \in K_{r,s}(c)$.

Dabei gilt $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=t} \frac{F(z)}{(z-c)^{k+1}}\, dz$, für

$r < t < s$ beliebig.

<u>Beweis</u> (a) Da $F_+ \in \mathcal{O}(K^+_{r,s}(c))$ gilt

mit Cauchy-Taylor $F_+(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$, $|z| < s$

und $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-c|=t} \frac{F_+(z)}{(z-c)^{k+1}}\, dz$.

(b) Betrachte die holomorphe Abbildung $w \longmapsto c + \frac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ mit Inverser $z \longmapsto (z-c)^{-1}$ $(z \neq c)$

Setze $g(w) = F_-(c + w^{-1})$ für $w \neq 0$, setze

$g(0) = 0$

Wegen $\lim_{z \to \infty} F_-(z) = 0$ gilt $\lim_{w \to 0} g(w) = 0$

Nach dem Fortsetzungssatz ist g holomorph auf $\Omega = \{ w \in \mathbb{C} \mid |w| < \frac{1}{r} \}$ $\left(\frac{1}{0} = \infty \right)$ hat also nach Cauchy-Taylor eine Reihenentwicklung

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k \quad \text{mit} \quad b_0 = g(0) = 0$$

Setze $a_{-k} = b_k$ für $k \geq 1$, es folgt

$$F_-(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-c)^k \quad \text{für} \quad |z| > \frac{1}{r}.$$

Aus (a) und (b) folgt $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ für $r < |z| < s$.

Weiter gilt für jedes $m \in \mathbb{Z}$

$$\frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+m+1} (z-c)^k$$

und damit für $r < t < s$

$$\int_{|z-c|=t} \frac{f(z)}{(z-c)^{m+1}} \, dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot a_m$$

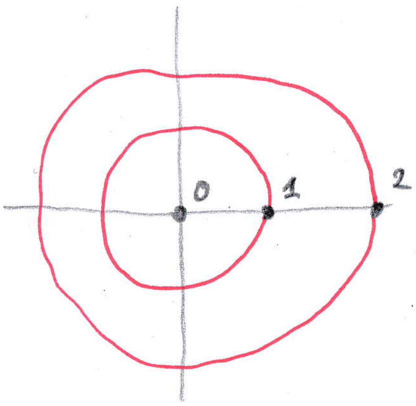
Insbesondere sind die a_m eindeutig bestimmt. $\square$

Die Koeffizienten a_k einer Laurentreihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-c)^k$ nennt man auch <u>Laurentkoeffizienten</u>.

In der Praxis ist die Formel $a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-c|=r} \frac{f(z)}{(z-c)^{k+1}}\, dz$ wenig hilfreich. Ein Trick zur Berechnung ist die <u>Partialbruchzerlegung</u>.

9. <u>Beispiel</u> $\Omega = \mathbb{C} - \{1,2\}$, $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$

$c = 0$



<u>Ansatz zur Partialbruchzerlegung</u>

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{\alpha}{z-1} + \frac{\beta}{z-2}$$

$$1 = \alpha(z-2) + \beta(z-1)$$

$z = 2 \Rightarrow \beta = 1$ $\qquad$ $z = 1 \Rightarrow \alpha = -1$

<u>Check</u>: $\frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{2-\cancel{z}+\cancel{z}-1}{(z-1)(z-2)} = f(z)$ (✓)

Also $f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$

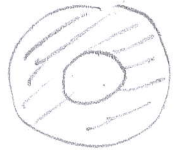
(a) Taylorentwicklung auf $B_1(0)$, $|z|<1$

$$\frac{-1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \qquad |z|<1$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k \qquad |z|<2$$

Also auf $B_1(0)$ $\quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-2^{-k-1}\right)z^k$

(b) Laurententwicklung auf $K_{1,2}(0)$

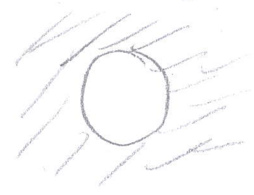


$$\frac{-1}{z-1} = \frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \qquad \left|\frac{1}{z}\right|<1 \;,\; |z|>1$$

$$= \frac{-1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = -\sum_{k=-1}^{-\infty} z^{-k}$$

Also auf $K_{1,2}(0)$ $\quad f(z)=\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} -\left(2^{-k-1}\right)z^k}_{=f_+(z)} + \underbrace{-\sum_{k=-1}^{-\infty} z^{-k}}_{=f_-(z)}$

(c) Laurententwicklung auf $K_{2,\infty}(0)$



$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^k \qquad \left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$2<|z|$$

Damit $$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} (2^{-k+1} - 1)\, z^{-k}}_{= f_-(z)} \qquad |z| > 2$$

<u>Allgemein</u>: $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ $\quad p, q$ Polynom, $q \neq 0$

$$q = (z - c_1)^{n_1} \cdots (z - c_m)^{n_m} \qquad c_j \neq c_k \text{ für } k \neq j$$

$$\Rightarrow f(z) = h(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n_j} \frac{\alpha_{jk}}{(z - c_j)^k}, \quad h \text{ Polynom}$$

eindeutig!

$h = 0$, falls $\deg(p) < \deg(q)$

$\alpha_{jk} \in \mathbb{C}$

(Beweis mit Euklidischem Algorithmus im Polynomring $\mathbb{C}[z]$)

<u>Bsp</u> $$f(z) = \frac{4z}{(z-1)^2} \stackrel{!}{=} \frac{a}{z-1} + \frac{b}{(z-1)^2}$$

$$4z = a(z-1) + b \qquad a = 4$$
$$4z = 4z - 4 + b \qquad b = 4$$

<u>Check:</u> $$\frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} = \frac{4(z-1) + 4}{(z-1)^2} = \frac{4z}{(z-1)^2} \quad (\checkmark)$$

10. Def Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Wir sagen dann, dass f in c eine isolierte Singularität hat.

Wähle $s > 0$ so, dass $B_s(c) \subseteq \Omega$. Auf dem Kreisring $K_{0,s}(c) \subseteq \Omega$ hat f eine Laurent-entwicklung

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=-1}^{-\infty} a_k (z-c)^k}_{f_-(z)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k}_{f_+(z)} \qquad z \in K_{0,s}(c)$$

nach § 5.8 (Entwicklungssatz von Laurent).

(i) c heißt hebbare Singularität, falls $a_k = 0$ für alle $k < 0$, d.h. falls $f_-(z) = 0$ auf $K_{0,s}(c)$

(ii) c heißt Pol, falls es $k < 0$ mit $a_k \neq 0$ gibt (also $f_-(z) \neq 0$), aber $a_k = 0$ für fast alle $k < 0$, d.h. $f_-(z) = \sum_{k=-1}^{-m} a_k (z-c)^k \neq 0$
$a_{-m} \neq 0$

(iii) c heißt wesentliche Singularität, falls $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$

Man nennt m die Polstellenordnung in c, $m = \max\{k = 1, 2, 3, \dots \mid a_{-k} \neq 0\}$

Bsp (a) $f(z) = \frac{\sin(z)}{z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$

$= \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots \right)$ hat hebbare Singularität in $c = 0$.

(b) $g(z) \frac{1}{z(z-1)(z-2} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - 2^{-k-1}) z^k$

hat Pol in $c = 0$, Polstellenordnung ist 1

(c) $h(z) = \exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}$ hat wesentliche Singularität in $c = 0$

11. Satz Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ Gebiet, $c \in \Omega$, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$.

Dann sind äquivalent:

(i) f hat in c eine hebbare Singularität

(ii) es gibt $t > 0$ so, dass f auf $K_{0,t}(c) \subseteq \Omega$ beschränkt ist

Beweis (i) => (ii): Wähle t so, dass $B_r(c) \subseteq \Omega$.

Auf $K_{0,r}(c)$ gilt $f = f_+$ => f hat stetig

Fortsetzung in c mit $F(c) = a_0$ $\Rightarrow$ F stetig auf $\overline{B}_{r/2}(c)$ $\Rightarrow$ $|F|$ beschränkt auf $\overline{B}_{r/2}(c)$ $\Rightarrow$ f beschränkt auf $K_{0,r/2}(c)$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach dem Fortsetzungssatz § 3.15 hat f holomorphe Fortsetzung in c, es folgt $f = F_+$ nahe c. $\square$

12. <u>Satz</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $c \in \Omega$, sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$.

Dann sind äquivalent:

(i) f hat einen Pol in c

(ii) es gilt $\lim\limits_{z \to c} f(z) = \infty$, d.h. zu jedem $R > 0$ gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $|f(z)| \geq R$ für (alle) $|z-c| \leq \varepsilon$.

<u>Beweis</u> (i) $\Rightarrow$ (ii): Sei m die Polstellenordnung von c.

Setze $h(z) = (z-c)^m f(z)$. Dann ist $h \in \mathcal{O}(\Omega)$, denn nahe c gilt $h(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k-m} (z-c)^k$.

Es folgt $\lim\limits_{z \to c} |f(z)| = \lim\limits_{z \to c} \dfrac{1}{|z-c|^m} \cdot |h(z)| = \infty$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Ist $\lim\limits_{z \to c} f(c) = \infty$, so gibt es $t > 0$ so, dass $|f(z)| > 1$ für alle z mit $|z-c| < t$. Dann ist $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ holomorph auf $B_t(c) - \{c\}$ und beschränkt, also nach Fortsetzungssatz holomorph auf

auf $B_t(c)$. Schreibe $h(z) = (z-c)^m \cdot g(z)$,

$g(c) \neq 0$, $g \in \mathcal{O}(B_t(c))$ (mit Taylorreihe!)

$\Rightarrow f(z) = (z-c)^{-m} \cdot \frac{1}{g(z)}$ $\qquad \frac{1}{g} \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(c))$ für $\varepsilon < t$ geeignet klein

$(g(c) \neq 0!)$

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^k \qquad b_0 \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-c)^{k-m}$$ hat Pol der Ordnung m.

#

13. <u>Satz</u> (Casorati-Weierstraß) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, sei $c \in \Omega$ und sei $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{c\})$. Dann sind äquivalent:

(i) c ist wesentliche Singularität von f

(ii) Für jedes $w \in \mathbb{C}$ gibt es eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\Omega - \{c\}$ mit $\lim_n z_n = c$ und $\lim_n f(z_n) = w$.

Anders gesagt: Für jedes $r > 0$ ist $f(K_{0,r}(c)) \subseteq \mathbb{C}$ dicht.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Angenommen, das wäre falsch. Dann gibt es $w \in \mathbb{C}$, $\varepsilon, \delta > 0$ so, dass $B_\delta(w) \cap f(K_{0,\varepsilon}(c)) = \emptyset$

$K_{0,\varepsilon}(c) \subseteq \Omega$

Betrachte $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - w}$, $g \in \mathcal{O}(K_{0,\varepsilon}(c))$

$|g(z)| \leq \dfrac{1}{\delta}$ für alle $z \in K_{0,\varepsilon}(c)$. Folglich hat

g holomorphe Fortsetzung $\tilde{g}$ auf $B_\varepsilon(c)$.

Ist $\tilde{g}(c) \neq 0$, so ist $f(z) = \dfrac{1}{\tilde{g}(z)} + w$ stetig in c $\lightning$

Ist $\tilde{g}(c) = 0$, so schreibe $\tilde{g}(c) = (z-c)^m \cdot h(z)$, $m \geq 1$

$h \in \mathcal{O}(B_\varepsilon(c))$, $h(c) \neq 0$. Es folgt

$f(z) = \dfrac{1}{(z-c)^m h(z)} + w$ hat Pol der Ordnung m in c $\lightning$

(ii) $\Rightarrow$ (i): folgt aus §5.11 und §5.12 $\square$

14. **Def** Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Teilmenge $D \subseteq \Omega$ heißt <u>diskret</u>, wenn es für jedes $d \in D$ ein $\varepsilon > 0$ so gibt, dass $B_\varepsilon(d) \cap D = \{d\}$ gilt.

<u>Bsp</u> (a) $D = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{C} = \Omega$ ist diskret

(b) $D = \{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,4,.. \}$ ist diskret in $\Omega = \mathbb{C}$

(und <u>nicht</u> abgeschlossen, denn $\lim_n \frac{1}{n} = 0 \notin D$)

(c) $\{ \frac{1}{n} \mid n = 1,2,3,... \} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{C}$ ist abgeschlossen, aber <u>nicht</u> diskret, denn zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $n \geq 1$ mit $\frac{1}{n} \in B_\varepsilon(0)$.

Sei $D \subseteq \Omega$ diskret und abg. Eine Funktion $f : \Omega - D \to \mathbb{C}$ heißt <u>meromorph</u> auf Ω, wenn f in jedem Punkt $z \in \Omega - D$ komplex diff'bar ist, und wenn f in jedem Punkt $d \in D$ einen Pol oder eine hebbare Singularität hat. Es sei $P(f) \subseteq D$ die Menge der Polstellen von f.

Für $d \in D$ setzen wir $f(d) = \lim_{z \to d} f(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

($f(d) = \infty$ genau dann wenn d Polstelle von f ist).

<u>Bem</u> D abg + diskret $\Rightarrow$ $\Omega - D$ ist Gebiet (ÜA).

Wir setzen $\mathcal{M}(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f \text{ meromorph} \}$

15. <u>Satz</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Dann sind auch
$$f+g : z \mapsto f(z)+g(z), \quad z \notin P(f) \cup P(g)$$
$$f \cdot g : z \mapsto f(z) \cdot g(z), \quad z \notin P(f) \cup P(g)$$
meromorph. Ist $g \not\equiv 0$, so ist $\frac{1}{g} : z \mapsto \frac{1}{g(z)}$ für $g(z) \neq 0$ meromorph.

<u>Beweis</u> Ist $z \notin P(f) \cup P(g)$, so ist $f+g$ und $f \cdot g$ komplex diffbar in $z \Rightarrow f+g, f \cdot g \in \mathcal{O}(\Omega - (P(f) \cup P(g)))$.

Ist $c \in P(f) \cup P(g)$, so gibt es $m, n \geq 0$ so, dass
$$f_1(z) = (z-c)^m \cdot f(z)$$
$$g_1(z) = (z-c)^n g(z)$$
holomorph nahe c sind.

Für $k \geq m, n$ ist dann auch $(z-c)^k (f(z)+g(z))$ holomorph nahe $c \Rightarrow f+g$ hat Pol in c

und $(z-c)^{m+n} f(z) \cdot g(z)$ holomorph nahe c
$\Rightarrow f \cdot g$ hat Pol in c

$\Rightarrow f+g, f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Sei $N = \{ z \in \Omega \mid g(z) = 0 \}$. Dann ist N abg. in Ω. Ist $g \neq 0$, so ist N diskret nach dem Identitätssatz §4.2 $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}$ holomorph auf $\Omega - (N \cup P(g))$.

Ist c Nullstelle von g, schreibe $g(z) = (z-c)^m \cdot h(z)$ nahe c, h holomorph, $m \geq 1$, $h(c) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g(z)} = (z-c)^{-m} \cdot \frac{1}{h(z)}$ nahe c $\Rightarrow$ $\frac{1}{g}$ hat Polstelle in c.

Ist c Polstelle von g, schreibe $g(z) = (z-c)^m \cdot h(z)$ nahe c, h holomorph, $m \leq -1$, $h(c) \neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{g(z)} = (z-c)^{-m} \frac{1}{h(z)}$ holomorph nahe c. Also ist $\frac{1}{g}$ meromorph. $\square$

16. <u>Korollar</u> Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann ist $M(\Omega)$ ein <u>Körper</u> bezüglich der üblichen Verknüpfungen

$$f, g \longmapsto f+g \quad \text{und} \quad f, g \longmapsto f \cdot g.$$

Nullelement ist die Nullabbildung $z \longmapsto 0$, Einselement ist die Einsabbildung $z \longmapsto 1$. $\square$